6. **Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М., Сорокин Л. Е., Тарунин Е. Л.** Вторичные колебательные конвективные движения в плоском вертикальном слое жидкости.— «Изв. АН СССР. МЖГ», 1974, № 1.
7. **Gill A. E., Kirkham C. C.** A note on the stability of convection in a vertical slot.— «J. Fluid Mech.», 1970, vol. 42 (1), p. 125.
8. **Алексеев Ю. Н., Короткин А. И.** Влияние поперечной скорости потока в несжимаемом пограничном слое на устойчивость ламинарной формы движения.— «Изв. АН СССР. МЖГ», 1966, № 1.
9. **Chen T. S., Sparrow E. M., Tsou F. K.** The effect of mainflow transverse velocities in linear stability theory.— «J. Fluid Mech.», 1971, vol. 50, pt 4.
10. **Варапаев В. Н., Ягодкин В. И.** Об устойчивости некоторых непараллельных течений вязкой несжимаемой жидкости в канале.— «Изв. АН СССР. МЖГ», 1970, № 4.
11. **Sheppard D. M.** Hydrodinamics stability of the flow between parallel porous walls.— «Phys. Fluids», 1972, vol. 15, N 2.
12. **Шварцблат Д. Л.** О спектре возмущений и конвективной неустойчивости плоского горизонтального слоя жидкости с проницаемыми границами.— ПММ, 1968, т. 32, вып. 2.
13. **Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М.** Об устойчивости плоскопараллельного конвективного движения относительно пространственных возмущений.— ПММ, 1969, т. 33, вып. 5.
14. **Бетчов Р., Криминале В.** Вопросы гидродинамической устойчивости. М., «Мир», 1971.
15. **Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М., Якимов А. А.** О двух типах неустойчивости стационарного конвективного движения, вызванного внутренними источниками тепла.— ПММ, 1973, т. 37, вып. 3.
16. **Шихов В. М.** Об устойчивости конвективного движения в вертикальном слое с проницаемыми границами.— «Учен. зап. Пермск. пед. ин-та. Гидродинамика», 1974, вып. 7.

УДК 532.501.3

УСТОЙЧИВОСТЬ ЛАМИНАРНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ СТЕПЕННОЙ НЕНЬЮТОНОВСКОЙ ЖИДКОСТИ

В. В. Заметалин

(*Новосибирск*)

Исследуется устойчивость ламинарного пограничного слоя степенной неньютоновской жидкости. Показывается справедливость теоремы Сквайра о возможности сведения задачи устойчивости течения степенной жидкости по отношению к трехмерным возмущениям к задаче с двумерными возмущениями. На основе предложенных в [1] преобразований строится численный метод интегрирования обобщенного уравнения Орра — Зоммерфельда. Рассчитываются характеристики устойчивости пограничного слоя на продольно-обтекаемой полубесконечной пластине.

В работе исследуется устойчивость ламинарного пограничного слоя жидкостей со степенным реологическим законом, для которых связь между тензором напряжений τ_{ij} и тензором скоростей деформаций $\dot{e}_{ij}$ имеет вид

$$\tau_{ij} = -\delta_{ij}p + k\left|\frac{1}{2}\dot{e}_{ml}\dot{e}_{lm}\right|^{\frac{n-1}{2}}\dot{e}_{ij}, \tag{1}$$

где $i, j=1, 2, 3$; k — мера консистенции; n — показатель неньютоновости; p — давление; δ_{ij} — символ Кронекера. Принято называть среды, соответствующие значениям $n > 1$, дилатантными, а значениям $n < 1$ —

псевдопластичными, к последним, в частности, относятся водные растворы высокополимеров. Случай $n=1$ соответствует ньютоновской жидкости.

Устойчивость течения степенной неньютоновской жидкости в плоском канале рассмотрена в [2]. В работах [3, 4] с помощью асимптотических методов исследовалась устойчивость пограничного слоя степенной жидкости. В [3] по выведенной приближенной формуле был произведен оценочный расчет критических чисел Рейнольдса для значений $0{,}2 \leqslant n \leqslant 2$. В [4] построены кривые нейтральной устойчивости для дилатантных жидкостей. В области значений $n > 1$ результаты работ [3, 4] противоречивы. Это приводит к необходимости более тщательного определения характеристик устойчивости, что может быть достигнуто путем численного интегрирования уравнений устойчивости. В данной работе исследование устойчивости пограничного слоя степенной жидкости проведено с помощью численного метода, в основу которого положен метод работы [1].

При подстановке соотношения (1) в уравнения сплошной деформируемой среды в напряжениях получаются известные дифференциальные уравнения движения степенной неньютоновской жидкости [5]. Представим нестационарное возмущенное течение как сумму двух потоков: стационарного основного и малого возмущающего. Как обычно [6], считаем основное течение слоистым, а составляющие возмущающего движения представим в виде

$$\tilde{u}=u(y)e^{i(\alpha x+\beta z)-i\alpha ct};$$
$$\tilde{v}=v(y)e^{i(\alpha x+\beta z)-i\alpha ct};$$
$$\tilde{w}=w(y)e^{i(\alpha x+\beta z)-i\alpha ct};$$
$$\tilde{p}=p(y)e^{i(\alpha x+\beta z)-i\alpha ct},$$

где α, β — вещественные величины; $c=c_r+ic_i$ — комплексная.

Возмущающее движение принимается трехмерным, так как в работе [7] показано, что в общем случае теорема Сквайра для неньютоновских жидкостей не имеет места.

Проведя линеаризацию безразмерных дифференциальных уравнений суммарного течения с вычитанием из них уравнений для основного течения, можно получить

$$\begin{gathered}
i\alpha \mathrm{Re}\, u(U-c)+vU'\mathrm{Re}+i\alpha\mathrm{Re}\, p=(U')^{n-1}[nu''-(\alpha^2+\beta^2)u+ \\
+(n-1)i\alpha v']+(n-1)n(U')^{n-2}U''(u'+i\alpha v); \\
i\alpha\mathrm{Re}\, v(U-c)+\mathrm{Re}\, p'=(U')^{n-1}[v''-(\alpha^2+\beta^2)v+i\alpha(n-1)(u'+ \\
+i\alpha v)]+2(n-1)(U')^{n-2}U''v'; \\
i\alpha\mathrm{Re}\, w(U-c)+i\beta\mathrm{Re}\, p=(U')^{n-1}[w''-(\alpha^2+\beta^2)w]+(n- \\
-1)(U')^{n-2}U''(w'+i\beta v);\quad i(\alpha u+\beta w)+v'=0,
\end{gathered} \tag{2}$$

где $U(y)$ — скорость основного течения; $\mathrm{Re}=\rho U_{\text{хар}}^{2-n}L_{\text{хар}}^{n}/k$ — обобщенное число Рейнольдса (ρ — плотность жидкости). Штрихи означают дифференцирование по безразмерной поперечной координате y.

Таким образом, для случая трехмерного возмущающего движения имеем четыре уравнения для определения четырех величин u, v, w, p.

После преобразования

$$\bar{\alpha}^2=\alpha^2+\beta^2,\qquad \bar{p}\,\overline{\mathrm{Re}}=p\mathrm{Re},\qquad \bar{\alpha}\overline{\mathrm{Re}}=\alpha\mathrm{Re},\qquad \bar{v}=v,$$
$$\bar{c}=c,\quad \bar{\alpha}\bar{u}=\alpha u+\beta w$$

уравнения (2) примут вид

$$(3)\quad i\bar\alpha\overline{\mathrm{Re}}\,\bar u(U-\bar c)+\bar v U'\overline{\mathrm{Re}}+i\bar\alpha\overline{\mathrm{Re}}\,\bar p=(U')^{n-1}[n\bar u''-\bar\alpha^2\bar u+(n-1)i\bar\alpha\bar v']+ +(n-1)n(U')^{n-2}U''(\bar u'+i\bar\alpha\bar v);$$

$$i\bar\alpha\overline{\mathrm{Re}}\,\bar v(U-\bar c)+\overline{\mathrm{Re}}\,\bar p'=(U')^{n-1}[\bar v''-\bar\alpha^2\bar v+i\bar\alpha(n-1)(\bar u'+i\bar\alpha\bar v)]+ +2(n-1)(U')^{n-2}U''\bar v';\quad i\bar\alpha\bar u+\bar v'=0.$$

Уравнения (3) соответствуют двумерному возмущающему движению с числом Рейнольдса $\overline{\mathrm{Re}}$, меньшим, чем Re в (2). Отсюда следует справедливость теоремы Сквайра для степенной неньютоновской жидкости.

Далее вместо уравнений (2) будем рассматривать их двумерный аналог, который получается, если положить $w=0$, $\beta=0$. Вводя безразмерную функцию тока возмущающего движения в виде

$$\psi=\varphi(y)e^{i\alpha(x-ct)},$$

после некоторых преобразований можно получить обобщенное уравнение Орра — Зоммерфельда для степенной жидкости

$$(4)\quad (U-c)(\varphi''-\alpha^2\varphi)-U''\varphi=\frac{(U')^{n-3}}{i\alpha\,\mathrm{Re}}\{(U')^2n(\varphi^{\mathrm{IV}}-2\alpha^2\varphi''+ +\alpha^4\varphi)+(n-1)\{2nU'U''\varphi'''+[4\alpha^2(U')^2+nU'U'''+n(n-2)(U'')^2]\varphi''+ +2(n-2)\alpha^2U'U''\varphi'+n\alpha^2[U'U'''+(n-2)(U'')^2]\varphi\}\}.$$

При $n=1$ уравнение переходит в обычное уравнение Орра — Зоммерфельда для ньютоновской жидкости. Обобщенное число Рейнольдса для случая пограничного слоя запишется в виде

$$\mathrm{Re}=\rho U_0^{2-n}\delta^n/k,$$

где U_0 — скорость набегающего потока; δ — толщина слоя.

Граничные условия имеют вид

$$(5)\quad \varphi(0)=\varphi'(0)=0,\qquad \varphi(\infty)=\varphi'(\infty)=0.$$

При решении задачи (4), (5) на собственные значения используются преобразования [1], предложенные для обычного уравнения Орра — Зоммерфельда.

Определим функции $D_i (i=1-6)$ следующими соотношениями:

$$D_1=\begin{vmatrix}\varphi_1&\varphi_2\\ \varphi_1'&\varphi_2'\end{vmatrix},\quad D_2=\begin{vmatrix}\varphi_1'&\varphi_2'\\ \varphi_1''&\varphi_2''\end{vmatrix},\quad D_3=\begin{vmatrix}\varphi_1''&\varphi_2''\\ \varphi_1'''&\varphi_2'''\end{vmatrix},$$

$$D_4=\begin{vmatrix}\varphi_1&\varphi_2\\ \varphi_1'''&\varphi_2'''\end{vmatrix},\quad D_5=\begin{vmatrix}\varphi_1'&\varphi_2'\\ \varphi_1'''&\varphi_2'''\end{vmatrix},\quad D_6=\begin{vmatrix}\varphi_1&\varphi_2\\ \varphi_1''&\varphi_2''\end{vmatrix},$$

где φ_1, φ_2 — два частных решения (4), удовлетворяющих условиям (5). Тогда уравнение (4) можно свести к системе шести обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$D_1'=D_6\quad D_4'=D_5+AD_4+GD_1+BD_6,$$

$$D_2'=D_5,\quad D_5'=D_3+AD_5+BD_2-ED_1,$$

$$D_3'=AD_3-GD_2-ED_6,\qquad D_6'=D_2+D_4,$$

где

$$A=2(1-n)U''(U')^{-1};$$

$$B=(1-n)\left[\frac{4\alpha^2}{n}+(n-2)(U'')^2(U')^{-2}+U'''(U')^{-1}\right]+2\alpha^2+$$

$$+\frac{i\alpha}{n}\operatorname{Re}(U-c)(U')^{1-n};$$

$$G=\frac{2}{n}(1-n)(n-2)\alpha^2U''(U')^{-1};$$

$$E=(1-n)\alpha^2[U'''(U')^{-1}+(n-2)(U'')^2(U')^{-2}]-\alpha^4-$$

$$-\frac{i\alpha}{n}\operatorname{Re}(U')^{1-n}[(U-c)\alpha^2+U''].$$

Для отыскания собственных значений получается простое условие $D_1(0)=0$. Проводя нормировку $Z_i=D_i/D_6$ и исключая Z_5 с помощью интеграла системы $Z_5=Z_1Z_3+Z_2Z_6$, имеем окончательно

$$\begin{aligned} Z_1' &= 1-Z_1(Z_2+Z_4),\\ Z_2' &= Z_1Z_3-Z_2^2,\\ Z_3' &= AZ_3-GZ_2-E-Z_3(Z_2+Z_4),\\ Z_4' &= B+GZ_1+AZ_4+Z_1Z_3-Z_4^2. \end{aligned} \tag{6}$$

Ввиду отсутствия влияния вязкости, а следовательно, неньютоновских свойств вне пограничного слоя граничные условия из бесконечности (5) могут быть перенесены на внешнюю границу пограничного слоя ($y=1$) обычным образом [4, 6]. Для удобства определения значений $Z_i(1)$ запишем граничные условия в форме $\varphi''(1)+(1+\alpha)\varphi'(1)+\alpha\varphi(1)=0;$

$$\varphi'''(1)+\alpha\varphi''(1)=0.$$

Полагая при $y=1$

$$\varphi_1=1;\ \varphi_1'=-\alpha;\ \varphi_1''=\alpha^2;\ \varphi_1'''=-\alpha^3;$$

$$\varphi_2=0;\ \varphi_2'=1;\ \varphi_2''=-1-\alpha;\ \varphi_2'''=\alpha(1+\alpha),$$

получаем граничные условия для системы (5)

$$Z_1=-\frac{1}{1+\alpha};\ Z_2=-\frac{\alpha}{1+\alpha};\ Z_3=0;\ Z_4=-\alpha. \tag{7}$$

Таким образом, задача свелась к решению системы (6) с граничными условиями (7). Варьированием величин α, Re, c можно добиться выполнения условия $Z_1(0)=0$ и тем самым найти собственные значения.

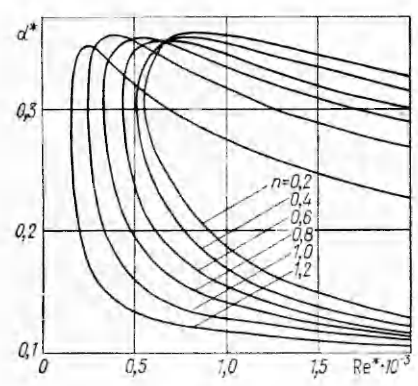
Для определения профиля скорости использовалось автомодельное решение уравнений пограничного слоя степенной жидкости для случая плоского продольного обтекания полубесконечной пластины. Краевая задача для обыкновенного дифференциального уравнения

$$|F''|^{n-1}F'''+FF''=0,$$

$$F(0)=0,\ F'(0)=0,\ F'(\infty)=1$$

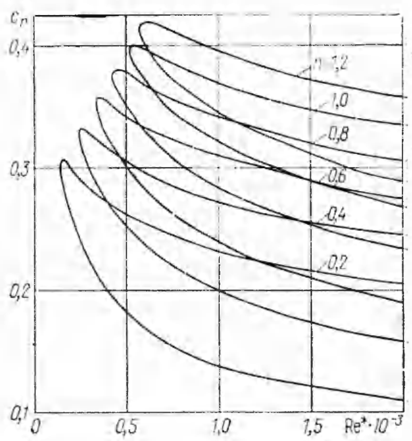
решалась численно с помощью метода группового преобразования, предложенного в работе [8]. Рассчитанные скорости хорошо совпадают с приведенными в [5].

На основе описанной методики были проведены расчеты характеристик устойчивости пограничного слоя степенной жидкости для области

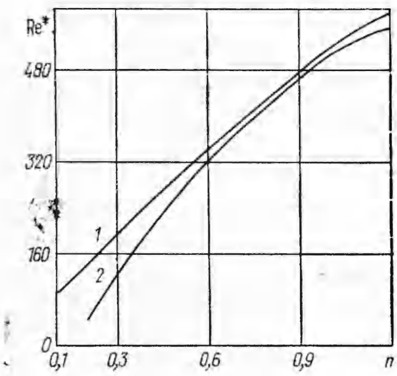


Ф и г. 1

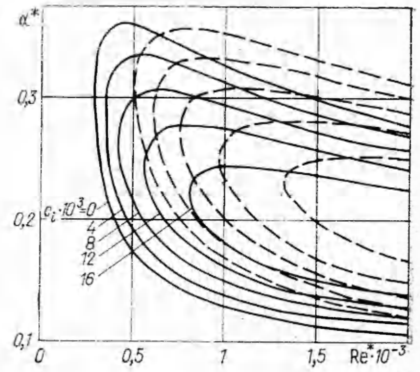
Возрастание параметра n происходит в порядке, обратном указанному, т. е. кривая n=1,2 соответствуетn=0,2 и т. д.



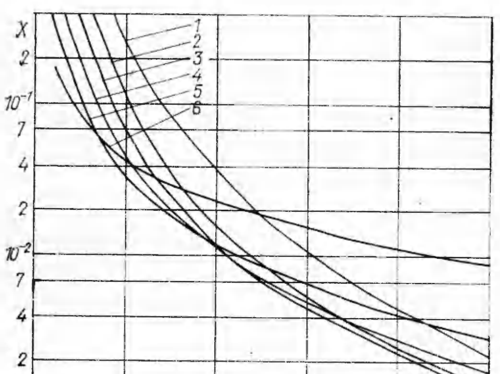
Ф и г. 2



Ф и г. 3



Ф и г. 4



Ф и г. 5

значений показателя неньютоновости $0{,}1 \leqslant n \leqslant 1{,}2$, т. е. в основном для наиболее интересных с практической точки зрения псевдопластичных жидкостей. Кривые нейтральной устойчивости представлены на фиг. 1, 2, ($\alpha^*=\alpha\delta^*/\delta$; $\mathrm{Re}^*=\mathrm{Re}\delta^*/\delta$; δ^* — толщина вытеснения).

Зависимость обобщенного критического числа Рейнольдса Re^* от параметра n приведена на фиг. 3 (кривая *1*), где монотонно возрастающий характер этой функции сохраняется и при переходе через $n=1$. Таким образом, результаты качественно согласуются с данными работы [3], полученными асимптотическим методом (кривая *2*). Количественно хорошее совпадение наблюдается при $0{,}6 \leqslant n \leqslant 1$. В области же малых n прослеживается весьма существенное расхождение кривых. На фиг. 4 приводятся кривые равного нарастания возмущений, рассчитанные для пограничного слоя степенной жидкости при $n=0{,}5$ (сплошные линии) и ньютоновской жидкости (штриховые линии) для одинаковых значений c_i.

Номер кривой фиг. 5	C	n	k
1	0,6	0,506	0,736
2	0,3	0,546	0,307
3	0,2	0,579	0,173
4	0,1	0,666	0,051
5	0,05	0,789	0,010
6	0	1	0,001

На основании полученных результатов с использованием данных работы [9] был проведен расчет значений координаты точки потери устойчивости течения в пограничном слое в зависимости от скорости набегающего потока U_0 для водных растворов высокомолекулярного полимера ЕТ-597. Построенное для разных концентраций семейство кривых (фиг. 5) позволяет провести наглядное сравнение устойчивости пограничного слоя неньютоновской степенной и ньютоновской жидкостей. Значения концентрации C в процентах, показателя неньютоновости n, коэффициента консистенции $k\,[\mathrm{Hc}^n/\mathrm{м}^2]$ для соответствующих кривых на фиг. 5 представлены в таблице. При $C=0$, $n=1$ вместо k приводится значение вязкости чистой воды при 20°С. На фиг. 5 видно, что, несмотря на общую тенденцию уменьшения устойчивости с ростом неньютоновских свойств, для малых значений U_0 имеется область, где рассчитанные точки потери устойчивости для растворов полимера расположены ниже по потоку по сравнению с чистой водой. Полученные результаты позволяют сделать вывод, что неньютоновская вязкость растворов высокополимеров при течении в пограничном слое оказывает дестабилизирующее влияние.

Поступила 29 XI 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. **Желтухин Н. А., Заметалин В. В., Терехова Н. М.** Гидродинамическая устойчивость пограничных слоев с массообменом.— «Изв. АН СССР. МЖГ», 1974, № 3.
2. **Макаров А. М., Мартинсон Л. К., Павлов К. Б.** Устойчивость плоского течения неньютоновской жидкости со степенным реологическим законом.— «Инж.-физ. журн.», 1969, т. 16, № 5.
3. **Скрипачев В. В.** Устойчивость пограничного слоя степенной неньютоновской жидкости.— «Изв. АН СССР. МЖГ», 1968, № 6.
4. **Амфилохиев В. Б., Войткунская А. Я., Иванов И. В.** Устойчивость ламинарного течения степенной неньютоновской жидкости в пограничном слое плоской пластины.— В кн.: Бионика. Вып. 6. Киев, «Наукова думка», 1972.
5. **Шульман А. М., Берковский Б. М.** Пограничный слой неньютоновских жидкостей. Минск, «Наука и техника», 1969.
6. **Линь Цзя-цзяо.** Теория гидродинамической устойчивости. М., ИЛ, 1958.
7. **Листров А. Т.** Об устойчивости параллельных течений неньютоновских сред.— «Докл. АН СССР», 1965, т. 164, № 5.
8. **Бубнов В. А.** О некоторых краевых задачах теории пограничного слоя в степенных жидкостях.— В кн.: Тепло- и массоперенос. Т. 3. Минск, «Наука и техника», 1968.
9. **Monti R.** Heat transfer in drag-reducing solutions.— In: Progress in heat and mass transfer. Vol. V. Oxford a. o., Pergamon press, 1972.