ПМТФ, № 6, 1974

УДК 532.593

ВОЛНОВЫЕ ДВИЖЕНИЯ, ВОЗНИКАЮЩИЕ В СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ЖИДКОСТИ ПРИ ОБТЕКАНИИ ПОГРУЖЕННОГО ТЕЛА

И. В. Стурова

(Новосибирск)

Методом интегральных преобразований в линейной постановке решены плоская и пространственная задачи о волновых движениях, возникающих при обтекании погруженных источника и стока равной мощности равномерным потоком стратифицированной по плотности жидкости.

Методом [1,2] исследуется задача о волновых течениях, вызываемых наличием источника и стока равной мощности m, помещенных под свободной поверхностью в равномерном потоке тяжелой жидкости бесконечной глубины. Жидкость предполагается невязкой, несжимаемой, экспоненциально стратифицированной по плотности. Оси x и z расположены на невозмущенной свободной поверхности так, что направление вектора скорости жидкости далеко вверх по потоку совпадает с направлением оси x, ось y направлена вертикально вверх. В невозмущенном состоянии плотность жидкости ρ_0 является известной функцией и зависит от глубины

(1) $$\rho_0 = \rho_0(0) \exp(-y / L), \quad y \leqslant 0$$

Рассматриваются плоская (источник и сток являются линейными и параллельны оси z) и пространственная (источник и сток точечные) задачи.

Отрезок прямой, соединяющий источник и сток, параллелен оси x, расположен на глубине h от свободной поверхности и имеет длину $2a$. Ось y проходит через его середину.

Как известно (например, [3]), обтекание такой комбинации источника и стока безграничным потоком однородной жидкости эквивалентно обтеканию замкнутого симметричного овала в плоском случае и осесимметричного овала в пространственном случае. Считается, что в первом приближении это справедливо и для данной задачи при достаточно большом погружении и слабой стратификации.

Если заданными величинами являются максимальная полуширина тела R, его удлинение d и скорость основного течения U, то значения $\alpha = a / R$ в плоском и в пространственном случаях можно определить, решая соответственно уравнения

$$\alpha^2 + \alpha / \operatorname{arctg} \alpha = d^2, \quad m = \pi UR / \operatorname{arctg} \alpha$$

$$(d^2 - \alpha^2)^2 = d\sqrt{\alpha^2 + 1}, \quad m = \pi UR^2 \sqrt{\alpha^2 + 1} / \alpha$$

Исследуемая задача стационарная, однако в силу причин, изложенных в [1], возникает необходимость рассматривать ее как нестационарную с начальными данными. При этом предполагается, что источник и сток начинают действовать одновременно в момент времени $t = 0$ и при $t > 0$ их интенсивности постоянны. Решение такой нестационарной задачи в пределе при $t \to \infty$ совпадает с решением исходной стационарной задачи.

Строгого математического доказательства этого факта для данной задачи пока нет и в настоящей работе это утверждение делается из физических соображений.

Уравнения движения для пространственного течения имеют вид

$$\partial u / \partial x + \partial v / \partial y + \partial w / \partial z = mH(t) [\delta(x+a) - \delta(x-a)] \times \delta(y+h)\,\delta(z) \tag{2}$$

$$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{dp}{\partial x}, \quad \frac{dv}{dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} - g$$

$$\frac{dw}{dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}, \quad \frac{d\rho}{dt} = 0, \quad \frac{d}{dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y} + w\frac{\partial}{\partial z}$$

Здесь u, v, w — компоненты вектора скорости в направлении осей x, y, z соответственно, ρ — плотность, p — давление, g — ускорение силы тяжести, δ — дельта-функция Дирака, $H(t)$ — функция Хэвисайда

$$H(t) = \begin{cases} 0, & t \leqslant 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}$$

На свободной поверхности

$$F_0(x, y, z, t) = y - \eta_0(x, z, t) = 0 \tag{3}$$

$$dF_0 / dt = 0, \quad dp / dt = 0$$

Предполагается, что

$$u \to U, \quad v \to 0, \quad w \to 0, \quad \rho \to \rho_0, \quad p \to p_0, \quad x^2 + y^2 + z^2 \to \infty \tag{4}$$

$$p_0 = -g\int_0^y \rho_0(y)\,dy$$

Начальные условия

$$u = U,\ v = 0,\ w = 0,\ \rho = \rho_0,\ p = p_0,\ t \leqslant 0$$

производные u, v, w, ρ, p по времени также равны нулю.

Вводя

$$u = U + u_1,\ v = v_1,\ w = w_1,\ \rho = \rho_0(y) + \rho_1,\ p = p_0(y) + p_1$$

и предполагая, что возмущения, вызываемые наличием особенностей, малы, уравнения (2) и граничные условия (3) можно линеаризовать и свести к одному уравнению для функции v

$$D^2\Delta v + \frac{1}{L}\left[g\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) - D^2\frac{\partial v}{\partial y}\right] = mD^2H(t) \times [\delta(x+a) - \delta(x-a)]\,\delta(z)\left[\delta'(y+h) - \frac{1}{L}\delta(y+h)\right] \tag{5}$$

с граничным условием

$$D^2\frac{\partial v}{\partial y} - g\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) = 0, \quad y = 0 \tag{6}$$

$$D \equiv \frac{\partial}{\partial t} + U\frac{\partial}{\partial x}, \quad \Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

На поверхности равной плотности, определяемой функцией

$$F(x, y, z, t) = y - \eta(x, z, t) = 0$$

состоящей из частиц, имеющих плотность $\rho_0(\bar{y})$, при отсутствии особенностей являющейся горизонтальной плоскостью $y = \bar{y}$, выполняется условие

$$dF / dt = 0, \ F(x, y, z, t) = 0$$

которое после линеаризации, описанной выше, принимает вид

(7) $$D\eta = v, \ y = \bar{y}$$

Приведенные выше уравнения и преобразования справедливы и для плоского течения, если положить $w = 0$, в правых частях уравнений (2), (5) убрать сомножитель $\delta(z)$ и учесть, что все функции не зависят от z. В граничных условиях (4) для плоского случая предполагается ограниченность искомых функций при $x \to \infty$.

Введем безразмерные переменные

(8) $$(x_*, y_*, z_*, h_*, \eta_*, a_*) = \frac{1}{L}(x, y, z, h, \eta, a), \qquad v_* = v/U, \qquad t_* = Ut/L$$

где $Q_* = m / UL^2$ в пространственном случае, $Q_* = m / UL$ в плоском случае. Уравнение (5) и граничное условие (6) в этих переменных примут вид (звездочку снизу в дальнейшем опустим)

$$\bar{D}^2\left(\Delta v - \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \lambda\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) = Q\,\bar{D}^2 H(t) \times$$
$$\times [\delta(x + a) - \delta(x - a)]\,\delta(z)\,[\delta'(y + h) - \delta(y + h)]$$
$$\bar{D}^2 \frac{\partial v}{\partial y} - \lambda\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) = 0, \qquad y = 0$$
$$\lambda = gL / U^2, \ \bar{D} \equiv \partial / \partial x + \partial / \partial t$$

Применяя преобразования Фурье и Лапласа

$$f(\mu, y, \nu, s) = \int\limits_0^\infty e^{-st} dt \int\limits_{-\infty}^\infty e^{-i\mu x} dx \int\limits_{-\infty}^\infty e^{-i\nu z} v(x, y, z, t)\, dz$$

для действительных μ, ν и $\operatorname{Re} s > 0$ (в плоской задаче преобразование Фурье по z отсутствует) и вводя функцию

(9) $$f = Q(\partial / \partial h - 1)\, G$$

получим обыкновенное дифференциальное уравнение

(10) $$G'' - G' - (k^2 - \lambda_1) G = \frac{2i}{s} \sin(\mu a)\, \delta(y + h)$$

с граничными условиями

(11) $$G' - \lambda_1 G = 0, \ y = 0; \ G \to 0, \ y \to -\infty$$
$$k^2 = \nu^2 + \mu^2, \ \lambda_1 = -\lambda k^2 / (s + i\mu)^2$$

Решение уравнения (10) имеет вид

(12) $$G = -\frac{i}{sM} \sin(\mu a) \exp[(y + h)/2] \times$$
$$\times \left\{\exp(-|y + h| M) - \frac{m_2 - \lambda_1}{m_1 - \lambda_1} \exp[(y - h) M]\right\}$$
$$m_{1,2} = {}^1/_2 \pm M, \ M = (k^2 - \lambda_1 + {}^1/_4)^{1/2}$$

В комплексной k-плоскости функция M имеет четыре точки ветвления (k_1, k_2, k_3, k_4). Для малых положительных s

(13) $$k_{1,2} = \pm b + \frac{i\lambda s}{b^2 \sin^3\theta} + O(s^2), \qquad k_{3,4} = \frac{is}{\sin\theta \pm 2\sqrt{\lambda}} + O(s^2)$$
$$b = \sqrt{\lambda / \sin^2\theta - {}^1/_4}, \qquad \mu = k \sin\theta, \qquad \nu = k\cos\theta$$

Отметим, что для условий реального океана практический интерес представляют лишь значения $\lambda > 1$. Разрезы между точками ветвления проведены следующим образом: между k_1 и k_2 в верхней полуплоскости и по мнимой оси от k_3 вверх и от k_4 вниз.

Зная G, из (7) и (9) определим функцию ξ — образ Фурье и Лапласа для функции η

$$\xi = \frac{iQ\sin(\mu a)}{sM(s+i\mu)} \exp[(\bar{y}+h)/2] \times \tag{14}$$
$$\times \left\{\exp(-|\bar{y}+h|\,M)\left[\frac{1}{2} + M\,\mathrm{sign}\,(\bar{y}+h)\right] - m_1 \frac{m_2-\lambda_1}{m_1-\lambda_1} \times\right.$$
$$\left.\times \exp[(\bar{y}-h)\,M]\right\}$$

Кроме четырех точек ветвления M, функция ξ имеет при $\lambda > 1/2$ два простых полюса

$$n_{1,2} = \pm\lambda / \sin^2\theta + 2is / \sin\theta + O(s^2) \tag{15}$$

Для плоского случая в выражениях (10) — (15) следует положить $\nu = 0$, $\theta = \pi / 2$.

Дальнейший анализ трудно вести параллельно для плоского и пространственного случаев, поэтому рассмотрим сначала плоскую задачу (как более простую).

Применяя обратное преобразование Фурье и предельную теорему для преобразования Лапласа, получим

$$\eta(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\mu x} \lim_{s\to 0+} s\xi d\mu = \frac{1}{\pi}\,\mathrm{Re}\int_0^{\infty} e^{i\mu x} \lim_{s\to 0+} s\xi d\mu \tag{16}$$

Здесь последнее равенство следует из симметрии точек ветвления и положения полюсов функции ξ относительно мнимой оси и из того, что функция $\xi(-\mu, s)$ является комплексно-сопряженной функции $\xi(\mu, s)$ при действительном положительном s.

Прежде чем выписать окончательное выражение для функции $\eta(x)$, перейдем к безразмерным переменным

$$(X, Y, \Omega) = \frac{1}{R}(x, \bar{y}, \eta), \qquad q = m/UR, \qquad \varepsilon = \frac{R}{L}, \qquad H = \frac{h}{R} \tag{17}$$
$$\Lambda = gR / U^2, \ \beta = \sqrt{\varepsilon\Lambda - \varepsilon^2 / 4}$$

Здесь x, $\bar{y}$, η, h, — исходные размерные переменные. Выполнив интегрирование в (16) (контур интегрирования аналогичен [1,4]), используя теорему о вычетах и лемму Жордана, получим

$$\Omega = \eta_1 + \eta_2 + \eta_3, \quad X \geqslant 0 \tag{18}$$
$$\Omega = \eta_2, \quad X < 0$$

Здесь

$$\eta_1(X, Y) = -4\gamma\sin(\Lambda X)\left(\Lambda - \frac{\varepsilon}{2}\right)\exp[\Lambda(Y-H) + H\varepsilon]$$
$$\gamma = q\frac{\sin(\Lambda\alpha)}{\Lambda}$$

есть вычет в точке $\mu = \Lambda$, это слагаемое описывает волны с периодом $2\pi / \Lambda$, вызванные наличием свободной поверхности; слагаемое

$$\eta_2(X, Y) = -\frac{1}{\pi}\,\mathrm{Im}\int_0^{\infty} e^{-k|X|} Z(\mu, B, Y)\, dk \tag{19}$$
$$\mu = ik, \quad B = i\sqrt{k^2+\beta^2}$$

возникает в результате интегрирования по мнимой оси, является четной функцией X и существенно в основном вблизи особенностей; и наконец, слагаемое

$$\eta_3(X, Y) = \frac{2}{\pi}\,\mathrm{Im}\int\limits_0^\beta \sin(\mu X)\,Z(\mu, B, Y)\,d\mu, \qquad B = i\sqrt{\beta^2 - \mu^2} \tag{20}$$

которое обусловлено интегрированием вдоль разреза по действительной оси μ, описывает внутренние волны, вызванные наличием экспоненциальной стратификации ($\eta_3 = 0$ при $\varepsilon = 0$). Здесь

$$Z(\mu, B, Y) = \frac{q}{\mu B}\sin(\mu\alpha)\exp[(Y+H)\varepsilon/2]\times$$
$$\times\left\{\exp(-|Y+H|B)\left[\frac{\varepsilon}{2} + B\,\mathrm{sign}(Y+H)\right] - \right.$$
$$\left. - \frac{(\varepsilon/2+B)(\varepsilon/2-B-\Lambda)}{\varepsilon/2+B-\Lambda}\exp[(Y-H)B]\right\}$$

Аналогично из уравнения неразрывности можно определить возмущение продольной скорости

$$u_1 / U = \zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3, \quad X \geqslant 0 \tag{21}$$
$$u_1 / U = \zeta_2, \quad X < 0$$

Здесь

$$\zeta_1(X, Y) = -\Lambda\eta_1(X, Y)$$

а функции $\zeta_2(X,Y)$ и $\zeta_3(X,Y)$ аналогичны выражениям (19) и (20) с ядром

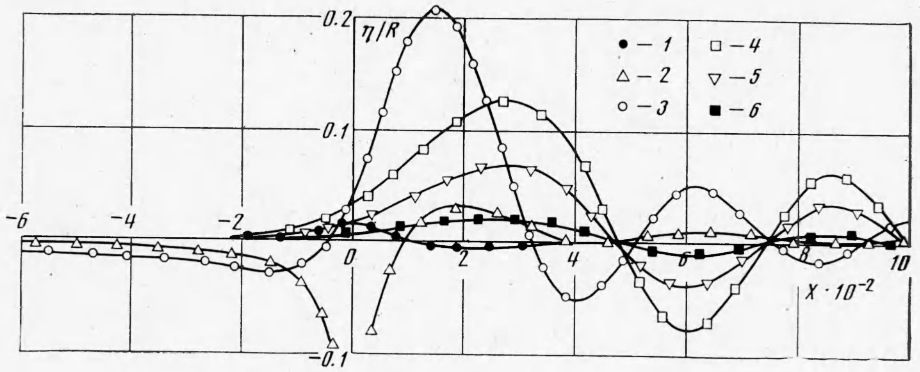
$$\bar{Z}(\mu, B, Y) = -\frac{q}{\mu B}\sin(\mu\alpha)\left(\frac{\varepsilon}{2} + B\right)\exp[(Y+H)\varepsilon/2]\times$$
$$\times\left\{\exp[-|Y+H|B]\left(\frac{\varepsilon}{2} - B\right) - \frac{(\varepsilon/2+B)(\varepsilon/2-B-\Lambda)}{(\varepsilon/2+B-\Lambda)}\times\right.$$
$$\left.\times\exp(Y-H)B\right\}$$

В данной работе исследованы случаи $d = 1, 5, 10$ и в табл. 1 приведены соответствующие значения α, q, γ (значения γ даны $\Lambda = 0{,}5$). При $d = 1$ имеем обтекание окружности радиуса R, в этом случае источник и сток образуют диполь (решение для диполя в потоке стратифицированной жидкости получено в [4]).

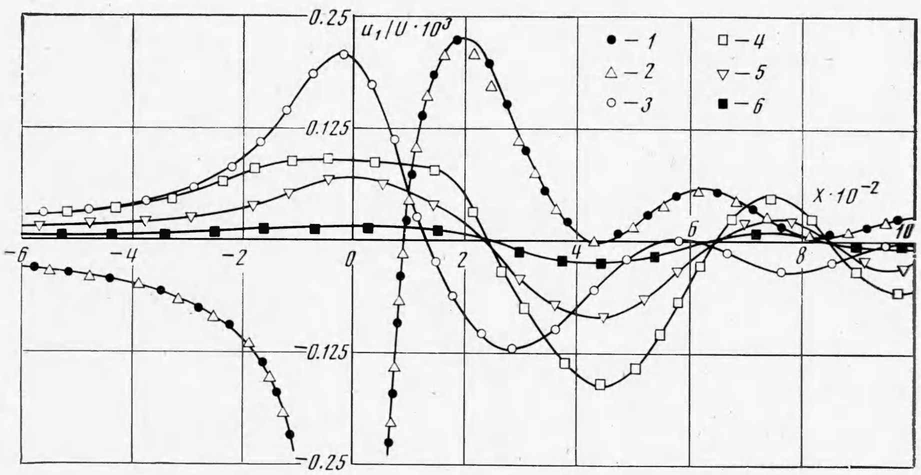
Таблица 1

d	α	q	γ
1	—	—	3.14
5	4.65	2.31	3.38
10	9.67	2.14	—4.25

Как указывалось в [4], поверхностные волны существенны лишь при относительно небольших погружениях, и из табл. 1 видно, что при возрастании удлинения тела амплитуда поверхностных волн увеличивается незначительно. Для исследования поведения внутренних волн выполнено численное интегрирование (18) и (21) на ЭВМ по методу Симпсона при $\Lambda = 0.5$, $H = 20$, $\varepsilon = 5\cdot10^{-4}$ (для данных значений Λ и H волны, вызванные наличием свободной поверхности, пренебрежимо малы). На фиг. 1, 2 кривые *1—4* соответствуют значениям $d = 10$ и $Y = 0$, -16, -160, -576, кривые *5*, *6* — значениям $Y = -576$ и $d = 1, 5$. Интересно отметить, что хотя форма свободной поверхности при наличии внутренних волн меняется мало, возмущения горизонтальной скорости на свободной поверхности максимальны. С глубиной внутренние волны в плоском случае затухают очень медленно. Увеличение удлинения тела при постоянном R



Фиг. 1



Фиг. 2

приводит к возрастанию амплитуды внутренней волны почти пропорционально удлинению и практически не сказывается на фазовой картине.

Выполним теперь исследование пространственной задачи. Возвращаясь к (14) и применяя обратные преобразования Фурье и предельную теорему для преобразования Лапласа, получим

$$\eta(x, z) = \frac{1}{4\pi^2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\mu x} d\mu \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\nu z} d\nu \lim_{s\to 0+} s\xi =$$

$$= \frac{1}{\pi^2} \operatorname{Re} \int\limits_{0}^{\infty} e^{i\mu x} d\mu \int\limits_{0}^{\infty} \cos \nu z d\nu \lim_{s\to 0+} s\xi$$

Здесь последнее равенство следует из того, что подынтегральное выражение является четной функцией по ν и функция $\xi(-\mu, \nu, s)$ — комплексно-сопряженная функция $\xi(-\mu, \nu, s)$ при действительном положительном s.

Выполнив замену переменных

(22) $$\mu = k \sin \theta, \quad \nu = k \cos \theta$$
$$x = r \cos \varphi, \quad z = r \sin \varphi$$

и осуществив предельный переход, получим

$$\eta(r,\varphi)=\frac{Q}{2\pi^2}\exp\left[(\bar y+h)/2\right]\times \tag{23}$$

$$\times\operatorname{Re}\int\limits_0^{\pi/2}d\theta\int\limits_0^{\infty}\Phi(k,\theta)\left[e^{ikr\sin(\theta+\varphi)}+e^{ikr\sin(\theta-\varphi)}\right]dk$$

$$\Phi(k,\theta)=\frac{\sin(ak\sin\theta)}{B\sin\theta}\left\{\exp\left(-\left|\bar y+h\right|B\right)\left[\frac{1}{2}+B\operatorname{sign}(\bar y+h)\right]-\right.$$

$$\left.-\frac{(^1/_2+B)(^1/_2-B-\bar\lambda)}{^1/_2+B-\bar\lambda}\exp\left[(\bar y-h)B\right]\right\}$$

$$B=(k^2-\bar\lambda+{}^1/_4)^{1/2},\qquad \bar\lambda=\lambda/\sin^2\theta$$

Контур интегрирования аналогичен используемому в плоской задаче, он выбирается в первом или четвертом квадранте k-плоскости в зависимости от знака $\sin(\theta+\varphi)$ или $\sin(\theta-\varphi)$ (табл. 2).

Таблица 2

φ	$0<\varphi<\pi/2$		$\pi/2<\varphi<\pi$	
Квадрант	I	IV	I	IV
$e^{ikr\sin(\theta+\varphi)}$	$0<\theta<\pi/2$	—	$0<\theta<\pi-\varphi$	$\pi-\varphi<\theta<\pi/2$
$e^{ikr\sin(\theta+\varphi)}$	$\varphi<\theta<\pi/2$	$0<\theta<\varphi$	—	$0<\theta<\pi/2$

В результате получим следующие интегральные представления для поверхностей равной плотности:

$$\eta(r,\varphi)=\frac{Q}{2\pi^2}\exp\left[(\bar y+h)/2\right]\left\{\int\limits_0^{\pi/2}J_1\sin(\bar\lambda r\sin(\theta+\varphi))\,d\theta+\right. \tag{24}$$

$$+\int\limits_{\varphi}^{\pi/2}J_1\sin(\bar\lambda r\sin(\theta-\varphi))\,d\theta+$$

$$+\int\limits_0^{\pi/2}d\theta\int\limits_0^{\infty}J_2\left[e^{-kr\sin(\theta+\varphi)}+e^{-kr\sin|\theta-\varphi|}\right]dk+$$

$$+\int\limits_0^{\pi/2}d\theta\int\limits_0^{b}J_3\sin(kr\sin(\theta+\varphi))\,dk+$$

$$\left.+\int\limits_{\varphi}^{\pi/2}d\theta\int\limits_0^{b}J_3\sin(kr\sin(\theta-\varphi))\,dk\right\}\qquad 0\leqslant\varphi\leqslant\pi/2\qquad(x\geqslant 0)$$

$$\eta(r,\varphi)=-\frac{Q}{2\pi^2}\exp\left[(\bar y+h)/2\right]\left\{\int\limits_0^{\gamma}J_1\sin(\lambda r\sin(\theta-\gamma))\,d\theta-\right.$$

$$-\int\limits_0^{\pi/2}d\theta\int\limits_0^{\infty}J_2\left[e^{-kr\sin|\theta-\gamma|}+e^{-kr\sin(\theta+\gamma)}\right]dk+$$

$$\left.+\int\limits_0^{\gamma}d\theta\int\limits_0^{b}J_3\sin(kr\sin(\theta-\gamma))\,dk\right\},\quad \pi/2<\varphi\leqslant\pi\quad(x<0),\quad \gamma=\pi-\varphi$$

Здесь

$$J_1=\frac{2\pi}{\sin\theta}\sin(a\bar\lambda\sin\theta)(1-2\bar\lambda)\exp\left[(\bar y-h)(\bar\lambda-{}^1/_2)\right] \tag{25}$$

$$J_2 = \frac{\operatorname{sh}(ak\sin\theta)}{f\sin\theta}\left\{\frac{1}{2}\sin(|\bar{y}+h|f) - f\operatorname{sign}(\bar{y}+h)\cos[(\bar{y}+h)f] + \right.$$

$$+\frac{\sin[(\bar{y}-h)f]}{2(k^2+\bar{\lambda}^2)}(k^2 - 4\bar{\lambda}k^2 - 3\bar{\lambda}^2 + \bar{\lambda}) + f(\bar{\lambda}^2 - k^2 - \bar{\lambda}) \times$$

$$\left.\times\frac{\cos[(\bar{y}-h)f]}{k^2+\lambda^2}\right\}$$

$$J_3 = -\frac{\sin(ak\sin\theta)}{n\sin\theta}\left\{\cos[(\bar{y}+h)n] + 2n\sin[(\bar{y}+h)n] - \right.$$

$$-(\bar{\lambda} - 3\bar{\lambda}^2 - k^2 + 4\bar{\lambda}k^2)\frac{\cos[(\bar{y}-h)n]}{\bar{\lambda}^2-k^2} + 2n(\bar{\lambda}^2 - \bar{\lambda} + k^2)\times$$

$$\left.\times\frac{\sin[(\bar{y}-h)n]}{\bar{\lambda}^2-k^2}\right\}$$

$$f = \sqrt{k^2+b^2}, \qquad n = \sqrt{b^2-k^2}, \qquad b = \sqrt{\bar{\lambda} - {}^1/_4}$$

Однократные интегралы с ядром J_1 описывают волны, вызванные наличием свободной поверхности, их исследование для диполя в однородной жидкости выполнено в [5]. Двойные интегралы с ядром J_2 являются четной функцией по x и быстро убывают с ростом r. Они описывают локальные эффекты в окрестности особенностей. Двойные интегралы с ядром J_3 представляют собой внутренние волны, вызванные наличием плотностной стратификации.

Численный счет двойных интегралов в (24) требует больших затрат машинного времени, поэтому для данной задачи выполнено лишь небольшое число расчетов, в частности для $gh / U^2 = 5$ определена форма свободной поверхности при обтекании диполя потоком однородной жидкости и стратифицированной жидкости при $h / L = 5 \cdot 10^{-3}$. Результаты для обоих случаев совпадают с точностью до погрешности численного счета (относительная погрешность численного интегрирования составляла 0.01) и полученная картина представляет собой обычные корабельные волны. Следовательно, так же как и в плоском случае, наличие слабой стратификации практически не сказывается на форме свободной поверхности (см. также [2,6]).

Рассматриваемую задачу можно значительно упростить, если ограничиться исследованием обтекания глубоко погруженного тела потоком слабо стратифицированной жидкости.

В отличие от (1) распределение плотности по глубине задается в виде

$$\rho_0(y) = \rho_0(-h)\exp[-(y+h)/L]$$

Так как предварительные расчеты для полной задачи (24) показали, что слагаемые, характеризующие внутренние волны, практически не влияют на форму свободной поверхности, а из (25) видно, что при достаточном погружении и слагаемые, описывающие поверхностные волны, будут пренебрежимо малы, то свободную поверхность можно заменить твердой стенкой.

Повторяя анализ, проведенный выше, в безразмерных переменных (8) получим, что решение уравнения (10) с граничными условиями (звездочку снизу, как и выше, опустим)

$$G = 0\begin{cases} y = 0 \\ y \to -\infty \end{cases}$$

имеет вид

$$G = \frac{i}{sM}\sin(\mu a)\, e^{(y+h)/2}\left[e^{(y-h)M} - e^{-|y+h|M}\right]$$

Следовательно

$$\xi = \frac{iQ}{sM\,(s+i\mu)}\sin(\mu a)\, e^{(\bar y+h)/2}\left\{\left[\frac{1}{2}+M\,\mathrm{sign}\,(\bar y+h)\right]e^{-|\bar y+h|M}+\right.$$
$$\left.+\,m_1 e^{(\bar y-h)M}\right\}$$

и в (23)

$$\Phi(k,\theta) = \frac{\sin(ak\sin\theta)}{B\sin\theta}\left\{\exp(-B\,|\,\bar y+h\,|)\times\right.$$
$$\left.\times\left[\frac{1}{2}+B\,\mathrm{sign}\,(\bar y+h)\right]-\left(\frac{1}{2}+B\right)\exp[(\bar y-h)B]\right\}$$

В выражении для $\eta\,(r,\varphi)$ оставим лишь слагаемые, описывающие внутренние волны, так как они представляют основной интерес в данной задаче

$$(26)\qquad \eta(r,\varphi) = \frac{Q}{\pi^2}e^{(\bar y+h)/2}\left\{\int_0^{\pi/2}d\theta\int_0^b J\sin(kr\sin(\theta+\varphi))\,dk+\right.$$
$$\left.+\int_\varphi^{\pi/2}d\theta\int_0^b J\sin(kr\sin(\theta-\varphi))\,dk\right\},\qquad x\geqslant 0$$

$$\eta(r,\varphi) = \frac{Q}{\pi^2}e^{(\bar y+h)/2}\int_0^\gamma d\theta\int_0^b J\sin(kr\sin(\gamma-\theta))\,dk\qquad x<0$$

$$J = -\frac{\sin(ak\sin\theta)}{f\sin\theta}\left\{\frac{1}{2}\cos[(\bar y+h)f]+f\sin[(\bar y+h)f]-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{2}\cos[(\bar y-h)f]+f\sin[(\bar y-h)f]\right\},\qquad f=\sqrt{b^2-k^2}$$

Далее произведем замену переменной $y' = \bar y + h$ и предположим, что глубина погружения тела стремится к бесконечности, тогда в (26)

$$(27)\qquad J = -\frac{\sin(ak\sin\theta)}{f\sin\theta}\left(\frac{1}{2}\cos fy' + f\sin fy'\right)$$

От безразмерных переменных (8) перейдем аналогично (17) к безразмерным переменным, построенным относительно R

$$(28)\qquad y_1 = (\bar y+h)\,/\,R,\ r_1 = r\,/\,R,\ q = m\,/\,UR^2,\ gR^2\,/\,U^2L = S,$$
$$\varepsilon = R\,/\,L$$

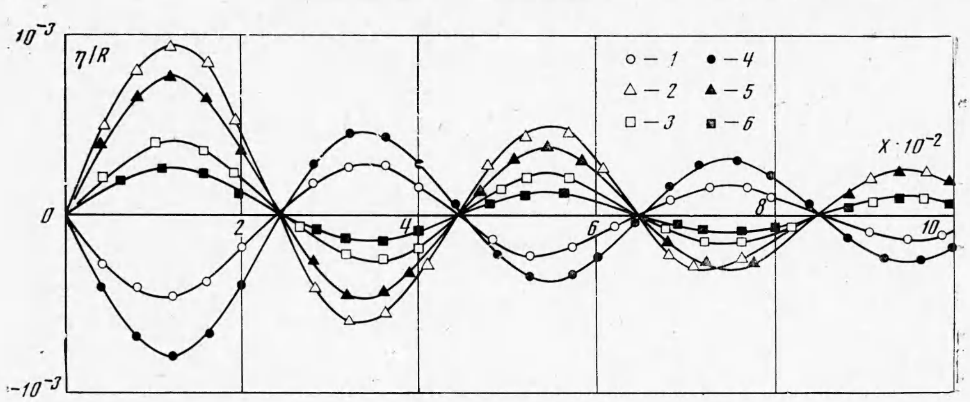
Здесь $\bar y$, $h, r = x\,/\cos\varphi$ — исходные размерные переменные, параметр S обратно пропорционален плотностному числу Фруда. В переменных (28) интегральные выражения (26) с учетом (27) примут вид

$$\frac{\eta}{R} = \frac{q}{\pi^2}e^{\varepsilon y_1/2}\left\{\int_0^{\pi/2}d\theta\int_0^{\bar b}J\sin(kr_1\sin(\theta+\varphi))\,dk+\right.$$
$$\left.+\int_\varphi^{\pi/2}d\theta\int_0^{\bar b}J\sin(kr_1\sin(\theta-\varphi))\,dk\right\},\qquad x\geqslant 0$$

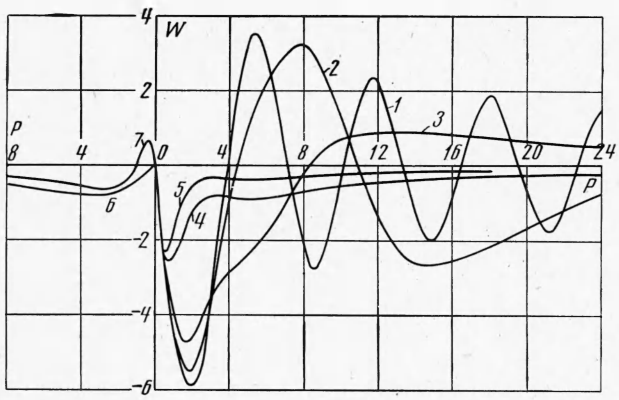
$$\frac{\eta}{R} = \frac{q}{\pi^2}e^{\varepsilon y_1/2}\int_0^\gamma d\theta\int_0^{\bar b}J\sin(kr_1\sin(\gamma-\theta))\,dk,\qquad x<0$$

$$J = -\frac{\sin(\alpha k\sin\theta)}{n\sin\theta}\left[\frac{\varepsilon}{2}\cos(ny_1)+n\sin(ny_1)\right]$$

$$n=\sqrt{\bar b^2-k^2},\qquad \bar b=\sqrt{S/\sin^2\theta-\varepsilon^2/_4}$$



Фиг. 3



Фиг. 4

При $S \gg \varepsilon^2$, что равносильно выполняющемуся в практически интересных случаях условию $gL / U^2 \gg 1$, можно приближенно заменить

$$\bar{b} \approx \sqrt{S} / \sin\theta, \quad J \approx -\sin(\alpha k \sin\theta) \sin(\sqrt{S / \sin^2\theta - k^2 y_1}) / \sin\theta$$

Тогда в переменных

$$P = r_1 \sqrt{S}, \quad Y = y_1 \sqrt{S}$$

получим универсальные выражения

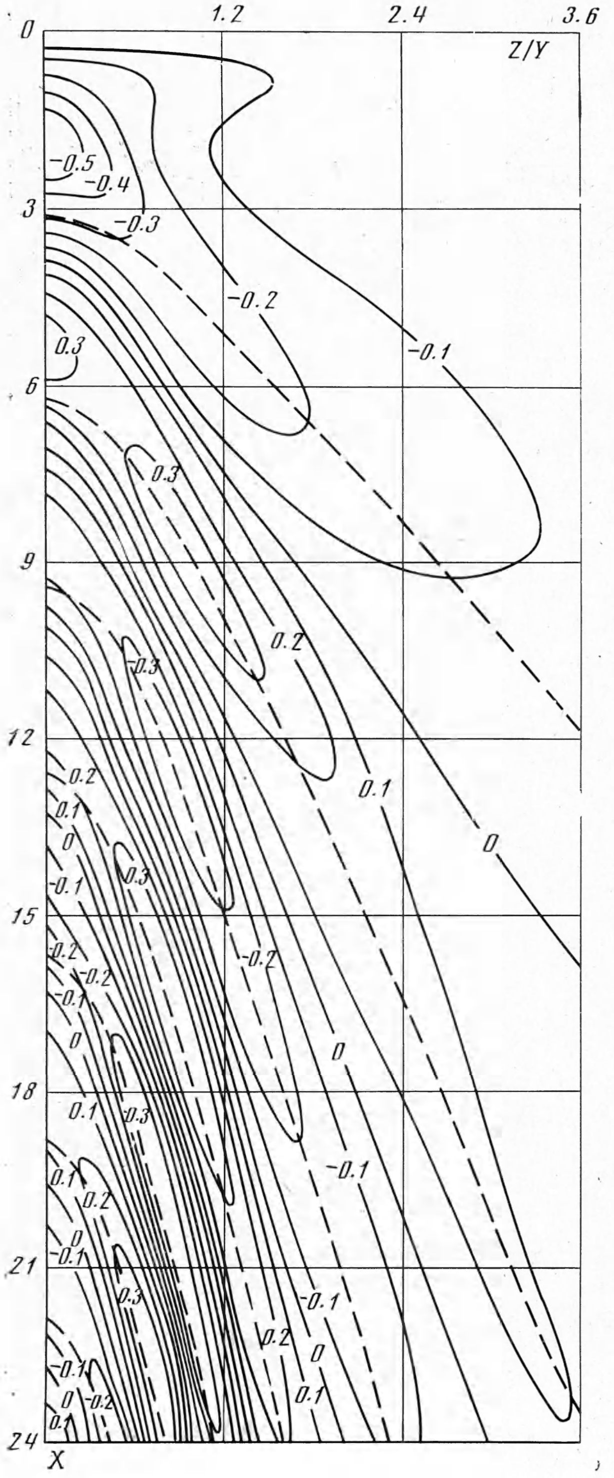
$$W(P, \varphi, Y) = \frac{\eta}{RS\sqrt{\alpha^2+1}} \exp(-\varepsilon Y / 2\sqrt{S}) = \tag{29}$$

$$= \frac{1}{\pi} \left\{ \int\limits_0^{\pi/2} d\theta \int\limits_0^{\pi/2} \bar{J} \sin\left(\frac{\sin t}{\sin\theta} P \sin(\theta + \varphi)\right) dt + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{\varphi}^{\pi/2} d\theta \int\limits_0^{\pi/2} \bar{J} \sin\left(\frac{\sin t}{\sin\theta} P \sin(\theta - \varphi)\right) dt \right\}, \qquad x \geqslant 0$$

$$W(P, \varphi, Y) = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{\gamma} d\theta \int\limits_0^{\pi/2} \bar{J} \sin\left(\frac{\sin t}{\sin\theta} P \sin(\gamma - \theta)\right) dt, \qquad x < 0$$

$$\bar{J} = -\frac{\sin 2t}{2\sin^2\theta} \sin\left(\frac{\cos t}{\sin\theta} Y\right)$$



Фиг. 5

в которых правые части не зависят явно от S. При выводе (29) была использована приближенная зависимость

$$\sin(\alpha\sqrt{S}\sin t)\approx$$
$$\approx\alpha\sqrt{S}\sin t$$

которая справедлива при малых значениях $\alpha\sqrt{S}$.

Сравнение решений полной задачи (24) без учета слагаемого, описывающего локальные эффекты (светлые значки), и упрощенной модели (29) (темные значки) представлено на фиг. 3 для диполя при $gR\,/\,U^2=0.5$, $h\,/\,R=20$, $\varepsilon=5\cdot10^{-4}$, $\varphi=0$, $\bar{y}\,/\,R=$ $=-8$ (кривые *1*, *4*), -32 (кривые *2*, *5*), -56 (кривые *3*, *6*). Фазовые картины в обоих решениях совпадают, а амплитуды несколько отличаются, что особенно заметно при небольших x. Интересно отметить, что толщина слоя жидкости, в котором развиваются внутренние волны, в пространственном случае намного меньше, чем в плоском.

На фиг. 4 представлена функция $W(P,\ \varphi,\ Y)$ для $Y=0.1$, где при $x>0$ кривые *1*—*5* соответствуют значениям $\varphi=0$, 0.5, 1, 3.5° и при $x<0$ кривые 6, 7 — значениям $\gamma=3$, 5°. Видно, что при $x>0$ функция W отлична от 0 лишь в малой окрестности $\varphi=0$. Влияние тела также сказывается и вверх по течению, но в значительно более слабой форме (на фиг. 4 не изображены те кривые при $x<0$, для которых максимум абсолютной величины меньше 5% соответствующего значения при $x>0$). Минимальное значение Y в выполненных расчетах, равнялось 0.005. При $\varphi = 0$ функция W осциллирует по P с амплитудой, пропорциональной $1 / \sqrt{P}$ и длиной волны, равной примерно 2π. В размерных переменных это составляет $2\pi U \sqrt{L / g}$, что обычно очень велико по сравнению с длиной поверхностных волн.

Аналогичный до некоторой степени вывод сделан и в [7], где исследуются внутренние волны, вызванные движущимся источником в стратифицированной жидкости. Однако предположение об осесимметричности следа не подтверждается результатами настоящей работы.

Интересно отметить, что численные расчеты указали на существование для функции W, выполняющейся с точностью до погрешности численного интегрирования, закономерности

$$W(P, \beta\varphi, \beta Y) = \beta^{-1} W(P, \varphi, Y) \tag{30}$$

Таблица 3

d	α	$\sqrt{\alpha^2+1}$
5	4.49	4.60
10	9.50	9.55

где β — произвольная положительная постоянная. Используя (30), даже при ограниченном числе расчетов функции W можно построить картины развития следа в поперечных плоскостях $x = \text{const}$ за телом. Учитывая (30) и тот факт, что весь след развивается в области малых значений угла φ, получим, что при $x = \text{const}$

$$W(\beta Z, \beta Y) = \beta^{-1} W(Z, Y), \; Z = P \sin \varphi$$

откуда автоматически следует, что в плоскости $x = \text{const}$ линии равной фазы являются радиальными прямыми, проходящими через точку $Y = 0$, $Z = 0$. На фиг. 5 показаны результаты для всех исследованных значений $X = P \cos \varphi$ и изображены изолинии функции $W_1 = WY$. Пунктирные кривые на этой фигуре построены по формуле

$$Z / Y = \sqrt{(X / \pi n)^2 - 1}$$

полученной в [8] для положения гребней и впадин волнового поля, возникающего от точечного источника возмущений в плоской задаче для линейно-стратифицированной жидкости ($n = 1$ для первой впадины, $n = 2$ для первого гребня и т. д.).

Увеличение удлинения тела, так же как в плоской задаче, проявляется в возрастании амплитуды внутренних волн пропорционально $\sqrt{\alpha^2 + 1}$, что примерно равно удлинению тела (см. табл. 3).

Автор благодарит Ю. М. Лыткина за полезные обсуждения.

Поступила 22 I 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. *Wu T. Yao Tsu, Mei C. C.* Two-dimensional gravity waves in a stratified ocean. Phys. Fluids, 1967, vol. 10, No. 3.
2. *Mei C. C.* Surface wave pattern due to a submerged source travelling in a stratified ocean. Rept. Hydrodynam. Lab., Mass. Inst. Technol., 1966, No. 92.
3. *Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В.* Теоретическая гидромеханика, ч. 1. М., Физматгиз, 1963.
4. *Стурова И. В.* Плоская задача о волновых движениях, возникающих в стратифицированной жидкости, при обтекании погруженного диполя. В сб. «Динамика сплошной среды», вып. 15. Новосибирск, 1973.
5. *Harelock T. H.* The wave pattern of a doublet in a stream. Proc. Roy. Soc. London, Ser. A., 28, vol. 121, No. 788.
6. *Wu T. Yao Tsu.* Three-dimensional internal gravity waves in a stratified free-surface flow. ZAMM, 1965, Bd 45, Sonderheft.
7. *Keller J. B., Munk W. H.* Internal wave wakes of a body moving in a stratified fluid. Phys. Fluids, 1970, vol. 13, No. 6.
8. *Koh R. C. Y.* Transient motions induced by local disturbances in a linearly density-stratified fluid. J. Hydraulic Res., 1971, vol. 9, No. 3