

## К УЧЕТУ ОБЪЕМНОЙ РЕЛАКСАЦИИ МЕТОДОМ ВНУТРЕННЕГО ТРЕНИЯ

С. И. Мешков, Г. Н. Пачевская

(Воронеж)

В настоящее время для твердых тел нет надежных экспериментальных данных по релаксационным спектрам, обусловленным чисто объемными деформациями. Это связано с тем, что непосредственное измерение основных релаксационных характеристик (частоты и дефекта модуля) связано с большими экспериментальными трудностями. Поэтому вопрос о существовании объемной релаксации не окончательно выяснен несмотря на то, что в литературе имеются многочисленные указания на наличие второй, или объемной вязкости [1-3].

Для исследования релаксационных процессов с большой эффективностью применяется метод внутреннего трения, который для сдвиговых деформаций (метод крутильного маятника) позволяет с каждым релаксационным процессом сопоставить ту или иную реологическую модель и физический механизм [4]. Поскольку выявить объемную релаксацию в чистом виде затруднительно, то представляет интерес учесть ее влияние на сдвиговую релаксацию на примере продольных колебаний образца.

Известно, что релаксационный спектр в ряде случаев можно описать в наследственной теории упругости при помощи дробно-экспоненциальных ядер, предложенных Ю. Н. Работновым [5]. Тогда тензор напряжений  $\sigma_{ik}$  однородного изотропного твердого тела, в пренебрежении тепловой релаксацией, запишем в виде

$$\begin{aligned} \sigma_{ik} = & K_{\infty} \delta_{ik} \varepsilon_{ll} - \Delta K \delta_{ik} \int_{-\infty}^t \varepsilon_{ll}(t') \mathcal{D}_{\gamma_2}(t-t', \tau_{\varepsilon 2}) dt' + \\ & + 2\mu_{\infty} e_{ik} - 2\Delta\mu \int_{-\infty}^t e_{ik}(t') \mathcal{D}_{\gamma_1}(t-t', \tau_{\varepsilon 1}) dt' \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $e_{ik}$  — девиатор тензора деформаций;  $\delta_{ik}$  — символ Кронекера;  $\Delta K = K_{\infty} - K_0$  и  $\Delta\mu = \mu_{\infty} - \mu_0$  — разности между нерелаксированным и релаксированным значениями объемного и сдвигового модулей соответственно;  $\mathcal{D}_{\gamma}$  — дробно-экспоненциальное ядро релаксации Ю. Н. Работнова

$$\mathcal{D}_{\gamma}(t, \tau) = \frac{1}{\tau^{\gamma}} \left( \frac{t}{\tau} \right)^{\gamma-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (t/\tau)^{\gamma n}}{\Gamma[\gamma(n+1)]} \quad (0 < \gamma \leq 1) \quad (2)$$

Индекс 1 относится к сдвиговой релаксации, индекс 2 — к объемной.

Применение выражения (1) к крутильным колебаниям малой амплитуды, когда выполняется гипотеза плоских сечений, позволяет объяснить размытие одного релаксационного пика внутреннего трения [6]. Влияние объемной релаксации можно проследить на примере стационарных продольных колебаний образца, материал которого задан выражением (1). Для этой цели удобно переписать выражение (1) в пространстве изображений по Лапласу [9]

$$\sigma_{ik}^{**} = K^* \varepsilon_{ik}^{**} + 2\mu^* e_{ik}^{**} \quad (3)$$

Здесь одной звездочкой обозначена трансформанта одностороннего, а двумя — двухстороннего преобразования Лапласа. Таким образом, в пространстве изображений по Лапласу исходное соотношение между тензорами напряжений и деформаций соответствует упругой задаче с той лишь разницей, что упругие модули зависят от параметра  $p$

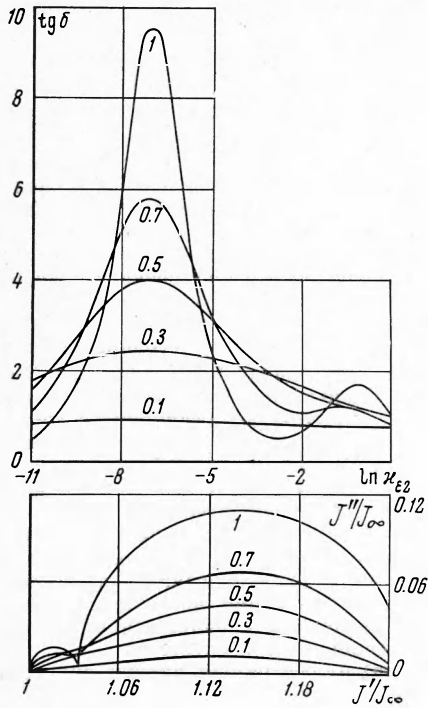
$$K^* = K_{\infty} - \Delta K [1 + (p\tau_{\varepsilon 2})^{\gamma_2}]^{-1} \quad (4)$$

$$\mu^* = \mu_{\infty} - \Delta\mu [1 + (p\tau_{\varepsilon 1})^{\gamma_1}]^{-1} \quad (5)$$

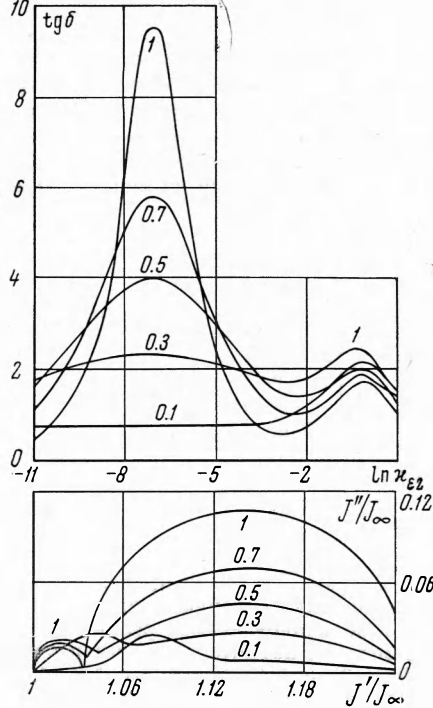
Дальнейшие рассуждения о продольном растяжении стержня соответствуют вполне упругой задаче [7], что позволяет получить в пространстве изображений следующие значения для податливости и коэффициента Пуассона:

$$J^*(p) = \frac{1}{3} \left( \frac{1}{\mu^*} + \frac{1}{3K^*} \right), \quad \nu^*(p) = \frac{1}{2} \frac{3K^* - 2\mu^*}{3K^* + \mu^*} \quad (6)$$

Осуществляя в формулах (6) переход в пространство изображений Фурье  $\rho \rightarrow i\omega$ , получим следующие комплексные выражения для величины податливости и коэф-



Фиг. 1



Фиг. 2

фициента Пуассона при стационарных периодических испытаниях

$$J(\omega) = J'(\omega) - iJ''(\omega), \quad v(\omega) = v'(\omega) - iv''(\omega) \quad (7)$$

Здесь (8)

$$J' = 1/3 J_\infty [2(1 + v_\infty) L_1 + (1 - 2v_\infty) L_2], \quad J'' = 1/3 J_\infty [2(1 + v_\infty) M_1 + (1 - 2v_\infty) M_2]$$

$$L_j = \frac{\kappa_{\sigma j}^{\gamma_j} + \kappa_{\varepsilon j}^{-\gamma_j} + [1 + (\kappa_{\sigma j} / \kappa_{\varepsilon j})^{\gamma_j}] \cos \psi_j}{\kappa_{\sigma j}^{\gamma_j} + \kappa_{\sigma j}^{-\gamma_j} + 2 \cos \psi_j}, \quad M_j = \frac{[(\kappa_{\sigma j} / \kappa_{\varepsilon j})^{\gamma_j} - 1] \sin \psi_j}{\kappa_{\sigma j}^{\gamma_j} + \kappa_{\sigma j}^{-\gamma_j} + 2 \cos \psi_j} \quad (9)$$

$$\kappa_{\sigma j} = \omega \tau_{\sigma j}, \quad \kappa_{\varepsilon j} = \omega \tau_{\varepsilon j}, \quad \psi_j = 1/2 \gamma_j \pi \quad (j = 1, 2)$$

Здесь  $J_\infty$  и  $v_\infty$  — нерелаксированные значения податливости и коэффициента Пуассона.

Для действительной части коэффициента Пуассона имеем

$$v' = 0.5 (a_2 b_1 - \xi_1 c - 2 \xi_1 \xi_2 a_1 b_2) (a_2 b_1 + 2 \xi_1 c + \xi_1 \xi_2 a_1 b_2)^{-1} \quad (10)$$

$$a_j = \kappa_{\sigma j}^{\gamma_j} + \kappa_{\sigma j}^{-\gamma_j} + 2 \cos \psi_j, \quad b_j = \kappa_{\varepsilon j}^{\gamma_j} + \kappa_{\varepsilon j}^{-\gamma_j} + 2 \cos \psi_j$$

$$c = \{\kappa_{\varepsilon 2}^{\gamma_2} + [1 + (\kappa_{\varepsilon 2} / \kappa_{\sigma 2})^{\gamma_2}] \cos \psi_2 + \kappa_{\sigma 2}^{-\gamma_2}\} \{\kappa_{\varepsilon 1}^{\gamma_1} + [1 + (\kappa_{\varepsilon 1} / \kappa_{\sigma 1})^{\gamma_1}] \cos \psi_1 + \kappa_{\sigma 1}^{-\gamma_1}\} + [1 - (\kappa_{\varepsilon 2} / \kappa_{\sigma 2})^{\gamma_2}] [1 - (\kappa_{\varepsilon 1} / \kappa_{\sigma 1})^{\gamma_1}] \sin \psi_1 \sin \psi_2 \quad (11)$$

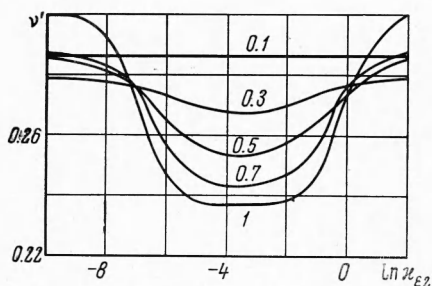
Здесь использованы соотношения

$$\mu_0 / \mu_\infty = (\tau_{\varepsilon 1} / \tau_{\sigma 1})^{\gamma_1}, \quad K_0 / K_\infty = (\tau_{\varepsilon 2} / \tau_{\sigma 2})^{\gamma_2}, \quad \xi_1 = \mu_\infty / 3K_0, \quad \xi_2 = \mu_0 / 3K_\infty$$

Внутреннее трение, за меру которого принимается тангенс угла сдвига фаз между напряжением и деформацией, определяется из формулы (8)

$$\operatorname{tg} \delta = J''/J' \quad (12)$$

Для выяснения принципиальной возможности появления релаксационного пика за счет объемной деформации рассмотрим численный пример:  $\nu_\infty = 0.3$ ,  $\mu_0/\mu_\infty = K_0/K_\infty = 0.8$ ,  $\tau_{\varepsilon_1}/\tau_{\varepsilon_2} = 10^3$ ,  $\omega = 1$ . На фиг. 1, а и б, в функции  $\ln \kappa_{\varepsilon_2} \sim T^{-1}$  приведены тангенс угла механических потерь и фазовая диаграмма для податливости  $J'' = f(J')$  соответственно. В качестве параметра взята величина  $\gamma = \gamma_1 = \gamma_2$ , значения которой указаны цифрами на кривых. Предельное значение  $\gamma = 1$  означает, что сдвиг



Фиг. 3

и объемная релаксации описываются моделями стандартного линейного тела и приводят к отчетливому разделению двух пиков. При одинаковой степени релаксации объемного и сдвигового модулей вклад их в суммарный эффект, определяемый коэффициентом Пуассона  $\nu_\infty$ , неодинаков: сдвиговый пик примерно в 5.5 раза больше объемного. Уменьшение параметра  $\gamma$  соответствует размытию релаксационного спектра [6]. В результате различие между пиками исчезает. Значение  $\gamma = 0.5$ , которое соответствует ядру релаксации, выраженному через интеграл вероятностей, можно считать в данном случае нижней границей объемного эффекта, т. е. для всех  $\gamma < 0.5$

объемная релаксация не проявляется, несмотря на ее существование. Таким образом, возможность наблюдения объемной релаксации связана не только с относительной величиной времен релаксаций сдвиговых и объемных напряжений [6], но и с параметром, характеризующим размытие релаксационного спектра. Фиг. 2, а, б (аналогичные фиг. 1 зависимости) иллюстрирует другую ситуацию, когда параметры размытия сдвигового и объемного пиков неодинаковы  $\gamma_1 \neq \gamma_2$ . Здесь принято  $\gamma_2 = 1$ , т. е. объемная релаксация подчиняется модели стандартного линейного тела, а значения  $\gamma_1$ , характеризующие размытие сдвигового пика, указаны цифрами на кривых. Размытие может быть настолько большим, что приводит к исчезновению сдвигового пика, например для  $\gamma_1 = 0.1$ .

Наконец, фиг. 3 показывает, что эффект объемной релаксации хорошо заметен на поведении динамического коэффициента Пуассона  $\nu'$ . Построенные кривые при  $\gamma = \gamma_1 = \gamma_2$  показывают, что объемная релаксация снижает  $\nu'$ , а сдвиговая восстанавливает его до первоначального нерелаксированного значения  $\nu_\infty$ . С увеличением  $\gamma$  эффект увеличивается и для  $\gamma = 1$  достигает наибольшего значения.

В предельном случае  $\tau_{\varepsilon_2} \rightarrow \infty$ , когда существует лишь сдвиговая релаксация, последняя увеличивает коэффициент Пуассона от  $\nu_\infty$  до значения, определяемого степенью релаксации модуля сдвига.

Так как  $\ln \kappa_{\varepsilon_2} \sim T^{-1}$ , то изучение температурной зависимости динамического коэффициента Пуассона различных материалов — наиболее удобный способ выявления объемной релаксации.

Поступила 1 XI 1966

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Рейнер М. Реология. Физматгиз, 1965, стр. 91.
2. Френкель Я. Кинетическая теория жидкостей. Изд-во АН СССР, 1945.
3. Губанов А. И. Механика упруго-вязко-пластических тел. Ж. техн. физ. 1949, т. 19, № 1, стр. 34.
4. Зинер К. Упругость и неупругость металлов. Изд. иностр. лит., 1954.
5. Работнов Ю. Н. Равновесие упругой среды с последствием. ПММ, 1948, т. 12, вып. 1, стр. 53.
6. Мешков С. И., Пачевская Г. Н., Шермергор Т. Д. К описанию внутреннего трения при помощи дробно-экспоненциальных ядер. ПМТФ, 1966, № 3, стр. 103.
7. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория упругости. Физматгиз, 1965, стр. 24.
8. Мешков С. И., Шермергор Т. Д. О высокотемпературном внутреннем трении при продольных колебаниях, ПМТФ, 1963, № 3, стр. 20.
9. Ржаницын А. Р. Некоторые вопросы механики систем, деформирующихся во времени. Гостехиздат, 1949, стр. 181.