

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА УРАВНЕНИЙ И МЕТОД МАЛОГО ПАРАМЕТРА В ДВУМЕРНЫХ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ ИДЕАЛЬНОЙ ПЛАСТИЧНОСТИ

С. Б. Максимов, Ю. В. Немировский

(Красноярск)

Интерес к пространственным двумерным задачам теории идеальной пластичности в значительной степени обусловлен тем, что большинство технологических операций (прокатка, волочение, осадка труб и прутков) сводится к исследованию задач в некоторой пространственной системе координат, когда основные искомые величины зависят от двух координат. Предполагается, что компоненты тензора напряжений σ_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) и вектора скорости v_i зависят от двух переменных q_1, q_2 в криволинейной ортогональной системе координат q_i ($\sigma_{13} = \sigma_{23} = v_3 = 0$). Коэффициенты Ламэ $\bar{\mu}_i^2 =$

$$= \sum_{k=1}^3 \left(\frac{\partial g_k}{\partial x_k} \right)^2 \text{ являются также функциями этих координат } H_i = H_i(q_1, q_2). \text{ Указанный}$$

класс включает в себя осесимметричные задачи (r, z, θ) , задачи в сферической системе координат (r, θ, φ) , задачи для тел, ограниченных координатными поверхностями вырожденных «сплюснутых» и «вытянутых» эллипсоидальных, тороидальных координат, параболоидальных и биполярных координат вращения [1, 2] и многие другие. Наиболее полно исследованы осесимметричные задачи при условии пластичности Треска [3—5] и некоторых специальных режимах. Большинство точных и приближенных решений получено для полной пластичности [6—10], когда задача становится локально статически определимой, а система уравнений в напряжениях и скоростях имеет гиперболический тип.

Интенсивное использование в последнее время анизотропных, порошковых материалов, а также материалов, имеющих различные пределы текучести на растяжение, сжатие, сдвиг, требует выполнения анализа уравнений при более общем условии текучести. Такой анализ позволит не только расширить класс точных аналитических решений, но и разработать единообразный метод получения достаточно надежных приближенных решений, когда построение точных становится невозможным. Цель данной работы — анализ некоторых общих свойств уравнений двумерных пространственных задач теории пластичности и разработка на их основе и на основе экстремальных свойств предельных нагрузок жесткопластических тел единообразного метода решения таких задач.

1. В общем случае двумерных задач теории идеально жесткопластического ортотропного тела (оси координат совпадают с осями ортотропии) предполагается, что в четырехмерном пространстве напряжений существует невогнутая кусочно-гладкая поверхность текучести и справедлив ассоциированный закон пластического течения

$$(1.1) \quad \varepsilon_{ii} = \mu_k \frac{\partial F_k}{\partial \sigma_{ii}}, \quad 2\varepsilon_{12} = \mu_k \frac{\partial F_k}{\partial \sigma_{12}}$$

(по i не суммировать), где

$$\mu_k = 0, \text{ если } F_k < 0 \text{ или } F_k = 0, dF_k < 0, \\ \mu_k > 0, \text{ если } F_k = 0 \text{ и } dF_k = 0;$$

$$(1.2) \quad \varepsilon_{11} = \frac{1}{H_1} v_{1,1} + \frac{v_2}{H_1 H_2} H_{1,2}, \quad \varepsilon_{22} = \frac{1}{H_2} v_{2,2} + \frac{v_1}{H_1 H_2} H_{2,1}, \\ \varepsilon_{33} = \frac{v_1}{H_1 H_3} H_{3,1} + \frac{v_2}{H_2 H_3} H_{3,2}, \quad 2\varepsilon_{12} = \frac{H_2}{H_1} \left(\frac{v_2}{H_2} \right)_{,1} + \frac{H_1}{H_2} \left(\frac{v_1}{H_1} \right)_{,2}.$$

Компоненты тензора напряжений должны удовлетворять уравнениям равновесия

$$(1.3) \quad (H_2 H_3 \sigma_{11})_{,1} + (H_1 H_3 \sigma_{12})_{,2} + \\ + \sigma_{12} H_3 H_{1,2} - \sigma_{22} H_3 H_{2,1} - \sigma_{33} H_2 H_{3,1} = 0, \\ (H_2 H_3 \sigma_{12})_{,1} + (H_1 H_3 \sigma_{22})_{,2} + \sigma_{12} H_3 H_{2,1} - \sigma_{11} H_3 H_{1,2} - \sigma_{33} H_1 H_{3,2} = 0.$$

Для сингулярного режима $F_1 = F_2 = 0$, образованного пересечением двух гладких поверхностей, компоненты тензора напряжений можно выразить через два параметра и задача становится локально статически определимой. Введем обозначения:

$$a_{ijk} = \partial F_k / \partial \sigma_{ij}, \quad \Delta_1 = a_{111}a_{332} - a_{112}a_{331},$$

$$\Delta_2 = a_{221}a_{332} - a_{222}a_{331}, \quad \Delta_3 = a_{121}a_{332} - a_{331}a_{122},$$

$$\Delta_4 = a_{111}a_{122} - a_{112}a_{121}, \quad \Delta_5 = a_{221}a_{122} - a_{222}a_{121}.$$

Используя теорему о неявной функции [11], в зависимости от знака $\Delta = \Delta_3^2 - 4\Delta_1\Delta_2$ определим тип системы уравнений в напряжениях: $\Delta > 0$, $\Delta = 0$, $\Delta < 0$ — соответственно гиперболический, параболический и эллиптический [12].

Аналогично, выражая u_k через скорости деформаций ε_{33} , ε_{12} , из ассоциированного закона (1.1) получим систему уравнений в скоростях:

$$(1.4) \quad \Delta_3 \varepsilon_{11} = 2\Delta_1 \varepsilon_{12} + \Delta_4 \varepsilon_{33}, \quad \Delta_3 \varepsilon_{22} = 2\Delta_2 \varepsilon_{12} + \Delta_5 \varepsilon_{33}.$$

Уравнения характеристик и соотношения на них определяются следующими выражениями:

$$(1.5) \quad \frac{dq_2}{dq_1} = \lambda_m = \frac{H_1}{H_2} \left(\frac{-\Delta_3 \pm \sqrt{\Delta}}{2\Delta_2} \right) \quad (m = 1, 2),$$

$$\begin{aligned} & \Delta_1 H_1 H_2 H_3 d\sigma_{11} - \lambda_m \Delta_2 H_2^2 H_3 d\sigma_{12} + \{[\Delta_1 H_1 (H_2 H_3)_{,1} + \lambda_m \Delta_2 H_2 H_3 H_{1,2}] \sigma_{11} + \\ & + [\Delta_1 (H_1^2 H_3)_{,2} - \lambda_m \Delta_2 (H_2^2 H_3)_{,1}] \sigma_{12} + [\lambda_m \Delta_2 H_{3,2} - \Delta_1 H_{3,1}] H_1 H_2 \sigma_{33} - \\ & - [\Delta_1 H_1 H_2 H_{2,1} + \lambda_m \Delta_2 H_2 (H_1 H_3)_{,2}] \sigma_{22}\} dq_1 = 0, \\ & H_1 dv_1 + \lambda_m H_2 dv_2 + \{H_1 H_{1,2} H_2^{-1} v_2 + (\lambda_m)^2 H_2 H_{2,1} H_1^{-1} v_1 - \\ & - \lambda_m [v_1 H_{1,2} + v_2 H_{2,1}] + [\Delta_4 H_1^2 + \lambda_m^2 \Delta_5 H_1 H_2] \Delta_3^{-1} [v_1 H_{3,1} (H_1 H_3)^{-1} + \\ & + v_2 H_{3,2} (H_2 H_3)^{-1}]\} dq_1 = 0. \end{aligned}$$

Пример сингулярного режима — условие полной пластичности [5]

$$F_1 = (\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2 - 4k^2 = 0, \quad F_2 = \sigma_{33} - (\sigma_{11} + \sigma_{22})/2 \pm k = 0.$$

В этом случае

$$\Delta_1 = -\Delta_2 = 2(\sigma_{11} - \sigma_{22}), \quad \Delta_3 = 8\sigma_{12}, \quad \Delta = 16k^2 > 0,$$

т. е. система уравнений гиперболическая, а характеристики различных семейств ортогональны.

Для несжимаемого материала сингулярный режим всегда приводит к гиперболической системе уравнений, характеристики различных семейств взаимно ортогональны. Действительно, для пластически несжимаемого материала $\partial F_k / \partial \sigma_{ii} = 0$ ($k = 1, 2$) или $a_{33k} = -a_{11k} - a_{22k}$, $\Delta_1 = -\Delta_2$, $\Delta \geq 0$. Если $\Delta > 0$, то $\lambda_1 \lambda_2 = -H_1^2 H_2^{-2}$, т. е. характеристики взаимно ортогональны.

В случае кратных корней $\lambda_1 = \lambda_2$ соотношения на характеристике имеют вид

$$(1.6) \quad \frac{dq_1}{dq_2} = \lambda_1 = -\frac{\Delta_3 H_1}{2\Delta_2 H_2},$$

$$\begin{aligned} & H_2^2 H_3 d\sigma_{12} + [H_2 (H_3 H_1)_{,2} \sigma_{22} - H_2 H_3 H_{1,2} \sigma_{11} + \\ & + \sigma_{12} (H_2^2 H_3)_{,1} - H_1 H_2 H_{3,2} \sigma_{33}] dq_1 = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & H_1 H_2 H_3 d\sigma_{11} + [H_1 (H_2 H_3)_{,1} \sigma_{11} - H_1 H_3 H_{2,1} \sigma_{22} + \\ & + \sigma_{12} (H_1^2 H_3)_{,2} - H_1 H_2 H_{3,1} \sigma_{33}] dq_1 = 0, \end{aligned}$$

$$dv_1 + \{H_{1,2} H_2^{-1} v_2 + H_1 \Delta_4 \Delta_3^{-1} [v_1 H_{3,1} (H_1 H_3)^{-1} + v_2 H_{3,2} (H_2 H_3)^{-1}]\} dq_1 = 0,$$

$$dv_2 + \{H_{2,1} H_1^{-1} v_1 + H_2 \Delta_5 \Delta_3^{-1} [v_1 H_{3,1} (H_1 H_3)^{-1} + v_2 H_{3,2} (H_2 H_3)^{-1}]\} dq_1 = 0.$$

С учетом того, что ребра поверхности текучести можно рассматривать как результат бесконечного многообразия способов аппроксимации исходной поверхности текучести, выполненный анализ может быть полезным для построения неформальных приближенных решений исходной задачи путем перехода от «неудобной» системы к более «удобной». Например, если исходная кусочно-гладкая поверхность текучести приводит к эллиптической системе квазилинейных уравнений, решение которых построить не удастся, то можно свести задачу к двум распавшимся гиперболическим системам путем введения многообразия аппроксимирующих поверхностей текучести, обладающих весьма слабым ограничением: $\Delta > 0$. Учитывая, что в рамках такого многообразия будут содержаться как вписанные, так и описанные поверхности по отношению к исходной поверхности текучести, на этом пути можно построить единообразным путем одновременно верхнюю и нижнюю границы предельных нагрузок.

2. Допустим, что решение задачи регулярным образом зависит от малого параметра δ . Согласно методу возмущений [13], решение ищем в виде ряда по степеням параметра δ :

$$(2.1) \quad \sigma_{ij} = \sum_{n=0}^{\infty} \delta^n \sigma_{ij}^{(n)}, \quad v_i = \sum_{n=0}^{\infty} \delta^n v_i^{(n)}, \quad \mu_k = \sum_{n=0}^{\infty} \delta^n \mu_k^{(n)}.$$

Представляя условия текучести в виде (2.1) и приравнявая в (1.1)–(1.3) выражения при одинаковых степенях параметра, получаем последовательность систем уравнений для приближений. Для сингулярного режима

$$(2.2) \quad F_1 = F_2 = 0$$

тип систем уравнений в точности совпадает с типом системы уравнений нулевого приближения. Для неэллиптической системы уравнений характеристики для любого приближения совпадают с характеристиками нулевого приближения. Действительно, из условия текучести (2.2) и закона (1.1) получаем

$$(2.3) \quad a_{ijk}^{(0)} \sigma_{ij}^{(n)} + f_k^{(n)} = 0 \quad (k = 1, 2);$$

$$(2.4) \quad \varepsilon_{ii}^{(n)} = \mu_k^{(n)} a_{ijk}^{(0)} + f_{ii}^{(n)}, \quad 2\varepsilon_{12}^{(n)} = \mu_k^{(n)} a_{12k}^{(0)} + f_{12}^{(n)}$$

(по i не суммировать). Здесь $f_k^{(n)}, f_{ij}^{(n)}$ зависят от предыдущих приближений и, следовательно, являются известными функциями. Подставляя (2.3) в (1.3), замечаем, что тип найденной системы в точности совпадает с типом системы для нулевого приближения. Система уравнений для скоростей аналогична (1.4). В случае гиперболического типа ($\Delta^{(0)} > 0$) уравнения характеристик совпадают с (1.5), а соотношения на них для любого приближения определяются следующими равенствами:

$$(2.5) \quad \begin{aligned} & \Delta_1^{(0)} H_1 H_2 H_3 d\sigma_{11}^{(n)} - \Delta_2^{(0)} H_2^2 H_3 d\sigma_{12}^{(n)} + \{ [\Delta_1^{(0)} H_1 (H_2 H_3)_{,1} + \\ & + \lambda_m^{(0)} \Delta_2^{(0)} H_2 H_3 H_{1,2}] \sigma_{11}^{(n)} + [\Delta_1^{(0)} (H_2^2 H_3)_{,2} - \lambda_m^{(0)} \Delta_2^{(0)} (H_2^2 H_3)_{,1}] \sigma_{12}^{(n)} - \\ & - [\Delta_1^{(0)} H_1 H_3 H_{2,1} + \lambda_m^{(0)} \Delta_2^{(0)} (H_1 H_3)_{,2}] \sigma_{22}^{(n)} + H_1 H_2 [\lambda_m^{(0)} \Delta_2^{(0)} H_{3,2} - \Delta_1^{(0)} H_{3,1}] \times \\ & \times \sigma_{33}^{(n)} - H_1 H_2 H_3 \Delta_1^{(0)} [(\Delta_2^{(0)} / \Delta_1^{(0)})_{,1} \sigma_{22}^{(n)} + (\Delta_3^{(0)} / \Delta_1^{(0)})_{,1} \sigma_{12}^{(n)} + \\ & + ((a_{332}^{(0)} f_1^{(n)} - a_{231}^{(0)} f_2^{(n)}) / \Delta_1^{(0)})_{,1}] \} dq_1 = 0, \\ & H_1 dv_1^{(n)} + \lambda_m^{(0)} H_2 dv_2^{(n)} + \{ H_1 H_2^{-1} H_{1,2} v_2^{(n)} + (\lambda_m^{(0)})^2 H_2 H_1^{-1} H_{2,1} v_1^{(n)} - \\ & - \lambda_m^{(0)} (v_1^{(n)} H_{1,2} + v_2^{(n)} H_{2,1}) + (\Delta_4^{(0)} H_1^2 - (\lambda_m^{(0)})^2 \Delta_5 H_1 H_2) (v_1^{(n)} H_{3,1} (H_1 H_3)^{-1} + \\ & + v_2^{(n)} H_{3,2} (H_2 H_3)^{-1}) / \Delta_3^{(0)} - f_{11}^{(n)} - \lambda_m^{(0)} H_2 H_1^{-1} f_{12}^{(n)} - (\lambda_m^{(0)})^2 H_2^2 H_1^{-2} f_{22}^{(n)} - \\ & - (\Delta_4^{(0)} + \Delta_5^{(0)} (\lambda_m^{(0)})^2 H_2 H_1^{-1}) f_{33}^{(n)} / \Delta_3^{(0)} \} dq_1 = 0. \end{aligned}$$

Свойство сохранения характеристик может быть эффективно использовано при построении численного алгоритма, так как отпадает необходимость для каждого приближения перестраивать поле характеристик.

Особенно эффективен метод при использовании кусочно-линейной поверхности текучести. В этом случае $a_{ijk}^{(c)} = \text{const}$, $f_k^{(n)} = f_{ij}^{(n)} = 0$, а на известных характеристиках сохраняются выражения, в точности совпадающие с соотношениями для нулевого приближения. В общем случае кусочно-гладких поверхностей и сингулярного режима $f_k^{(n)}, f_{ij}^{(n)} \neq 0$ использование метода затруднено из-за необходимости хранить в машинной памяти все предыдущие приближения. Поэтому возможна следующая процедура. После того как найдено нулевое приближение, а следовательно, построено поле характеристик, с использованием соотношений на них строится поле напряжений и скоростей для первого приближения, затем с учетом первого приближения находится поле напряжений $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(0)} + \delta\sigma_{ij}^{(1)}$ и скоростей $v_i = v_i^{(0)} + \delta v_i^{(1)}$; это поле принимается за исходное нулевое приближение, характеристики подправляются, и процедура продолжается до тех пор, пока не будет достигнута требуемая точность.

3. В общем случае регулярного режима решение задачи значительно усложняется, задача перестает быть локально статически определимой [14, 15]. При исключении некоторых специальных режимов, когда задача становится кинематически определимой, появляется необходимость совместного решения системы в скоростях — напряжениях и полученная система уравнений не имеет (за некоторым исключением) вещественных характеристик [15]. В этом случае для приближенного решения может быть предложен следующий метод. Пусть $F = 0$ — гладкий режим, соответствующий исходной задаче.

Решение будем искать для «фиктивной» задачи, имеющей граничные условия исходной задачи, с поверхностью текучести $F_1 = F_2 = 0$, где $F_k (k = 1, 2)$ обладают свойствами, присущими исходной поверхности: а) F_k гладкие и невогнутые; б) если исходный материал пластически несжимаем, т. е. $\partial F / \partial \sigma_{ii} = 0$, то режимы F_k обладают этим же свойством $\partial F_k / \partial \sigma_{ii} = 0$. Выбираем такие поверхности F_k , что σ_{ij} , удовлетворяющие условию $F_1 = F_2 = 0$, автоматически удовлетворяют уравнению $F = 0$. Это всегда можно сделать, причем бесконечным количеством вариантов. Например, при использовании критерия Мизеса

$$F = (\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{11} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + 6\sigma_{12}^2 - 6k^2 = 0$$

вариантами являются

$$(3.1) \quad F_1^{\alpha_1 \gamma} = \sigma_{33} - \alpha_1 \sigma_{11} - \sigma_{22} (1 - \alpha_1) + \gamma k, \quad F_2^{\alpha_1 \gamma} = 6\sigma_{12}^2 + (\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 \times \\ \times [1 - 2(1 - \alpha_1)^2] - 4(1 - \alpha_1)(\sigma_{11} - \sigma_{22})\gamma k + 2k^2(\gamma^2 - 3).$$

В зависимости от выбора (α_1, γ) получим целый спектр «фиктивных» задач. Полученное для «фиктивной» задачи поле напряжений будет статически допустимым для исходной задачи, так как удовлетворяет по построению граничным условиям для напряжений, уравнениям равновесия и условиям текучести. Поле скоростей для «фиктивной» задачи будет кинематически возможным для исходной задачи, так как удовлетворяет граничным условиям в скоростях, а в случае несжимаемого материала — условию несжимаемости. Поля скоростей, напряжений «фиктивной» задачи удовлетворяют всем условиям, но нарушают ассоциированный закон пластического течения исходной задачи. Используя экстремальные принципы в теории идеально жесткопластического тела [17], получаем возможность построения на их основе нижних и верхних оценок уровня предельных внешних нагрузок. Большой спектр однотипных вариантов позволяет выбрать наилучшую оценку.

Наилучшими вариантами по напряжениям и скоростям будут соответственно дающие максимальную оценку уровня нагрузок по напряжениям и минимальную по скоростям. Возможны случаи, когда наилучшие оценки будут давать решения, которые строятся из комбинации вариантов в различных областях исследуемой задачи, т. е. когда параметры α_1, γ в условиях (3.1) дискретно или непрерывно меняются в различных облас-

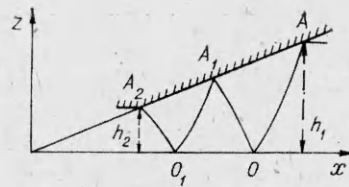
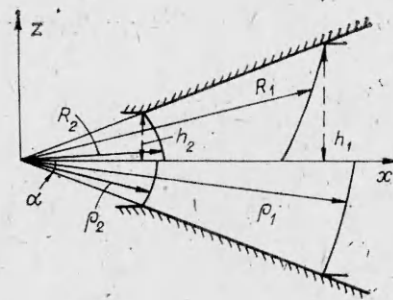


Рис. 2

Рис. 1

тах. В случае несжимаемого тела тип уравнений для «фиктивных» вариантов гиперболический, что позволяет использовать метод характеристик и алгоритмизовать выбор лучших вариантов. При решении «фиктивных» задач может оказаться полезным также применение метода разложения по малому параметру.

Отметим, что при изучении сингулярных режимов требуется, чтобы $\mu_k > 0$, что совпадает с требованием положительности диссипации энергии в пластических областях. При решении «фиктивных» задач условие $\mu_k > 0$ может быть нарушено. Несмотря на это, полученные поля скоростей и напряжений будут статически допустимыми и кинематически возможными для исходной задачи и требование $\mu_k > 0$ может быть отброшено.

Метод построения двусторонних оценок предельных нагрузок получил широкое распространение при анализе технологических задач пластичности [18—20], однако выбор кинематически возможного поля скоростей и статически допустимого поля напряжений в значительной степени обусловлен субъективными качествами исследователя. Здесь как пример, иллюстрирующий предложенный общий подход, рассматривается задача о волочении и прессовании прутков (рис. 1) при условии текучести Мизеса. Считается, что на контакте с матрицей в рассматриваемой сферической системе координат r, θ, φ имеет место закон постоянства трения $\sigma_{12} = \mu k$. Вводится «фиктивная» задача с условием текучести (3.1) при $\gamma = \sqrt{3}(1 - \alpha_1)$, решение ее ищется в виде разложения по малому параметру μ . Тогда в нулевом приближении в коническом участке матрицы предполагается радиальное течение материала

$$v_1^{(0)} = 2V_k h_k^2 r^{-2} (1 - \cos \alpha)^{-1},$$

$$\sigma_{11}^{(0)} = -2\sigma_s \ln r + \text{const}, \quad \sigma_{22}^{(0)} = \sigma_{33}^{(0)} = \sigma_{11}^{(0)} - \sigma_s, \quad \sigma_{12}^{(0)} = 0, \quad \sigma_s = \sqrt{3}k,$$

где V_k ($k = 1, 2$) — скорость на входе и выходе из матрицы. Характеристики системы — логарифмические спирали (рис. 2) $r = \text{const} \exp(\pm \theta)$. В областях AOA_1 , OA_1O_1 , $A_1O_1A_2$ последовательно решаются смешанные краевые задачи с использованием соотношений на характеристиках (2.5). Краевые условия имеют вид $\sigma_{12}^{(n)} = \sigma_{11}^{(n)} = 0$ на OA ; $\sigma_{12}^{(1)} = k$, $\sigma_{12}^{(2)} = 0$ на AA_2 ($n > 1$); $\sigma_{12}^{(3)} = 0$ на OO_1 . Расчет скоростей осуществляется в обратном порядке, при этом на линиях A_2O_1 , A_2A и O_1O задана нормальная компонента вектора скорости. Использование однотипных численных процедур позволяет получить достаточное количество приближений. Для получения приближенной оценки в замкнутом виде в коническом участке матрицы предполагается радиальное течение материала. Тогда с учетом первого приближения

$$(3.2) \quad v_1 = Br^{-2} \left[1 + 4\sqrt{3}\mu \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \ln \cos \frac{\theta}{2} \right],$$

$$\sigma_{11} = A - 2\sigma_s \ln r - \mu \left[k \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \ln r + 6k \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \ln \cos \frac{\theta}{2} \right],$$

$$\sigma_{12} = \mu k \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2},$$

где $A, B = \text{const}$.

Из условия несжимаемости среды следует

$$2 \int_0^{\alpha} r^2 v_1(\theta) \sin \theta d\theta = V_k h_k^2,$$

$$B = V_k h_k^2 \left[2(1 - \cos \alpha) - 8 \sqrt{3} \mu \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \left(\cos^2 \frac{\alpha}{2} \ln \cos \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\alpha}{2} \right) \right]^{-1}.$$

Границы раздела жесткой и пластической областей — поверхности скольжения, которые с учетом первого приближения определяются в области $\theta \geq 0$ (см. рис. 1) в виде

$$r^{-1} \frac{dr}{d\theta} = \operatorname{tg} \varphi_1; \quad -\operatorname{ctg} \varphi_1, \quad \operatorname{ctg} 2\varphi_1 = \frac{\sigma_{22} - \sigma_{11}}{2\sigma_{12}}.$$

Причем со стороны входа

$$(3.3) \quad r = R_1(\theta) = \frac{h_1}{\sin \alpha} \exp(\theta - \alpha) \left[\frac{\cos(\theta/2)}{\sin(\alpha/2)} \right]^{\frac{\mu \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{3}}},$$

со стороны выхода

$$r = R_2(\theta) = h_2 h_1^{-1} \exp 2(\alpha - \theta).$$

Минимальное значение вытяжки $\lambda = h_1 h_2^{-1}$, при котором представленное решение имеет смысл, определяется из условия отсутствия «жесткой пробки» и, согласно (3.3), имеет вид $\lambda_{\min} = \exp 2\alpha$. Интегрируя вдоль соответствующих границ при условии отсутствия противонапряжения (противодавления), находим (с точностью до членов второго порядка малости) нижнюю оценку усилия процесса:

$$P^* \approx 2\pi\sigma_s h_k^2 \left(1 + \frac{\mu}{2\sqrt{3}} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \right) \ln \lambda.$$

Для определения верхней оценки усилия проведем жесткопластические границы таким образом, чтобы на них удовлетворялась непрерывность нормальной компоненты вектора скорости [17]. Это условие выполняется вдоль геометрически подобных границ

$$r = \rho_k(\theta) = \frac{h_k}{\sin \theta} \left[\frac{(1 - \cos \theta) - 8 \sqrt{3} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \left(\cos^2 \frac{\theta}{2} \ln \cos \frac{\theta}{2} + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right)}{(1 - \cos \alpha) - 8 \sqrt{3} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \left(\cos^2 \frac{\alpha}{2} \ln \cos \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\alpha}{2} \right)} \right]^{1/2}.$$

Верхняя оценка усилия определяется из условия [18]

$$P_k^{**} V_k = N_1 + N_2 + N_3,$$

где N_1 , N_2 , N_3 — мощности пластической деформации, сил трения о матрицу, сил среза на поверхностях разрыва скоростей, которые согласно [16—18] имеют вид

$$N_1 = 2\pi k \int_0^{\alpha} r^2 \ln \lambda [12v_1^2 + (v_{1,2})^2]^{1/2} \sin \theta d\theta \approx 2\pi\sigma_s V_k h_k^2 \ln \lambda,$$

$$N_2 = 2\pi\mu k r^2 \sin \alpha \ln \lambda v_1(\alpha) \approx \frac{\pi\mu\sigma_s}{\sqrt{3}} V_k h_k^2 \ln \lambda \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} + \mu^2 \Phi_1(\alpha),$$

$$N_3 = 4\pi k V_1 \int_0^{\alpha} [\rho_1^2 + (\rho_{1,2})^2]^{1/2} \sin^2 \theta d\theta \approx \frac{\pi\sigma_s V_k h_k^2}{\sqrt{3} (1 - \cos \alpha)} \times \\ \times \left(\alpha - 3 \sin \alpha + 4 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right) + \mu \Phi_2(\alpha).$$

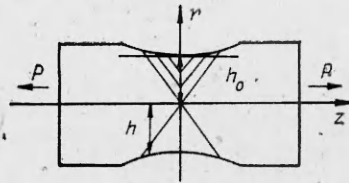


Рис. 3

Замечая, что $\Phi_1(\alpha), \Phi_2(\alpha) < 0$, получаем более низкую, а значит, и более точную верхнюю оценку в сравнении с существующими [16—18]. Учитывая мощность сил трения в калибрующем участке инструмента, окончательно находим приближенную оценку для напряжения волочения:

$$p^* \approx 2\sigma_s \left[1 + \frac{\mu}{2\sqrt{3}} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \right] \ln \lambda,$$

$$p^{**} \approx p^* + \frac{\sigma_s \left[\alpha - 3 \sin \alpha + 4 \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} \right]}{\sqrt{3} (1 - \cos \alpha)} + \mu \Phi_2(\alpha), \quad p = P/(\pi h^2).$$

Таким образом, представленный подход позволяет получить двустороннюю оценку усилий процесса и, следовательно, оценить погрешность в вычислениях. Сравнение нижней и верхней оценок между собой и с известными решениями [18—20] показывает их удовлетворительную точность.

В качестве другого примера построения статически допустимой оценки рассмотрим растяжение стержня кругового сечения, ослабленного осесимметричным вырезом (рис. 3) при условии текучести Мизеса, а в качестве «фиктивных» вариантов — сингулярные режимы (3.1). Считаем, что вырез описывается уравнением

$$(3.4) \quad r = R_0 + R_1(\delta, z), \quad R_1(0, z) = 0.$$

Решение «фиктивной» задачи ищется в виде разложения по малому параметру δ . В силу симметрии при растяжении достаточно исследовать область $r \geq 0$. Учитывая, что

$$\sigma_{11}^{(0)} = \sigma_{12}^{(0)} = \sigma_{33}^{(0)} = 0, \quad \sigma_{22}^{(0)} = \sqrt{3}k,$$

надо положить $\gamma = \sqrt{3}\alpha_1$, что ограничивает количество вариантов «фиктивной» задачи. С учетом того, что $\Delta_1^{(0)} = -\Delta_2^{(0)}, \Delta_3^{(0)} = 0$, уравнения характеристик и соотношения на характеристиках для первого приближения запишем как

$$(3.5) \quad \frac{dz}{dr} = \lambda_m^{(0)} = \pm 1, \quad d\sigma_{11}^{(1)} + \lambda_m^{(0)} (d\sigma_{11}^{(1)} + r^{\pm 1} \sigma_{12}^{(1)} dr) = 0.$$

Граничное условие на невозмущенном контуре для первого приближения имеет вид

$$(3.6) \quad \sigma_{11}^{(1)} = 0, \quad \sigma_{12}^{(1)} = \sigma_{22}^{(0)} \frac{\partial}{\partial \delta} \frac{\partial R_1}{\partial z} \Big|_{\delta=0} \quad \text{при } r = R_0.$$

Решение для первого приближения может быть реализовано численно с использованием конечных разностей. В области $0 \leq r \leq R_0$ решаются задачи Коши с соотношениями на характеристиках (3.5) и начальными условиями (3.6). Заметим, что указанные варианты с учетом первого приближения будут давать одинаковые оценки, чего нельзя сказать при учете следующих приближений.

Рассмотрим задачу о вдавливании кольцевого штампа в полупространство из идеального жесткопластического материала, подчиняющегося условию пластичности Мизеса. Вводя фиктивную задачу в соответствии с (3.1), представим напряжения в параметрическом виде

$$\left. \begin{matrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \end{matrix} \right\} = p \pm BD_1^{-1} \cos 2\varphi \mp \gamma k (1 - \alpha_1) D_1^{-2},$$

$$\sigma_{33} = p - B(1 - 2\alpha_1) D_1^{-1} - 3\gamma k D_1^{-2}, \quad \sigma_{12} = 3^{-1/2} B \sin 2\varphi,$$

$$B = 3^{1/2} k (1 - \gamma^2 D_1^{-2}), \quad p = (\sigma_{11} + \sigma_{22})/2, \quad D_1^2 = 4(1 - \alpha_1 + \alpha_1^2), \quad |\gamma| < D_1.$$

Характеристики и соотношения на характеристиках в цилиндрической системе координат (r, z, θ) :

$$\lambda_{1,2} = (\psi \pm \sqrt{1 + \psi^2}), \quad \psi = \sqrt{3} D_1^{-1} \operatorname{tg} 2\varphi, \\ dp \pm 2 \cdot 3^{-1/2} B \sqrt{1 + \psi^2} \cos 2\varphi d\varphi - [2B (D_1^2 \cos 2\varphi)^{-1} \cos 4\varphi \mp \\ \mp 3^{-1/2} B \sqrt{1 + \psi^2} \sin 2\varphi - 3\gamma k D_1^{-2}] dr = 0.$$

Для получения решения в замкнутом виде воспользуемся методом малого параметра, считая $\varepsilon = 1 - R_1 R_2^{-1} < 1$ (R_1, R_2 — внутренний и наружный радиусы кольцевого штампа). Тогда для первых приближений получим

$$dp^{(0)} \pm 2 \cdot 3^{-1/2} B \sqrt{1 + \psi_0^2} \cos 2\varphi^{(0)} d\varphi^{(0)} = 0, \quad \psi_0 = \sqrt{3} D_1^{-1} \operatorname{tg} 2\varphi^{(0)}, \\ dp^{(1)} \pm 2 \cdot 3^{-1/2} B \sqrt{1 + \psi_0^2} \cos 2\varphi^{(0)} d\varphi^{(1)} \mp \frac{B (D_1^2 - 3) \sin 2\varphi^{(0)}}{\sqrt{3} D_1^2 \sqrt{1 + \psi_0^2}} d\varphi^{(0)} - \\ - \left[\frac{B \cos 4\varphi^{(0)}}{D_1 \cos 2\varphi^{(0)}} \mp \frac{B}{\sqrt{3}} \sqrt{1 + \psi_0^2} \sin 2\varphi^{(0)} - \frac{3\gamma k}{D_1^2} \right] \frac{dr}{(R_2 - R_1)} = 0,$$

граничные условия: $\sigma_{12} = 0, \forall r, z = 0; \sigma_{22} = 0, z = 0, r \leq R_1, r \geq R_2$.
Общее усилие вдавливания определяется выражением

$$P = 2\pi \int_0^{R_2 - R_1} \sigma_{22}(R_1 + q_1) dq_1, \\ \sigma_{22} = p^{(0)} + \frac{(R_2 - R_1)}{R_2} p^{(1)} - \frac{B}{D_1} + \frac{\gamma k (1 - 2\alpha_1)}{D_1^2}.$$

Параметры α_1, γ находим из условия максимума усилия P . В этом случае решение выражается через эллиптические интегралы. Если принять для простоты вычислений $\alpha_1 = 1/2$, то

$$P = \pi \left[\frac{\gamma k (R_2 - R_1)}{3R_2} (10R_2^2 - R_1 R_2 + R_1^2) - \frac{2B (R_2^2 - R_1^2)}{\sqrt{3}} \left(2 + \pi + \frac{R_1}{R_2} \right) \right].$$

Учитывая, что $\frac{dP}{d\gamma} = 0, \frac{d^2 P}{d\gamma^2} < 0$, имеем

$$\gamma = \frac{10R_2^2 - R_1 R_2 + R_1^2}{[(2 + \pi) R_2 + R_1] (R_2 + R_1)}.$$

Для сплошного штампа ($\bar{R}_1 = 0$)

$$\gamma = -1/6, \quad P = -(2 + \pi + 5/9) k\pi R_2 \approx -5,7 k\pi R_2^2.$$

Усилие, найденное численно при условии полной пластичности [6], равно $P = -5,8 k\pi R_2^2$. Таким образом, полученное аналитическое решение дает погрешность, не превышающую 2%. Можно найти и верхнюю оценку усилия, построив поле скоростей v_i с помощью соотношений на характеристиках

$$dv_1 + \lambda_k dv_2 - v_1 [\alpha_1 + (1 + \alpha_1) \lambda_k^2] d \ln r = 0, \quad k = 1, 2.$$

Таким образом, предложены методы решения систем уравнений для пространственных двумерных задач теории идеально жесткопластического тела в случае сингулярных режимов при общей кусочно-гладкой поверхности текучести, а также метод оценки допустимого уровня внешних сил для гладкой поверхности текучести или регулярных режимов, основанный на введении «фиктивной» задачи и экстремальных свойствах множителя уровня внешних сил для идеально жесткопластического тела.

Предлагаемый подход может найти применение при расчетах пространственных конструкций из физически или конструктивно анизотропных, а также порошковых материалов и во многих технологических задачах обработки металлов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Маделунг Э. Математический аппарат физики. — М.: Наука, 1968.
2. Бермант А. Ф. Отображения, криволинейные координаты, преобразования, формулы Грина. — М.: Физматгиз, 1958.
3. Шилд Р. Т. О пластическом течении металлов в условиях осевой симметрии. Сб. пер. Механика, 1958, № 1.
4. Липпман Г. Теория главных траекторий при осесимметричной пластической деформации. Сб. пер. Механика, 1963, № 3.
5. Ивлев Д. Д. Теория идеальной пластичности. — М.: Наука, 1966.
6. Ишлинский А. Ю. Осесимметричная задача и проба Бригелля. — ПММ, 1944, т. 8, вып. 3.
7. Spenser A. J. M. The approximate solution of certain problem of axially symmetric plastic flow. — J. Mech. Phys. Solids, 1964, v. 12, p. 231.
8. Rogozinski M. On Haar — Karman hipotesis. — Arch. Mech. Stos., 1966, v. 18, N 6.
9. Непершин Р. И. О решении кинематически определяемых задач осесимметричного пластического течения. — Машиноведение, 1972, № 2.
10. Сегал В. М. Технологические задачи теории пластичности. — Минск: Наука и техника, 1977.
11. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. — М.: Наука, 1976.
12. Христианович С. А. Механика сплошной среды. — М.: Наука, 1981.
13. Ивлев Д. Д., Ершов Л. В. Метод возмущений в теории упругопластического тела. — М.: Наука, 1978.
14. Хилл Р. Математическая теория пластичности. — М.: Техтеориздат, 1956.
15. Symonds P. S. On the general equations of problems of axial symmetry in the theory of plasticity. — Quart. of appl. mathem., 1949, v. 6, N 4.
16. Cox A. D., Eason G., Hopkins H. G. Axially symmetric plastic deformations in soils. — Philos. Trans. Roy. Soc. London. Ser. A, 1961, v. 254, N 1036.
17. Мосолов П. П., Мясников В. П. Механика жесткопластических сред. — М.: Наука, 1981.
18. Малинин Н. Н. Технологические задачи пластичности и ползучести. — М.: Выш. шк., 1979.
19. Степановский Л. Г. О границах очага пластической деформации при выдавливании. — Вестн. машиностроения, 1963, № 9.
20. Чудаков П. Д., Коробкин В. Д. Усилия волочения редуцирования и выдавливания неупругого материала через коническую матрицу. — В кн.: Разработка и исследование технологических процессов обработки металлов давлением. М.: Металлургия, 1968.

Поступила 11/III 1985 г.

УДК 539.37

ОДИН КЛАСС СЛОЖНЫХ НАГРУЖЕНИЙ НЕУПРУГОЙ СРЕДЫ

А. Ф. Ревуженко

(Новосибирск)

В механике сплошной среды большую роль играют течения, простейшие в определенном смысле. В гидродинамике к таким можно отнести течения Куэтта между параллельными пластинами и коаксиальными цилиндрами [1], в механике твердого тела — деформирование тонкостенных трубчатых образцов [2], в механике сыпучей среды — однородный сдвиг материала [3].

Построение достаточно общих феноменологических моделей предполагает экспериментальное исследование различных путей нагружения, включая сложные, когда оси тензора напряжений относительно материальных объемов поворачиваются. Сложное нагружение металлов, горных пород и других твердых тел можно реализовать путем комбинирования внутреннего давления, кручения и растяжения трубчатых образцов. Однако для широкого класса материалов эта классическая методика либо существенно усложняется (например, для грунтов [4]), либо вообще неприменима.

Представляет интерес поиск класса сложных нагружений, которые, с одной стороны, можно было бы отнести к простейшим, с другой — можно использовать для испытания сыпучих, упруговязкопластических и других подобных материалов.

1. Как известно, однородное напряженно-деформированное состояние простейшее. Пусть в фиксированном направлении среда подвергается однородной деформации растяжения $\Delta \varepsilon_1 = k \Delta t$, а в ортогональном — деформации сжатия так, что объем не меняется: $\Delta \varepsilon_2 = -k \Delta t$. Затем через время Δt такое же однородное деформирование осуществляется в новых фиксированных направлениях, повернутых относительно прежних на угол $-\Omega \Delta t$, и т. д. Деформация плоская, Ω , k — положительные постоянные.