ПМТФ, № 1, 1975

УДК 533.951.8

# ГИДРОДИНАМИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ПЛОТНОЙ ПЛАЗМЫ В ГОФРИРОВАННОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

*М. Д. Спектор*

*(Новосибирск)*

Рассматривается гидродинамическая устойчивость плазмы в гофрированном магнитном поле. Получен критерий устойчивости желобковых колебаний, справедливый при произвольных $\tilde{\beta}=\frac{8\pi p}{B^2}$. Показано, что в достаточно длинной системе всегда существуют неустойчивые желобковые возмущения с длиной волны, намного превышающей период гофрировки. Для таких наиболее опасных возмущений решены уравнения движения и найдены инкременты неустойчивости в случае идеальной плазмы и с учетом вязкости. Вязкость существенна при больших $\beta$ и может приводить к уменьшению инкрементов в $\sim\sqrt{\beta}$ раз.

**1. Введение.** В [1,2] предложен метод удержания плотной плазмы в гофрированном магнитном поле. Авторы показали, что разлет плазмы в продольном направлении существенно замедляется в условиях, когда длина свободного пробега частиц много меньше длины установки. Если в радиальном направлении плазма удерживается не магнитным полем, а проводящей стенкой, то гофрировка не разрушается, даже когда газокинетическое давление плазмы $p$ много больше давления магнитного поля $\frac{B^2}{8\pi}$.

Возникает вопрос об устойчивости плотной плазмы в такой системе. В настоящей работе эта задача рассматривается в гидродинамическом приближении.

Пусть в цилиндрической системе координат $(r,\theta,z)$ с осью $z$, направленной вдоль оси системы, магнитное поле $\mathbf{B}$ имеет компоненты $B_r$ и $B_z$, которые являются периодическими функциями $z$ с периодом $l$, равным длине одного пробкотрона. Начало отсчета поместим в точку, где поле максимально (в области пробки).

Как известно [3,4], линеаризованные уравнения собственных колебаний идеальной плазмы сводятся к одному дифференциальному уравнению для смещения $\xi$ плазмы из положения равновесия

$$-\omega^2\rho\xi=\nabla(\xi\nabla p+\gamma p\,\mathrm{div}\,\xi)+\frac{1}{4\pi}[\mathrm{rot}\,\mathbf{B},\mathrm{rot}\,[\xi\mathbf{B}]]+\frac{1}{\pi 4}[\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,[\xi\mathbf{B}],\mathbf{B}]\equiv-(\hat{K}\xi). \tag{1.1}$$

Здесь $\omega$ — собственная частота, $\gamma$ — показатель адиабаты, $\rho$, $p$, $\mathbf{B}$ — равновесные значения плотности, давления и магнитного поля. Будем считать, что плазма окружена проводящим кожухом, так что граничные условия для $\xi$ следующие: нормальная компонента смещения равна нулю на боковой поверхности и $\xi_{\parallel}=0$ на торцах.

Невозмущенные значения давления и магнитного поля связаны уравнением равновесия

$$\nabla p = \frac{1}{4\pi}[\operatorname{rot}\mathbf{B}, \mathbf{B}]. \tag{1.2}$$

В силу самосопряженности уравнений (1.1) их можно исследовать энергетическим методом [3,5]. Тогда вопрос об устойчивости сводится к выяснению знака потенциальной энергии $W$ малых колебаний

$$W = \frac{1}{2}\int dV \Big\{ \gamma p(\operatorname{div}\xi)^2 + (\xi\nabla p)\operatorname{div}\xi + \frac{1}{4\pi}(\operatorname{rot}[\xi\mathbf{B}])^2 - \\ - \frac{1}{4\pi}(\operatorname{rot}[\xi\mathbf{B}])[\xi\operatorname{rot}\mathbf{B}]\Big\}. \tag{1.3}$$

Отношение максимального радиуса системы $r_{\max}$ к длине одного пробкотрона $l$ считается малым. Это позволяет найти все величины, характеризующие магнитное поле, и решить уравнения колебаний с помощью разложения по этому малому параметру.

В рассматриваемой системе с большим числом пробкотронов возможны почти желобковые колебания с длиной волны, намного превышающей период гофрировки $l$. Эти колебания могут быть неустойчивы и при выполнении критерия конвективной устойчивости.

Для таких наиболее опасных возмущений (заметим, что они являются мелкомасштабными по азимуту) решены уравнения движения и найдены инкременты неустойчивости в случае идеальной плазмы и с учетом вязкости.

**2. Рассмотрим геометрию гофрированного магнитного поля.** Введем поверхностную систему координат ($\theta$, $\Phi$, $s$) с метрикой

$$(dr)^2 = r^2 d\theta^2 + h_s^2 ds^2 + \frac{d\Phi^2}{(rB)^2},$$

где $\theta$ — азимут, $s$ отсчитывается вдоль магнитного поля, так что элемент длины магнитной силовой линии равен

$$\delta l = h_s ds = \frac{B_r}{B}dr + \frac{B_z}{B}dz, \tag{2.1}$$

причем на оси системы $h_s = 1$, $s = z$; $2\pi\Phi$ — магнитный поток в силовой трубке, ограниченной данной магнитной поверхностью,

$$\Phi = \int_0^r B_z\, r dr. \tag{2.2}$$

Уравнение равновесия (1.2) в переменных $\Phi$, $s$ принимает вид

$$\frac{dp}{d\Phi} = -\frac{1}{4\pi}\frac{B}{h_s}\frac{\partial}{\partial\Phi}(Bh_s)$$

(давление постоянно на магнитной поверхности и зависит только от $\Phi$).

Отметим также равенство, вытекающее из того условия, что $ds$ (2.1) является полным дифференциалом

$$-rB\frac{\partial h_s}{h_s\partial\Phi} = \frac{\partial\alpha}{h_s\partial s} = \varkappa. \tag{2.3}$$

Здесь $\operatorname{tg}\alpha = \frac{B_r}{B_z} = \left(\frac{\partial r}{\partial z}\right)_\Phi$, $\varkappa$ — кривизна (знакопеременная) магнитной силовой линии.

В конкретных расчетах удобнее, однако, использовать вместо переменных $\Phi$, $s$ величины $r_0(\Phi)$ и $z$, где $r_0$ — минимальный радиус данной магнитной поверхности (в области пробки). Первые члены разложения величин $B_z$ и $p$ по степеням $r_0$ имеют вид (при разложении по $r_0$ всюду подразумевается $\frac{r_{\max}}{l} \ll 1$)

$$B_z = \frac{B_0}{f(z)}\left(1 + b(z) r_0^2\right)$$

$$p = p_0 + \frac{B_0^2}{8\pi} a r_0^2,$$

причем $f(0) = \min f = 1$. Если обозначить через $B_m$ магнитное поле в пробке ($z=0$)

$$B_m = B_0\left(1 + b(0) r_0^2\right),$$

то магнитный поток равен

$$\Phi = \int_0^{r_0} B_m(r') r' dr'. \tag{2.4}$$

Сравнение выражений (2.2) и (2.4) позволяет найти первые члены разложения

$$r = \sqrt{f} r_0\left[1 + \frac{b(0) - b}{4} r_0^2\right],$$

тогда

$$B_r = B_z \operatorname{tg}\alpha \approx \frac{1}{2} B_0 r_0 \dot{f} (f)^{-3/2}$$

(точкой обозначена производная по $z$).

Считаются известными магнитное поле на оси системы $\frac{B_0}{f(z)}$ и зависимость давления $p$ от $r_0$. Тогда разложения остальных величин определяется с помощью уравнения равновесия, которое в переменных $r_0$, $z$ приводится к виду

$$\frac{dp}{dr_0} = -\frac{1}{8\pi}\left(\frac{\partial B^2}{\partial r_0}\right)_z + \frac{r_0 B_m}{4\pi r}\left(\frac{\partial B_r}{\partial z}\right)_{r_0}.$$

Подставляя сюда выражения для $r$, $B_z$, $B_r$, $B_m$, найдем

$$b = -\frac{af^2}{2} - \frac{f^2}{4}\left(\frac{\dot{1}}{f}\right)^{\cdot},$$

после чего можно определить остальные величины.

Вычислим еще с необходимой точностью величины, которые потребуются в дальнейшем,

$$U = \int_0^l \frac{h_s ds}{B} = \int_0^l \frac{dz}{B_z(r_0, z)} \approx \frac{1}{B_0}\int_0^l \left[1 - b(z) r_0^2\right] dz = \tag{2.5}$$

$$= \frac{l}{B_0}\left\{\langle f\rangle + \frac{r_0^2}{2}\left[a\langle f^3\rangle + \frac{3}{2}\langle \dot{f}^2\rangle\right]\right\},$$

$$U_1 = \int_0^l \frac{h_s ds}{B^3} \approx \frac{l}{B_0^3}\langle f^3\rangle. \tag{2.6}$$

**3. Рассмотрим устойчивость желобковых колебаний.** Потенциальная энергия колебаний (1. 3) в переменных $\theta$, $s$, $\Phi$ записывается в виде

$$(3.1)\qquad W = \frac{1}{2}\int dV\left\{\gamma p(\operatorname{div}\xi)^2 + \frac{1}{4\pi}\left[\frac{\partial\xi^3}{rh_s\partial s}\right]^2 + \frac{B^2}{4\pi}\left[\frac{r\partial\left(\frac{\xi_\theta}{r}\right)}{h_s\partial s}\right]^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{B^2}{4\pi}\left[\frac{\partial\xi^3}{\partial\Phi} + \frac{4\pi}{B^2}\frac{dp}{d\Phi}\xi^3 + \frac{\partial\xi_\theta}{r\partial\theta}\right]^2 + 2\frac{dp}{d\Phi}\frac{\partial h_s}{h_s\partial\Phi}(\xi^3)^2\right\},$$

где $\xi^3 = rB\xi_\Phi$; $\xi_\Phi$, $\xi_\theta$, $\xi_\parallel$ — смещения соответственно по нормали к магнитной поверхности, по азимуту и вдоль числовой линии невозмущенного магнитного поля.

В подынтегральном выражении для потенциальной энергии дестабилизирующим является только последний член. Если давление плазмы падает наружу $\frac{dp}{d\Phi} < 0$, то, как следует из равенства (2.3), этот член отрицателен в области, где $\frac{\partial\alpha}{h_s\partial s} < 0$, т. е. там, где магнитные силовые линии выпуклы наружу

Таким образом, неустойчивость возникает из-за наличия областей с неблагоприятной кривизной магнитного поля — ситуация, аналогичная случаю резкой границы плазма — магнитное поле (см. [3])

В силу аксиальной симметрии системы выберем зависимость от азимута в виде

$$\xi_\Phi = \xi_\Phi(\Phi,\ s)\cos m\theta,\quad \xi_\theta = \xi_\theta(\Phi, s,)\sin m\theta,\quad \xi_\parallel = \xi_\parallel(\Phi,\ s)\cos m\theta.$$

Ограничимся рассмотрением мелкомасштабных по азимуту собственных колебаний, таких, что $m \to \infty$, но $m\xi_\theta$ — конечно. Как показано в [5], потенциальная энергия $W_1$ для таких возмущений минимальна: в выражении (3.1) третий член обращается в нуль, а сумма первого и четвертого членов как функция $\operatorname{div}\xi_\theta$ имеет минимум

$$(3.2)\qquad W_1 = \frac{\pi}{2}\int\frac{h_s ds d\Phi}{B}\left\{\gamma p\left(1 + \frac{4\pi\gamma p}{B^2}\right)^{-1}\left(\operatorname{div}\xi_\parallel + 2\frac{\partial h_s}{h_s\partial\Phi}\xi^3\right)^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{4\pi}\left[\frac{\partial\xi^3}{rh_s\partial s}\right]^2 + 2\frac{dp}{d\Phi}\frac{\partial h_s}{h_s\partial\Phi}(\xi^3)^2\right\}.$$

«Кинетическая энергия» $Q = \frac{1}{2}\int\rho|\xi|^2 dV$ таких возмущений также минимальна (так как $\xi_\theta \to 0$), и в случае неустойчивости ($W_1 < 0$) они обладают наибольшим инкрементом $\gamma^2 = -\frac{W_1}{Q}$.

Таким образом, колебания с $m \to \infty$ являются наиболее опасными в рассматриваемой системе.

Проводя дальнейшую минимизацию выражения (3.2) по величине $\operatorname{div}\xi_\parallel$ с учетом дополнительного условия $\xi_\parallel = 0$ на торцах, можно получить для желобковых возмущений, постоянных вдоль силовой линии $\frac{\partial\xi^3}{\partial s} = 0$, следующий критерий устойчивости (см. [5])

$$(3.3)\qquad \left(\frac{dU}{dr_0} - 4\pi U_1\frac{dp}{dr_0}\right)\left(\gamma p\frac{dU}{dr_0} + U\frac{dp}{dr_0}\right) > 0.$$

Из формул (2.5), (2.6) для $U$ и $U_1$ найдем с точностью до членов порядка $r_0$

$$\frac{dU}{dr_0} - 4\pi U_1 \frac{dp}{dr_0} = \frac{3lr_0}{2B_0}\langle \dot{f}^2\rangle > 0, \tag{3.4}$$

т. е. первая скобка в выражении (3.3) всегда положительна (учет следующих членов разложения показывает, что величина $\frac{dU}{dr_0} - 4\pi U_1 \frac{dp}{dr_0}$ положительна при перепадах давления, допустимых уравнением равновесия $\left|\frac{\Delta p}{p}\right| \leqslant \frac{1}{\beta}\Big)$. Следовательно, в аксиально-симметричной системе магнитная яма $\left(\frac{dU}{dr_0} < 0\right)$, создаваемая за счет градиента давления, не стабилизирует желобковых возмущений.

С учетом условия (3.4) критерий устойчивости (3.3) принимает вид

$$\gamma p \frac{dU}{dr_0} + U\frac{dp}{dr_0} > 0. \tag{3.5}$$

Подставляя сюда значения всех величин, найденные в п. 2, получим

$$-a < \frac{3}{2}\langle \dot{f}^2\rangle \left(\langle f^3\rangle + \frac{2}{\gamma\beta_0}\langle f\rangle\right)^{-1}$$

или с той же точностью:

$$-\frac{d\ln p}{d\ln r_0} < \frac{3\langle \dot{f}^2\rangle}{\beta_0} r_0^2 \left(\langle f^3\rangle + \frac{2}{\gamma\beta_0}\langle f\rangle\right)^{-1}, \tag{3.6}$$

где $\beta_0 = \frac{8\pi p_0}{B_0^2}$.

В случае больших $\beta$ критерий (3.5) сводится к условию $\frac{dU}{dr_0} > 0$

$$-\frac{d\ln p}{d\ln r_0} < \frac{3\langle \dot{f}^2\rangle}{\langle f^3\rangle}\frac{r_0^2}{\beta_0}. \tag{3.7}$$

Если пробочное отношение $R$ таково, что $R - 1 \sim 1$, то $\langle \dot{f}^2\rangle \sim \frac{1}{l^2}$ и критерий конвективной устойчивости плотной плазмы ($\beta \gg 1$) принимает вид

$$-\frac{d\ln p}{d\ln r_0} < A\frac{1}{\beta}\frac{r_0^2}{l^2},$$

где $A$ — коэффициент порядка единицы.

**4. Неустойчивость длинноволновых возмущений. Стабилизация торцами.** Как уже отмечалось в п. 3, наиболее опасными в рассматриваемой системе являются мелкомасштабные по азимуту колебания, потенциальная энергия которых равна $W_1$ (см. (3. 2)). Для нахождения дисперсионных соотношений обратимся к уравнениям движения, которые для этих колебаний приводятся к виду

$$-\omega^2\rho\xi^3 = \frac{r^2B^3}{4\pi}\frac{\partial}{h_s\partial s}\left(\frac{1}{r^2B}\frac{\partial\xi^3}{h_s\partial s}\right) - 2r^2B^2\frac{\partial h_s}{h_s\partial\Phi}\left[\gamma p\left(\operatorname{div}\xi_\parallel + 2\frac{\partial h_s}{h_s\partial\Phi}\xi^3\right)\left(1 + \frac{4\pi\gamma p}{B^2}\right)^{-1} + \frac{dp}{d\Phi}\xi^3\right] \tag{4.1}$$

$$-\omega^2\rho\xi_\parallel = \frac{\partial}{h_s\partial s}\left[\gamma p\left(\operatorname{div}\xi_\parallel + 2\frac{\partial h_s}{h_s\partial\Phi}\xi^3\right)\left(1 + \frac{4\pi\gamma p}{B^2}\right)^{-1}\right].$$

Возьмем дивергенцию от обеих частей второго уравнения $\left(\operatorname{div} \xi_{\parallel} = \frac{B}{h_s} \cdot \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\xi_{\parallel}}{B}\right)\right)$ и введем вместо функции $\operatorname{div} \xi_{\parallel}$ новую неизвестную

$$y = \frac{4\pi\gamma p}{B^2}\left(\operatorname{div} \xi_{\parallel} + 2\frac{\partial h_s}{h_s \partial \Phi} \xi^3\right)\left(1 + \frac{4\pi\gamma p}{B^2}\right)^{-1}.$$

Кроме того, перейдем от переменных $\Phi$, $s$ к переменным $r_0$, $z$ и воспользуемся равенством (2.3). Тогда уравнения движения (4.1) принимают вид

$$-\omega^2 \frac{4\pi\rho}{B_0^2}\left\{\left(\frac{B_z^2}{4\pi\gamma p} + \frac{B_0^2}{B^2}\right) y + 2\frac{B_z}{rB^2}\frac{\partial \alpha}{\partial z}\xi^3\right\} = B_z \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{B_z}{B^2}\frac{\partial y}{\partial z}\right), \tag{4.2}$$

$$-\omega^2 \frac{4\pi\rho}{B_0^2}\xi^3 = \frac{r^2B^2B_z}{B_0^2}\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{B_z}{r^2B^2}\frac{\partial \xi^3}{\partial z}\right] + 2rB_z\frac{\partial \alpha}{\partial z}\left(y + \frac{4\pi}{B_0^2 B_m}\frac{dp}{r_0 dr_0}\xi^3\right). \tag{4.3}$$

Эта система уравнений для $y$ и $\xi^3$ с периодическими по $z$ коэффициентами. Ее решения поэтому можно искать в виде

$$\xi^3 = A(r_0)B_0 v(r_0, z)e^{ikz}, \quad y = A(r_0)u(r_0, z)e^{ikz},$$

где $u$ и $v$ — периодические функции $z$ с периодом $l$. Система (4.2), (4.3) решается с помощью разложения всех величин по степеням $r_0$ (ограничимся членами второго порядка).

Сравнение в выражении (3.2) для потенциальной энергии положительного второго и дестабилизирующего третьего членов показывает, что волновое число есть величина не ниже первого порядка по $r_0$, а член нулевого порядка в разложении функции $v$ не зависит от $z$ (ведь выбираются колебания, для которых $\xi^3$ почти постоянна вдоль силовой линии). Далее, сравнение в (4.3) левой части и последнего члена в правой части показывает, что квадрат частоты $\omega^2$ есть величина второго порядка малости по $r_0$.

Итак, разложения функций $v$ и $u$ имеют вид

$$v = 1 + v_1 + v_2 + \ldots, \quad u = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots$$

В уравнении (4.2) члены нулевого порядка дают (все величины, характеризующие магнитное поле, были найдены в п. 2)

$$\frac{d}{dz}\left(f\frac{du_0}{dz}\right) = 0$$

и из условия периодичности $u_0 (\langle \dot{u}_0 \rangle = 0)$ следует $u_0 = \mathrm{const}$. Члены первого порядка по $r_0$ имеют вид

$$\frac{d}{dz}\left[f\left(iku_0 + \frac{du_1}{dz}\right)\right] = 0.$$

И снова вследствие периодичности $u_1$ находим

$$\frac{du_1}{dz} = iku_0\left(\frac{1}{f}\left\langle \frac{1}{f}\right\rangle^{-1} - 1\right).$$

Аналогично периодичность функции $u_2$ позволяет найти

$$u_0 = -\frac{3}{2}\frac{\omega^2}{c_A^2}\langle f^2\rangle\left[\frac{\omega^2}{c_A^2}\left\langle f^3 + \frac{2}{\gamma\beta_0}f\right\rangle - \frac{k^2}{\left\langle \frac{1}{f}\right\rangle}\right]^{-1}, \tag{4.4}$$

где $c_A^2 = \frac{B_0^2}{4\pi\rho}$.

В уравнении (4.3) члены первого порядка дают $v_1$=const, члены второго порядка имеют вид

$$-\frac{\omega^2}{c_A^2}\left(-k^2+\frac{d^2v_2}{dz^2}\right)+2\frac{r_0^2}{\sqrt{f}}\frac{d^2}{dz^2}(\sqrt{f})(u_0+a).$$

Подставляя сюда $u_0$ (4.4), умножая обе части на $f^2$ и усредняя по $z$, получим дисперсионное соотношение для собственных колебаний

$$(4.5)\qquad 1=\left(k^2+\frac{3}{2}\langle\dot{f}^2\rangle ar_0^2\right)\left(\frac{\omega^2}{c_A^2}\langle f^2\rangle\right)^{-1}+\frac{9}{4}\langle\dot{f}^2\rangle\frac{r_0^2}{\langle f^2\rangle}\left[\frac{\omega^2}{c_A^2}\left\langle f^3+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{2}{\gamma\beta_0}f\right\rangle+\frac{k^2}{\left\langle\frac{1}{f}\right\rangle}\right]^{-1}.$$

При $k=0$ условие $\omega^2>0$ совпадает с условием (3.7) устойчивости желобковых возмущений. Уравнение (4.5) квадратное относительно величины $\frac{\omega^2}{c_A^2}$ и имеет два положительных корня при условии

$$-\frac{3}{4}\langle\dot{f}^2\rangle\beta_0\frac{d\ln p}{d\ln r_0}<k^2.$$

Таким образом, при растущем наружу давлении плазма устойчива.

Если же давление плазмы падает к периферии, то при

$$(4.6)\qquad k^2<k_0^2\equiv-\frac{3}{4}\langle\dot{f}^2\rangle\beta_0\frac{d\ln p}{d\ln r_0}$$

один из корней уравнения (4. 5) отрицателен, что соответствует неустойчивости.

В системе, ограниченной проводящими торцами, ввиду граничного условия $\xi=0$ на торцах, значения волновых чисел ограничены снизу величиной $k_{\min}\approx\frac{\pi}{Nl}$. Поэтому при выполнении условия

$$(4.7)\qquad -\frac{3}{4}\langle\dot{f}^2\rangle\beta_0\frac{d\ln p}{d\ln r_0}<\left(\frac{\pi}{Nl}\right)^2$$

система будет устойчива (стабилизирующий эффект проводящих торцов см. [4]).

Если плазма устойчива относительно желобковых возмущений, т. е. если выполняется неравенство (3.6), то условие стабилизации торцами имеет вид

$$N\leqslant\frac{\pi}{\langle\dot{f}^2\rangle lr_0}\sim\frac{l}{r_0}\quad\text{при }\beta\gg1,$$
$$N\leqslant\frac{\pi}{\sqrt{\gamma\beta_0}\,lr_0\langle\dot{f}^2\rangle}\sim\frac{1}{\sqrt{\beta_0}}\frac{l}{r_0}\quad\text{при }\beta\ll1.$$

Рассмотрим теперь случай, когда давление падает более круто, чем в (3.6). Максимальное изменение давления в случае больших $\beta$ $\left|\frac{\Delta p}{p}\right|\leqslant\frac{1}{\beta}$, а в случае малых $\beta$ $\left|\frac{\Delta p}{p}\right|\leqslant1$.

Тогда условие (4.7) принимает вид

$$N\leqslant\frac{2}{3}\frac{\pi}{l\langle\dot{f}^2\rangle^{1/2}}\sim1\quad\text{при }\beta\gg1,$$
$$N\leqslant\frac{2\pi}{3l(\beta_0\langle\dot{f}^2\rangle)^{1/2}}\sim\frac{1}{\sqrt{\beta_0}}\quad\text{при }\beta\ll1.$$

Поскольку для продольного удержания плазмы необходимо большое число пробкотронов (см [1,2]), то в плазме высокого давления ($\beta \gg 1$) стабилизация торцами отсутствует.

Вмороженность силовых линий в проводящие торцы является единственным стабилизирующим эффектом. Если условие (4.7) не выполняется, то плазма в гофрированном поле всегда неустойчива при падающем давлении. Инкремент неустойчивости обращается в нуль при $k=k_0$ (4.6) и, если устойчивы желобковые возмущения (3.6), при $k=0$.

Анализ дисперсионного уравнения (4.5) показывает, что при выполнении условия

$$(4.8)\qquad -\frac{d\ln p}{d\ln r_0} < \frac{3}{\beta_0}\langle \dot f^2\rangle r_0^2 \left\langle f^3 + \frac{2}{\gamma\beta_0} f\right\rangle^{-1}\Bigg[1 + \langle \dot f^2\rangle l^2 \left(\left\langle \frac{1}{f}\right\rangle \left\langle f^3 + \frac{2}{\gamma\beta_0} f\right\rangle\right)^{-1}\Bigg],$$

совпадающего по порядку величины с условием (3.7), максимум инкремента достигается при $k_{\text{extr}}$ в промежутке $0 < k_{\text{extr}} < k_0$ (точное выражение для $k_{\text{extr}}$ довольно громоздкое.) Максимальный инкремент при $\beta \gg 1$ равен

$$(4.9)\qquad \gamma = \frac{1}{4}\frac{c_A}{l}\beta_0\left|\frac{d\ln p}{d\ln r_0}\right|\frac{l}{r_0} \leqslant \frac{c_A}{l}\frac{r_0}{l}.$$

Если давление падает более круто, чем в (4.8), то максимальным инкрементом обладают желобковые колебания с $k=0$ (или для конечной системы с $k_{\min} \approx \frac{\pi}{Nl}$)

$$\gamma(k=0,\ \beta \gg 1) = \frac{1}{2}\frac{c_A}{l}\left[\frac{3l^2\langle \dot f^2\rangle}{\langle f^2\rangle}\left(\beta_0\left|\frac{d\ln p}{d\ln r_0}\right| - \frac{3l^2\langle \dot f^2\rangle}{\langle f^3\rangle}\right)\right]^{1/2}.$$

Если градиент давления существенно больше критического (4.8), то максимальный инкремент равен

$$(4.10)\qquad \gamma \approx \frac{c_A}{l}\left(\beta\left|\frac{d\ln p}{d\ln r_0}\right|\right)^{1/2} \leqslant \frac{c_A}{l}.$$

5. **Рассмотрим влияние сил вязкого трения на колебания плазмы высокого давления** ($\beta \gg 1$). Считая плазму замагниченной, учтем в уравнениях движения только продольную ионную вязкость. Тогда уравнение колебаний (1.1) примет вид

$$(5.1)\qquad -\omega^2\rho\xi_\alpha + \frac{\partial\pi_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} = -(\hat K\xi)_\alpha,$$

где тензор вязких натяжений равен [6] $\pi_{\alpha\beta} = 3i\omega\eta_0\left(h_\alpha h_\beta - \frac{1}{3}\delta_{\alpha\beta}\right)\times \left(\mathbf{h}(\mathbf{h}\nabla)\xi - \frac{1}{3}\operatorname{div}\xi\right)$. Здесь $\mathbf{h}$ — единичный вектор в направлении магнитного поля, $\eta_0 = \frac{p}{\nu_i}$ — коэффициент вязкости ионов, $\nu_i$ — ионная частота кулоновских столкновений.

Предположим далее, что инерционными членами по сравнению с вязкими можно пренебречь. Это справедливо при условии

$$|\gamma_\nu| \ll |\gamma_i|,$$

где $\gamma_i$ — инкремент неустойчивости для идеальной плазмы, а $\gamma_\nu$— инкремент, вычисленный в пренебрежении инерционными членами.

Умножив обе части уравнения (5.1) скалярно на $\xi$ и проинтегрировав по объему, получим

$$(5.2)\qquad \frac{3}{2} i\omega \int \eta_0 \left(\frac{d\xi_\parallel}{h_s\partial s} + \frac{\partial h_s}{h_s\partial\Phi}\xi^3 - \frac{1}{3}\operatorname{div}\xi\right)^2 dV = W,$$

где $W$ (см. (1.3)) — потенциальная энергия колебаний. Из равенства (5.2) следует, что все выводы об устойчивости, сделанные выше, справедливы и при учете вязкости. Вязкое трение, если оно существенно, может привести лишь к уменьшению инкремента неустойчивости.

Как и в случае идеальной плазмы максимальным инкрементом обладают колебания с большим азимутальным числом $m\to\infty$. В пределе больших $\beta$ они являются несжимаемыми ($\operatorname{div}\xi=0$). Тогда равенство (5.2) принимает вид

$$(5.3)\qquad \frac{3}{2} i\pi\omega \int \eta_0 \left(\frac{\partial\xi_\parallel}{h_s\partial s} + \frac{\partial h_s}{h_s\partial\Phi}\xi^3\right)^2 \frac{h_s ds d\Phi}{B} = W_1$$

($W_1$ см. (3. 2)), а уравнения колебаний записываются следующим образом:

$$(5.4)\qquad 3i\omega\eta_0 \frac{B}{h_s}\frac{\partial}{\partial s}\left[\frac{1}{B}\left(\frac{\partial\xi_\parallel}{h_s\partial s} + \frac{\partial h_s}{h_s\partial\Phi}\xi^3\right)\right] = \frac{\partial}{h_s\partial S}\left[\frac{B^2}{4\pi}\left(\operatorname{div}\xi_\perp + \frac{2\partial h_s}{h_s\partial\Phi}\xi^3\right)\right],$$

$$3i\omega\eta_0 \frac{\partial h_s}{h_s\partial\Phi}\left(\frac{\partial\xi_\parallel}{h_s\partial s} + \frac{\partial h_s}{h_s\partial\Phi}\xi^3\right) = -\frac{B}{4\pi}\frac{\partial}{h_s\partial s}\left(\frac{1}{r^2B}\frac{\partial\xi^3}{h_s\partial s}\right) + \frac{B^2}{4\pi}\left(\operatorname{div}\xi_\perp + 2\frac{\partial h_s}{h_s\partial\Phi}\xi^3\right) + 2\frac{dp}{d\Phi}\frac{\partial h_s}{h_s\partial\Phi}\xi^3$$

(здесь учтено условие $\beta\gg1$).

Решения снова ищем в классе возмущений, таких, что величина $\xi^3$ почти постоянна вдоль силовой линии

$$\xi^3 = A(r_0)B_0e^{ikz}(1 + v_1 + v_2 + \ldots).$$

Из равенства (5.3) следует, что инкремент $\gamma=-i\omega$ является величиной второго либо нулевого порядка по $r_0$.

В первом случае разложение величины $\xi_\parallel$ начинается с минус первого порядка по $r_0$

$$\xi_\parallel = A(r_0)e^{ikz}(\xi_{-1} + \xi_0 + \ldots).$$

Дисперсионное соотношение получается из уравнений (5.4) аналогично тому, как это было сделано в п. 4

$$(5.5)\qquad \gamma = \frac{2}{3}\frac{\nu_i}{\beta}\frac{\nu_i}{\left\langle\frac{1}{f}\dot f^2\right\rangle}\left(-\frac{3}{4}\langle\dot f^2\rangle\beta_0\frac{d\ln p}{d\ln r_0} - k^2\right)\left[\frac{9}{4}\langle\dot f^2\rangle^2 r_0^2 + \langle f^3\rangle\left(k^2 + \frac{3}{4}\langle\dot f^2\rangle\beta_0\frac{d\ln p}{d\ln r_0}\right)\right]^{-1}.$$

Если выполняется критерий устойчивости желобковых возмущений (3.6), то инкремент (5.5) положителен в интервале волновых чисел

$$0 < k^2 < k_0^2 = -\frac{3}{4}\langle\dot f^2\rangle\beta_0\frac{d\ln p}{d\ln r_0}$$

и достигает максимума

$$(5.6)\qquad \gamma \sim \nu_i \left|\frac{d\ln p}{d\ln r_0}\right| \leqslant \frac{\nu_i}{\beta}\frac{r_0^2}{l^2}.$$

Сравнение «вязкого» инкримента (5.6) с инкрементом (4.9) для идеальной плазмы показывает, что вязкость существенна, если

$$(5.7)\qquad 1 \ll \sqrt{\beta}\,\frac{\lambda}{r_0},$$

где $\lambda$ — длина свободного пробега частиц.

Если условие (3.6) не выполняется, то, как следует из (5.5), неустойчивость развивается при волновых числах

$$\frac{3}{4}\langle \dot{f}^2\rangle\left(-\beta\frac{d\ln p}{d\ln r_0}-\frac{3\langle f^2\rangle r_0^2}{\langle f^3\rangle}\right) = k_1^2 < k^2 < k_0^2.$$

Однако вблизи $k_1$ выражение (5.5) неприменимо (знаменатель обращается в нуль). Последовательный учет следующих членов разложения в уравнениях (5.4) показывает, что при $k=k_1$ инкремент обращается в нуль, а вблизи $k_1$ имеет резкий максимум

$$\gamma \sim \frac{\nu_i}{\beta} k_1 l.$$

При больших градиентах давления

$$\gamma \sim \frac{\nu_i}{\beta}\left(\beta_0\left|\frac{d\ln p}{d\ln r_0}\right|\right)^{1/2} \leqslant \frac{\nu_i}{\beta}.$$

Рассмотрим теперь случай, когда инкремент $\gamma$ является величиной нулевого порядка по $r_0$. Тогда разложение величины $\xi_\parallel$ начинается также с нулевого порядка

$$\xi_\parallel = A(r_0)e^{ikz}(\xi_0+\xi_1+\ldots).$$

При этом система уравнений (5.4) приводится к виду (оставлены только главные члены).

$$(5.8)\qquad \frac{3}{2}\frac{i\omega}{\nu_i}\hat{\beta}_0\frac{1}{f}\frac{d}{dz}\left[f\dot{\xi}_0 - f^{3/2}\frac{d^2}{dz^2}(f^{1/2})\right] = \frac{d}{dz}\left[\frac{1}{f^3}\frac{d}{dz}(f\xi_0) - \right.$$
$$\left. - \frac{2}{f^{3/2}}\frac{d^2}{dz^2}(f^{1/2})\right],$$

$$\frac{3}{2}\frac{i\omega}{\nu_i}\beta_0 f^{3/2}\frac{d^2}{dz^2}(f^{1/2})\left[\dot{\xi}_0 - f^{1/2}\frac{d^2}{dz^2}(f^{1/2})\right] = \frac{1}{r_0^2}(-k^2+\ddot{v}_2) +$$
$$+ f^{3/2}\frac{d^2}{dz^2}(f^{1/2})\left\{\frac{\beta_0}{r_0^2}\frac{d\ln p}{d\ln r_0} + \frac{2}{f^2}\left[\frac{1}{f}\frac{d}{dz}(f\xi_0) - 2f^{1/2}\frac{d^2}{dz^2}(f^{1/2})\right]\right\}.$$

Систему (5.8) можно решить лишь при дополнительном предположении о малости величины $R-1$ (условие слабой гофрировки). Дисперсионное соотношение имеет вид

$$(5.9)\qquad -i\omega = \frac{2}{3}\frac{\nu_i}{\beta_0}\frac{1}{r_0^2\left\langle f^2\left(\frac{d^2 f^{1/2}}{dz^2}\right)^2\right\rangle}\left[-\frac{3}{4}\langle \dot{f}^2\rangle\beta_0\frac{d\ln p}{d\ln r_0} - \right.$$
$$\left. - \frac{9}{4}\langle f^2\rangle^2 r_0^2 - k^2\right].$$

Инкремент (5.9) положителен для волновых чисел

$$k^2 < k_1^2$$

и только при условии, что неустойчивы желобковые возмущения ($k=0$). Они же обладают максимальным инкрементом.

Для больших градиентов давления, существенно превышающих критическое значение (3.7), инкремент неустойчивости равен

$$\gamma \sim \nu_i \frac{l^2}{r_0^2} \left| \frac{d \ln p}{d \ln r_0} \right| \lesssim \frac{\nu_i}{\beta} \frac{l^2}{r_{\max}^2}. \tag{5.10}$$

Сравнение инкремента (5.10) с аналогичным выражением (4.10) для идеальной плазмы показывает, что в этом случае вязкость существенна, если

$$1 \ll \sqrt{\beta} \frac{\lambda r_{\max}^2}{l^3}. \tag{5.11}$$

Таким образом, в плазме высокого давления ($\beta \gg 1$) вязкость может играть значительную роль. Как следует из условий (5.7), (5.11), на границе применимости нашего приближения ($r_{\max} \sim l$) и гидродинамического приближения ($\lambda \sim l$) эффекты вязкого трения приводят к уменьшению инкремента неустойчивости в $\sim \sqrt{\beta}$ раз по сравнению со случаем идеальной плазмы.

Сравнение характерного времени развития неустойчивости $\frac{\Lambda}{\gamma}$ ($\Lambda$ — кулоновский логарифм) с временем продольного расширения плазмы (см. [1, 2]) $\tau_{\|} \sim \frac{N^2}{\nu_i}$ показывает, что при условии $\beta > \frac{N^2}{\Lambda}$ время удержания плазмы определяется последним, а не первым.

В заключение автор благодарит Д. Д. Рютова за постановку задачи и постоянное внимание к работе, В. Д. Шафранова за полезные обсуждения и ряд ценных замечаний.

*Поступила 1 VIII 1974*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Будкер Г. И., Мирнов В. В., Рютов Д. Д.* Влияние гофрировки магнитного поля на расширение и остывание плотной плазмы. Письма в ЖЭТФ, 1971, т. 14, № 5.
2. *Mirnov V. V., Ryutov D. D.* Gasdynamic description of a plasma in a corrugated magnetic field. Nuclear fusion, 1972, vol. 12, № 6.
3. *Кадомцев Б. Б.* Гидродинамическая устойчивость плазмы. В сб. «Вопросы теории плазмы». Вып. 2, М., Атомиздат, 1963.
4. *Михайловский А. Б.* Теория плазменных неустойчивостей, т. 2, М., Атомиздат, 1971.
5. *Bernstein I. B., Frieman E. A., Kruskal M. D., Kulsrud R. M.* An energy principle for hydromagnetic stability problems. Proc. Roy. Soc., 1958, Ser. A, vol. 244.
6. *Брагинский С. И.* Явления переноса в плазме. В сб. «Вопросы теории плазмы», вып. 1, М., Атомиздат, 1963.