

с условиями (1.2), (1.3) при $\Delta \neq 0$ аналогична проведенной в п. 3 для бифуркационного решения. Распределение действительных и комплексных решений (1.5) при $\Delta \neq 0$ такое же, как и при $\Delta = 0$, хотя они не обязательно должны совпадать.

Полагая, что свойства вещества и занимаемая им область заданы, есть смысл рассматривать граничные условия (1.2) и функцию $\varphi_1(x)$ как некоторые инструменты регулирования, позволяющие управлять распределением тепловых состояний среды и их мощностью как аттракторов.

Итак, если исходить из полученных результатов, то наличие множества тепловых состояний стационарных и периодических, в которых может находиться среда, наводит на мысль, что неуправляемые тепловые процессы (взрывы, пожары) при переработке, хранении и накоплении веществ на предприятиях химической, атомной, угольной, нефтегазовой, мукомольной и т. д. промышленности могут происходить не только в результате нарушения нормативов (метрических, массовых, температурных, концентраций), но и на «законном» основании, если эти нормативы разрабатывались без учета всех возможных тепловых состояний.

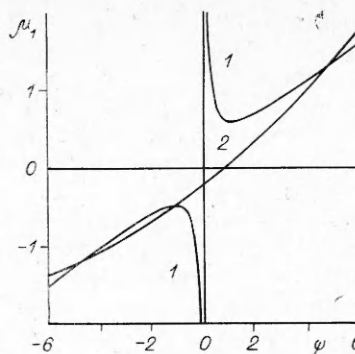


Рис. 5

ЛИТЕРАТУРА

1. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1966.
2. Марсен Дж., Мак-Кракен М. Бифуркация рождения цикла и ее приложения. — М.: Мир, 1980.
3. Йосс Ж., Джозеф Д. Элементарная теория устойчивости и бифуркаций. — М.: Мир, 1983.
4. Джозеф Д. Устойчивость движения жидкости. — М.: Мир, 1981.
5. Боднар Т. А. Тепловая устойчивость плоских, цилиндрических и сферических образцов к-фазы // ФГВ. — 1990. — № 3.
6. Демидович Б. П. Лекции по математической теории устойчивости. — М.: Наука, 1967.
7. Като Т. Теория возмущений линейных операторов. — М.: Мир, 1972.
8. Франк-Каменецкий Д. А. Диффузия и теплопередача в химической кинетике. — М.: Наука, 1967.

г. Бийск

Поступила 29/VIII 1990 г.,
в окончательном варианте — 22/II 1991 г.

УДК 532.536

Ю. И. Бубликов, В. М. Фомичев

О РАЗВИТИИ НАКЛОННЫХ ВОЛН В ПЛОСКОМ ДОЗВУКОВОМ ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ

Для плоского дозвукового ламинарного пограничного слоя традиционно сложилось представление, что необходимо исследовать его устойчивость по отношению к плоским волнам (волнам Толлмина — Шлихтинга), направление распространения которых совпадает с вектором средней скорости (прямые волны) [1]. Это обстоятельство было обусловлено теоремой Сквайра, которая утверждает, что при изучении временной неустойчивости плоскопараллельного течения задача для волны, распространяющейся под углом к направлению основной скорости (наклонная волна), сводится к двумерной задаче с меньшим числом Рейнольдса. Отсюда вытекает, что число Рейнольдса потери устойчивости определяется непосредственно из двумерного анализа [2, 3]. Однако для практических

приложений большое значение имеет знание инкрементов нарастания волн. В частности, широкое распространение получили полуэмпирические методы расчета числа Рейнольдса перехода, которые основаны на определении степени усиления неустойчивых волн [4, 5].

В теории гидродинамической устойчивости и перехода в пограничном слое смысл теоремы Сквайра, как правило, трактуется значительно шире: под числом Рейнольдса подразумевается число Рейнольдса перехода. Также считается, что для фиксированного числа Рейнольдса локальный инкремент нарастания наклонной волны меньше, чем локальный инкремент нарастания прямой волны для этого же числа Рейнольдса, что из данной теоремы не следует.

К тому же утверждение теоремы относительно числа Рейнольдса потери устойчивости даже для плоского несжимаемого ламинарного пограничного слоя в предположении плоскопараллельности верно не всегда, поскольку преобразование, использованное Сквайром, строго справедливо только тогда, когда характеристики среднего течения инвариантны относительно этого преобразования (автомодельные пограничные слои) и когда волновые числа возмущений действительны (временная неустойчивость) либо отношение комплексной составляющей волнового числа наклонной волны в направлении скорости среднего течения и комплексного волнового числа эквивалентной прямой волны действительно (число Рейнольдса эквивалентной волны должно быть действительным). Сказанное существенно ограничивает применимость теоремы Сквайра для пограничных слоев и практически обесценивает ее значение в проблеме определения перехода. Для сжимаемых пограничных слоев непригодность этой теоремы установлена ранее [2].

Цель настоящей работы — показать, что утверждение — наклонные волны «менее опасны» для перехода к турбулентному режиму — ошибочно даже для плоского несжимаемого изотермического пограничного слоя в приближении плоскопараллельности. Иными словами, утверждается, что наклонные волны могут иметь меньшие числа Рейнольдса потери устойчивости, более высокие значения инкрементов нарастания и в итоге — меньшие значения чисел Рейнольдса перехода по сравнению с прямыми волнами.

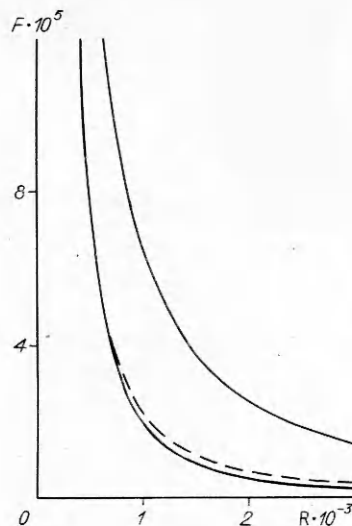
Постановка задачи. Рассматривается плоский дозвуковой ламинарный пограничный слой несжимаемой жидкости на изотермической поверхности. В качестве математической модели взяты уравнения Навье — Стокса и уравнение неразрывности. Исследуется устойчивость этого пограничного слоя по отношению к возмущениям малой амплитуды. Основное течение в приближении плоскопараллельного пограничного слоя характеризуется профилем продольной составляющей вектора скорости $U(x, y)$. Поперечная составляющая вектора скорости принимается равной нулю, а толщина пограничного слоя — постоянной [1, 2]. Для исследования устойчивости необходимо линеаризовать исходные уравнения относительно среднего течения. Решение линеаризованной системы уравнений ищется в виде плоских волн:

$$(u', v', w', p') = (f, \varphi, h, \pi) \exp [i(\alpha x + \beta z - \omega t)].$$

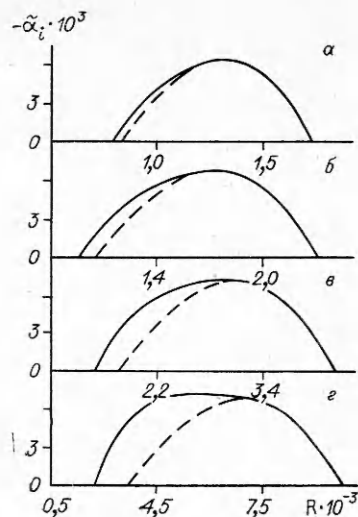
Здесь p', u', v', w' — возмущения давления и компонент вектора скорости; π, f, φ, h — их амплитуды; α, β — волновые числа в x - и z -направлениях; ω — круговая частота; t — время.

Подставляя эти выражения в линеаризованные уравнения, получаем [2]

$$\begin{aligned} (1) \quad & i(\alpha U - \omega)f + U'\varphi = -i\alpha\pi + \frac{1}{R} [f'' - \tilde{\alpha}^2 f], \quad i(\alpha U - \omega)\varphi = \\ & = -\pi' + \frac{1}{R} [\varphi'' - \tilde{\alpha}^2 \varphi], \quad i(\alpha U - \omega)h = -i\beta\pi + \frac{1}{R} [h'' - \tilde{\alpha}^2 h], \quad i(\alpha f + \beta h) + \varphi' = 0. \end{aligned}$$



Р и с. 1



Р и с. 2

Граничные условия:

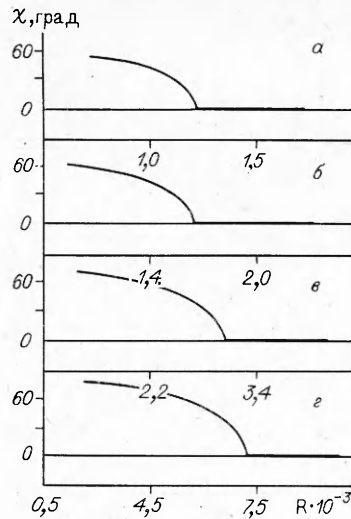
$$(2) \quad \begin{aligned} f = 0, \quad \varphi = 0, \quad h = 0 \quad (y = 0), \\ f \rightarrow 0, \quad \varphi \rightarrow 0, \quad h \rightarrow 0 \quad (y \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

($R = (U_e x / \nu)$ — модифицированное число Рейнольдса, вычисленное по скорости на внешней границе пограничного слоя, $\tilde{\alpha}^2 = \alpha^2 + \beta^2$).

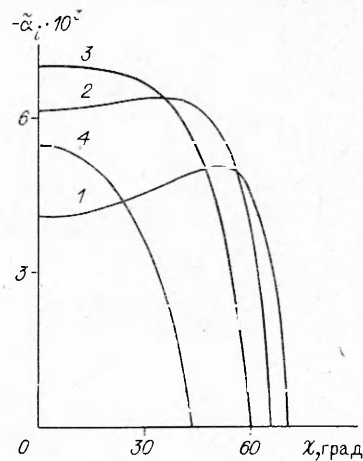
Таким образом, исследование устойчивости сводится к нахождению собственных значений краевой задачи (1), (2), т. е. комплексных значений величин α и β как функций параметров R и ω (или безразмерного частотного параметра $F = \omega \nu / U_e^2$). Краевая задача (1), (2) решалась численно на ЭВМ усовершенствованным методом ортогонализации [6, 7].

Результаты расчетов. Все расчеты выполнены для изотермического пограничного слоя на плоской пластине. На рис. 1 приведены кривые нейтральной устойчивости, построенные для прямых и наклонных волн. Здесь и далее сплошные линии отвечают наклонным волнам, штриховые — прямым. Правые ветви кривых для обеих волн совпадают. Видно, что в области достаточно низких частот ($F \leq 10^4$) минимальные значения чисел Рейнольдса потери устойчивости для наклонных волн фиксированной частоты становятся ниже, чем для прямой волны, а диапазон неустойчивых частот расширяется. Это с особенной отчетливостью видно из зависимостей локальных коэффициентов нарастания возмущений $\tilde{\alpha}_i$ (мнимых частей волнового числа $\tilde{\alpha}$, для плоской волны $\tilde{\alpha}_i = \alpha_i$) от R , приведенных на рис. 2 и рассчитанных для четырех значений частотного параметра F : а — $F \cdot 10^5 = 3$, б — 2, в — 0,85, г — 0,25. Причем интересно отметить, что для первых трех частот максимум локального инкремента нарастания для наклонной волны совпадает с максимумом для прямой, в то время как для четвертой он больше. Это обусловлено тем, что максимум локального инкремента нарастания для прямых волн начинает с некоторой частоты понижаться при ее дальнейшем уменьшении, в результате чего кривые постоянного локального инкремента нарастания для прямых волн замкнуты.

На рис. 3 приведены зависимости угла $\chi = \arctg(\beta/\alpha)$ между вектором средней скорости и направлением распространения волны, при котором имеет место максимальное ее усиление от R . Видно, что вблизи левой ветви нейтральной кривой этот угол принимает максимальное значение, затем уменьшается до нуля при некотором значении R . Оно меньше R , при котором достигается максимальная величина $\tilde{\alpha}_i$ для первых двух значений частотного параметра, приблизительно равно для треть-



Р и с. 3



Р и с. 4

его и выше этого значения для четвертого. Таким образом, для частотных параметров $F \leq 0,85 \cdot 10^{-5}$ максимально усиленная волна будет наклонной на участке, превышающем область роста локального инкремента усиления. Наибольшее значение угла наклона имеет место в начале этой области, оно увеличивается с уменьшением F и в пределе $F \rightarrow 0$ приближается к 90° .

На рис. 4 представлены зависимости локальных коэффициентов усиления от угла наклона волны χ , вычисленные для фиксированного значения $F = 2 \cdot 10^{-5}$ и $R \cdot 10^3 = 1,3; 1,5; 1,7; 2$ (линии 1—4). Из графиков можно проследить эволюцию этих зависимостей при движении наклонной волны от левой ветви кривой нейтральной устойчивости к правой. Видно, например, что если для первого значения R , которое находится вблизи левой ветви, наибольшее значение $\tilde{\alpha}_i$ имеет место для наклонной волны ($\chi = 55^\circ$), то для второго значения R $\tilde{\alpha}_i$ — приблизительно постоянная величина в широком диапазоне $0 \leq \chi \leq 45^\circ$. При дальнейшем движении к правой ветви максимум смещается к нулевому значению $\tilde{\alpha}_i$ и становится все более острым, что (только в этой области значений R) соответствует сложившимся представлениям: локальный инкремент нарастания для прямой волны больше, чем для наклонной.

В практических приложениях, как правило, представляют интерес не локальные инкременты нарастания, а их интегральные характеристики, которые связывают амплитуду возмущения A с ее начальным значением A_0 соотношением

$$J(x) = - \int_{x_1}^x \frac{\tilde{\alpha}_i}{\cos \chi} dx = \ln(A/A_0).$$

Здесь x_1 — значение координаты x , отвечающее левой ветви кривой нейтральной устойчивости. Для плоской пластины

$$J(R) = -2 \int_{R_1}^R \frac{\tilde{\alpha}_i}{\cos \chi} dR, \quad R_1 = \left(\frac{U_e x_1}{v} \right)^{1/2}.$$

Знание интегральных инкрементов нарастания также необходимо для определения точки перехода к турбулентному режиму течения по так называемому e^N -методу [4, 5], согласно которому переход имеет место тогда, когда величина $J(x_2)$ (или $J(R_2)$, где $R_2 = (U_e x_2/v)^{1/2}$, R_2 — значение R , отвечающее правой ветви кривой нейтральной устойчивости) до-

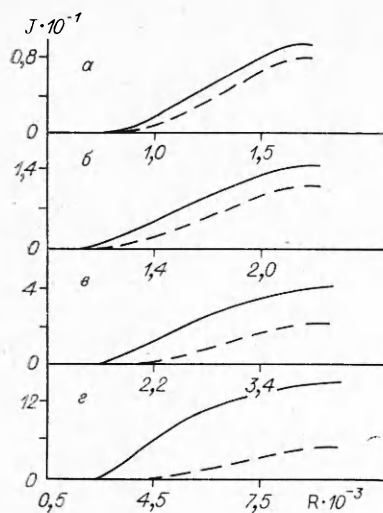


Рис. 5

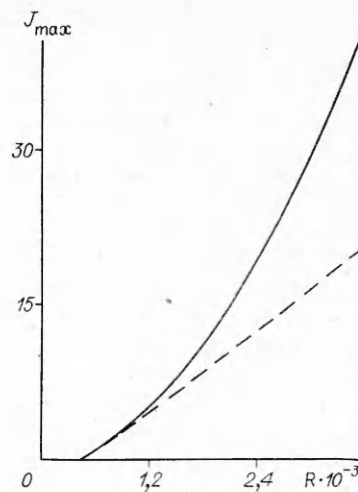


Рис. 6

стигает определенного значения N . Для «натурных» условий обычно полагают $N = 9$. По некоторым данным N достигает 11. Для условий испытаний в аэродинамических трубах N может быть существенно меньше [8].

Результаты расчетов интегральных инкрементов нарастания для четырех значений частотного параметра приведены на рис. 5. Видно, что величины J , вычисленные для наклонных волн, могут быть намного выше соответствующих значений для прямой волны, причем чем меньше безразмерный частотный параметр F , тем различие становится более ярко выраженным. Так, отношение максимальных значений J для наклонной и прямой волн при $F = 3 \cdot 10^{-5}$; $2 \cdot 10^{-5}$; $0,85 \cdot 10^{-5}$; $0,25 \cdot 10^{-5}$ составляет 1,18; 1,25; 1,8; 2,8 ($a - g$). И хотя в первом случае это различие не так велико, однако отметим, что, согласно e^N -методу, наклонная волна приводит к турбулентности ($N = 9$), а для прямой волны этого не происходит. Иными словами, именно наклонные волны могут послужить причиной перехода к турбулентности.

На рис. 6 приведены зависимости максимальной величины $J_{\max}$ из всего диапазона неустойчивых частот от R для прямой и наклонной волн. С увеличением R наблюдается все большее превышение $J_{\max}$ для наклонной волны над ее значением для прямой. Из рис. 6 также следует, что наклонные волны имеют меньшие значения критического числа Рейнольдса $R_{кр}$ и приводят к переходу к турбулентности в точке, лежащей выше по потоку. Например, при $N = 9$ $R_{кр} = 1,6 \cdot 10^3$ против $R_{кр} = 1,88 \cdot 10^3$ для прямой волны, а при $N = 11$ $R_{кр} = 1,76 \cdot 10^3$ против $2,09 \cdot 10^3$. Это соответствует сокращению длины области перехода в 1,38 раза в первом случае и в 1,41 раза во втором.

Что касается экспериментального исследования наклонных возмущений, то авторам известна лишь одна недавно появившаяся работа, где впервые экспериментально изучалось поведение искусственно введенных контролируемых наклонных волн Толлмина — Шлихтинга на плоской изотермической пластине, помещенной в аэродинамическую трубу [8]. Для генерации таких возмущений разработана специальная методика. В пограничный слой вводилась волна с безразмерным частотным параметром $F = 10^{-4}$ в диапазоне углов $0 \leq \chi \leq 25^\circ$. При этом обнаружено необычное поведение возмущений: амплитуда возбуждаемой волны уменьшалась с увеличением угла распространения, но в области частот, существенно меньше возбуждаемой, было зарегистрировано усиление возмущений. Для объяснения этого явления авторы [8] предполагают существование иного механизма усиления наклонных волн, отличного от линейного, основанного на том, что, как они показывают, наклонная волна ка-

чественно отличается от прямой тем, что ее вихревое поле имеет пространственную структуру.

В свете полученных нами результатов усиление наклонных волн может быть объяснено уже в рамках линейной теории гидродинамической устойчивости: нарастающие трехмерные возмущения, обнаруженные в эксперименте, являются наклонными волнами Толлмина — Шлихтинга, неустойчивыми с точки зрения линейной теории, возбуждаемая же волна находится в области частот, для которых прямая волна более неустойчива, чем наклонная.

Таким образом, показано, что в отличие от общепринятого представления в плоском дозвуковом пограничном слое наклонные волны играют гораздо большую роль в процессах перехода к турбулентному режиму течения. Они могут иметь меньшие значения чисел Рейнольдса потери устойчивости, более высокие инкременты нарастания и послужить причиной возникновения турбулентности. Причем важно отметить, что эта причина заключается не только в том, что для наклонных волн критическое число Рейнольдса перехода может быть значительно ниже, но и в том, что они имеют трехмерную структуру уже в рамках линейной теории.

Авторы выражают благодарность В. Я. Левченко за полезное обсуждение, а также за указание на существование работы [8].

ЛИТЕРАТУРА

1. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. — М.: Наука, 1974.
2. Линь Ц. Ц. Теория гидродинамической устойчивости. — М.: ИЛ, 1958.
3. Squire H. B. On the stability of the three-dimensional disturbances of viscous flow between parallel walls // Proc. Roy. Soc. London. — 1933. — Ser. A. — V. 142.
4. Качанов Ю. С., Козлов В. В., Левченко В. Я. Возникновение турбулентности в пограничном слое. — Новосибирск: Наука, 1982.
5. Жигулев В. Н., Тумин А. М. Возникновение турбулентности. — Новосибирск: Наука, 1987.
6. Годунов С. К. О численном решении краевых задач для систем линейных дифференциальных уравнений // УМН. — 1961. — Т. 16, вып. 3.
7. Лебедев Ю. Б., Фомичев В. М. Влияние неравномерного распределения температуры поверхности на устойчивость ламинарного пограничного слоя // ПМТФ. — 1987. — № 2.
8. Robey H. F. The nature of oblique instability waves in boundary layer transition // IUTAM Symp. Turbulence Menag. Relaminar., Bangalore, India, 1987. — Berlin: Springer, 1988.

г. Реутов

Поступила 23/IV 1991 г.

УДК 532.517.2 + 534.232

Л. Б. Айзин

ПОРОЖДЕНИЕ ЗВУКА ВОЛНОЙ ТОЛЛМИНА — ШЛИХТИНГА НА КОНЦЕ ПЛАСТИНЫ, ОБТЕКАЕМОЙ ПОТОКОМ

Одно из важных явлений гидродинамики — переход ламинарной формы течения в турбулентную. Установлено, что при низком уровне возмущений в набегающем потоке переход в пограничном слое на пластине вызван неустойчивостью ламинарного течения. В настоящее время хорошо развита конвективная (квазилокальная) теория гидродинамической устойчивости, описывающая распространение и рост вниз по потоку волн Толлмина — Шлихтинга (Т — Ш), которые и приводят к переходу.

Но «до настоящего времени не разработан теоретически вопрос об устойчивости стационарного обтекания тел конечного размера. Такое математическое исследование, однако, крайне сложно» [1]. В связи с указанной сложностью задачи естественно делать ее поэтапно. Один из таких этапов — отыскание и расчет каналов передачи возмущений вверх