ПМТФ, № 1, 1960

О ДИСПЕРСИОННЫХ СООТНОШЕНИЯХ ДЛЯ УПРУГОСТИ И ПОДАТЛИВОСТИ

Т. Д. Шермергор

(Сталинск)

Устанавливаются дисперсионные соотношения, связывающие мнимые и действительные части упругости (модуля Юнга или сдвига), а также податливости. Полученные соотношения сопоставляются с известными дисперсионными формулами Гросса для упругости и Крамерса для диэлектрической проницаемости.

Комплексный модуль упругости (сдвига или Юнга — в зависимости от типа колебаний) широко используется для описания затухающих колебаний в твердых телах — металлах, полимерах и др. Например, для изучения явления неупругости в металлах часто применяется метод крутильных колебаний. При этом обычно измеряются тангенс угла сдвига фаз $\operatorname{tg}\varphi$ между напряжением σ и деформацией ε в функции температуры, а также, несколько реже, квадрат собственной частоты. Поскольку действительная часть модуля сдвига пропорциональна квадрату собственной частоты, a $\operatorname{tg}\varphi$ определяется отношением мнимой части модуля сдвига к его действительной части, то этих данных вполне достаточно для нахождения частотной зависимости комплексного модуля. При этом пересчет от температурной шкалы к шкале частот осуществляется путем совмещения двух кривых $\operatorname{tg}\varphi$ в функции обратной абсолютной температуры, полученных экспериментально при разных частотах (см. [1]).

Целью настоящей работы является изучение связи между действительной и мнимой частями комплексной упругости, под которой может пониматься как модуль Юнга, так и модуль сдвига, а также изучение связи между действительной и мнимой частями податливости — величины, обратной упругости.

В качестве исходного уравнения воспользуемся выражением комплексной упругости через функцию распределения констант релаксаций $\psi(s)$, которое можно получить при помощи термодинамики необратимых процессов [2,3]

$$M = M^\circ - i\omega \mathrm{L}^2 \psi(-i\omega) \tag{1}$$

где M° — равновесное значение упругости, ω — циклическая частота, L — оператор интегрального преобразования Лапласа и периодический по времени множитель выбран в виде $\exp(-i\omega t)$.

Из выражения (1) следует, что действительная M' и мнимая M'' части упругости выражаются через одну и ту же функцию ψ, откуда вытекает возможность выразить M' через M'', либо наоборот путем исключения $\psi(s)$. Разделяя в выражении (1) действительную и мнимую части, обращая полученные выражения и исключая $\psi(s)$, получим искомую связь

$$\mathrm{L}_s \frac{M^\circ - M'(t)}{t} = \mathrm{L}_c \frac{M''(t)}{t} \tag{2}$$

где через L_s и L_c обозначены интегральные операторы синус- и косинус-преобразования Фурье и использовано очевидное операторное равенство $\mathrm{L}_s^2 = \mathrm{L}_c^2 = {}^1/_2\,\pi$. Величина

$$\frac{M''(\omega)}{\omega} \equiv \eta(\omega)$$

представляет собой динамическую вязкость [4], формула (2) позволяет пересчитать упругость на вязкость и наоборот.

Для решения равенства (2) относительно M' или M'' необходимо найти произведения некоммутирующих операторов $\mathrm{L}_s\mathrm{L}_c$ и $\mathrm{L}_c\mathrm{L}_s$. Последнее может быть сделано при помощи формулы (3)

$$\mathrm{L}_c \sin \alpha x = \alpha\,(\alpha^2 - x^2)^{-1}$$

получающейся из известного интеграла $\mathrm{L}_c\,(\alpha^2 - x^2)^{-1} = (\pi/2\alpha)\sin\alpha x$ путем его умножения на L_c (α — параметр). Тогда

$$\mathrm{L}_s\mathrm{L}_c f(\omega) = \int_0^\infty f(p)\,\omega\,(\omega^2 - p^2)^{-1}\,dp \qquad (4')$$

$$\mathrm{L}_c\mathrm{L}_s f(\omega) = \int_0^\infty f(p)\,p\,(p^2 - \omega^2)^{-1}\,dp \qquad (4'')$$

Здесь и в дальнейшем интегралы берутся в смысле главного значения. Используя формулы (4), получаем из равенства (2) дисперсионные соотношения

$$M'(\omega) - M^\circ = \frac{2\omega^2}{\pi}\int_0^\infty \frac{M''(p)\,p^{-1}}{p^2 - \omega^2}\,dp \qquad (5')$$

$$M''(\omega) = -\frac{2\omega}{\pi}\int_0^\infty \frac{M'(p) - M^\circ}{p^2 - \omega^2}\,dp \qquad (5'')$$

Эти соотношения были получены Гроссом [4].

Экспериментальное определение $M(\omega)$ проводится в ограниченном интервале частот. Например, при изучении методом крутильных колебаний релаксационных процессов в поликристалле, обусловленных вязким поведением границ зерен, хорошо определяется вся высокочастотная область $M(\omega)$, тогда как низкочастотная часть (соответствующая высоким температурам) обрывается для $M'(\omega) > M^\circ$ и, таким образом, M° остается неизвестным. В связи с этим представляет интерес получить дисперсионные соотношения, связывающие M' и M'' не через M°, а через M^∞, поскольку M^∞ легко и достаточно точно определяется экспериментально, так как M^∞ лежит в низкотемпературной области и представляет собой максимальное (нерелаксированное) значение комплексной упругости. Для этой цели воспользуемся принципом наложения Больцмана, который может быть записан в форме [5]

$$\sigma = M^\infty \varepsilon - \int_{-\infty}^{t} \varepsilon(\tau)\,f(t - \tau)\,d\tau \qquad (6)$$

Здесь первое слагаемое — нерелаксированное значение напряжения, а второе учитывает убыль σ в результате релаксации. Функция $f(t)$ является функцией памяти и в общем случае описывается интегралом

$$f(t) = \int_0^\infty A(\tau)\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)d\tau \qquad (7)$$

Принимая деформацию циклической $\varepsilon = \varepsilon_0 \exp(-i\omega t)$, из уравнения (6) получим:

$$M(\omega) = M^\infty - \int_0^\infty e^{i\omega t'} f(t')\,dt' \qquad (8)$$

Равенство (8) можно рассматривать как Фурье-интеграл функции $M^\infty - M(\omega)$. Этот интеграл отличается от обычного Фурье-представления функции тем, что он обрезается для $t' < 0$. Последнее является следствием принципа причинности, заключающегося в том, что в равенстве (6) рассматриваются лишь моменты времени, меньшие t. Принцип причинности можно формально учесть распространением в равенстве (6) пределов интегрирования на область $(-\infty, +\infty)$ с одновременным обрезанием функции памяти фактором $[1 - 1\,(\tau - t)]$, где $1\,(x)$ — единичная функция, равная нулю для $x < 0$ и единице для $x \geqslant 0$. Тогда после замены переменных $t' \equiv t - \tau$ интеграл (8) может рассматриваться как обычный интеграл Фурье от функции $f(t') \cdot 1(t')$.

Переходя в равенстве (8) от комплексного преобразования Фурье к синус- и косинус-преобразованиям Фурье, разделяя действительные и мнимые части и обращая полученные равенства, найдем

$$f(t) = (2/\pi)\, \mathrm{L}_c\, [M^\infty - M'(t)] \tag{9'}$$

$$f(t) = -(2/\pi)\, \mathrm{L}_s M''(t) \tag{9''}$$

Отсюда

$$\mathrm{L}_c\, [M^\infty - M'(t)] = -\mathrm{L}_s M''(t) \tag{10}$$

При помощи формул (4) получим искомые дисперсионные соотношения

$$M^\infty - M'(\omega) = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^\infty \frac{pM''(p)}{\omega^2 - p^2}\, dp \tag{11'}$$

$$M''(\omega) = \frac{2\omega}{\pi} \int\limits_0^\infty \frac{M^\infty - M'(p)}{p^2 - \omega^2}\, dp \tag{11''}$$

Формулы (11) по своей структуре аналогичны известным дисперсионным соотношениям Крамерса и Кронига (см., например, [6], стр. 340) для диэлектрической проницаемости в диэлектриках.

Равенства (11'') и (5'') совпадают; действительно

$$\int\limits_0^\infty (p^2 - \omega^2)^{-1}\, dp = 0 \tag{12}$$

Это позволяет убрать M^∞ и M° из подынтегральных выражений (11'') и (5'') соответственно. Однако для симметризации дисперсионных соотношений они оставлены. Формулы же (5') и (11') — различны, и в силу доступности определения M^∞ последняя формула более удобна для практических приложений. Например, если $M(\omega)$ экспериментально определено для области (ω_0, ∞), то можно $M''(\omega)$ экстраполировать на высокотемпературную область $(0, \omega_0)$ и с помощью равенства (11'), где левая часть равенства известна для (ω_0, ∞), выбрать такую экстраполяционную формулу для M'', для которой (11') удовлетворяется в области (ω_0, ∞). Это в свою очередь позволяет подсчитать M' в высокотемпературной области $(0, \omega_0)$. Таким образом, формула (11') может быть использована для вычисления величины внутреннего трения в высокотемпературной области по известным данным для средних температур. Формулы (11'') и (5'') неудобны для этой цели, так как экстраполяция M' затрудняется неизвестным значением M°.

Проверка полученных соотношений (11) может быть сделана путем подстановки (11') в (11'') или наоборот. Например, для M'' получаем:

$$M''(\omega) = \frac{4\omega}{\pi^2} \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty \frac{p^2}{q} \frac{M''(q)}{(p^2 - \omega^2)(p^2 - q^2)}\, dp\, dq \tag{13}$$

Для того чтобы равенство (13) удовлетворялось тождественно, необходимо потребовать, чтобы

$$\int\limits_0^\infty \frac{p^2\, dp}{(p^2 - \omega^2)(p^2 - q^2)} = \frac{\pi^2}{4}\, \delta(q - \omega) \tag{14}$$

Равенство (14) может быть выведено из известного интеграла [7]

$$\int\limits_0^\infty \sin \omega x\, (x^2 - q^2)^{-1} x\, dx = \frac{\pi}{2} \cos q\omega \tag{15}$$

который может быть записан в форме

$$\mathrm{L}_s \omega\, (\omega^2 - q^2)^{-1} = \frac{\pi}{2}\, \mathrm{L}_c \delta(q - \omega) \tag{16}$$

Умножая интеграл (16) слева на L_c и воспользовавшись соотношениями (4), получим равенство (14).

Формулы (5) и (11) выведены из различных уравнений: первые из термодинамического уравнения неравновесных механических процессов, а вторые — из принципа наложения Больцмана. Однако в обоих случаях в явной или неявной форме использовался принцип причинности. Покажем, что использование принципа причинности и учет некоторых простых общих свойств функции $M(\omega)$ позволяет получить общие дисперсионные соотношения, из которых формулы (5) и (11) вытекают как частный случай. Для этой цели воспользуемся формулой, полученной Н. Н. Боголюбовым и используемой в квантовой электродинамике [8,9]:

$$f(x) = \frac{(x-x_0)^{n+1}}{i\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x')\,dx'}{(x'-x)(x'-x_0)^{n+1}} + f(x_0) + \ldots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n \tag{17}$$

Формула (17) справедлива для функций, аналитических в верхней полуплоскости и имеющих в бесконечности полюс n-го порядка. Формуле выводится из известной интегральной теоремы Коши

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{f(z')}{z'-z}\,dz' \tag{18}$$

путем перемещения точки z на контур интегрирования и выбора в качестве контура действительной оси и дуги верхней полуокружности бесконечно большого радиуса, а в качестве функции — величины $f(z)(z-z_0)^{-n-1}$.

Для применения дисперсионной формулы (17) к нашему случаю следует обсудить поведение $M(\omega)$ в верхней полуплоскости. При этом можно исходить либо из равенства (1), либо из (8). Существенно, что в силу принципа причинности Фурье-представление переменной части $M(\omega)$, т. е. $M^\infty - M$ или $M - M^0$, обрезается для отрицательных моментов времени t'. Полагая $\omega = \omega' + i\omega''$, получаем в подынтегральном выражении Фурье-представления сомножитель $\exp(-\omega'' t')$, обеспечивающий сходимость интеграла Фурье для $t' > 0$, тогда как для $t' < 0$ подынтегральная функция обрезается в силу принципа причинности. Таким образом, комплексная упругость $M(\omega)$ является в верхней полуплоскости аналитической функцией, имея на бесконечности полюс нулевого порядка (константу M^∞).

Поэтому к $M(\omega)$ можно применить формулу (17), положив $n = 0$

Подставляя в равенство (17) $M(\omega)$ и полагая $n = 0$, получим

$$M(\omega) = \frac{\omega-\omega_0}{i\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{M(p)\,dp}{(p-\omega)(p-\omega_0)} + M(\omega_0) \tag{19}$$

Разделяя в равенстве (19) действительные и мнимые части, найдем

$$M'(\omega) - M'(\omega_0) = \frac{\omega-\omega_0}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{M''(p)\,dp}{(p-\omega)(p-\omega_0)} \tag{20'}$$

$$M''(\omega) - M''(\omega_0) = -\frac{\omega-\omega_0}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{M'(p)-M'(\omega_0)}{(p-\omega)(p-\omega_0)}\,dp \tag{20''}$$

где в последнем равенстве для симметризации добавлено слагаемое

$$\frac{\omega-\omega_0}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{M'(\omega_0)}{(p-\omega)(p-\omega_0)}\,dp = 0 \tag{21}$$

Выражения (20) можно переписать в иной форме, если учесть, что в силу интегрального представления типа (8) M' является четной функцией ω, а M'' — нечетной:

$$M'(\omega) - M'(\omega_0) = \frac{2}{\pi}(\omega^2 - \omega_0^2)\int\limits_0^\infty \frac{pM''(p)\,dp}{(p^2-\omega^2)(p^2-\omega_0^2)} \tag{22'}$$

$$M''(\omega) - M''(\omega_0) = -\frac{2}{\pi}(\omega - \omega_0)\int\limits_0^\infty \frac{(p^2+\omega\omega_0)[M'(p) - M'(\omega_0)]}{(p^2-\omega^2)(p^2-\omega_0^2)}\,dp \tag{22''}$$

Формулы (22) представляют собой общие дисперсионные соотношения между M' и M'', из которых в частном случае $\omega_0 = 0$ получаются формулы (5), а при $\omega_0 \to \infty$ — формулы (11).

Поскольку экспериментальные данные описывают как с помощью упругости,так и с помощью податливости, представляет интерес получить дисперсионные соотношения для податливости. Для этой цели в качестве исходных уравнений возьмем термодинамическое уравнение, аналогичное уравнению (1)

$$J = J^\circ + i\omega L^2\psi'(-i\omega) \tag{23}$$

и интегральное уравнение типа больцмановского уравнения (6)

$$\varepsilon = J^\infty\sigma + \int\limits_{-\infty}^{t} \sigma(\tau) f'(t-\tau)\,d\tau \tag{24}$$

В последнем равенстве первое слагаемое будет давать мгновенное значение деформации, устанавливающееся под действием напряжения σ, f' — функция памяти, и величина $\sigma(\tau) f'(t-\tau)\,d\tau$ дает приращение деформации за время $d\tau$, обусловленное релаксационными процессами. Из уравнения (24) для циклических деформаций вытекает

$$J(\omega) = J^\infty + \int\limits_0^\infty e^{i\omega t'} f'(t')\,dt' \tag{25}$$

Разница в знаке уравнений (1) и (8), с одной стороны, и (23) и (25), с другой, вытекает из определения $J \equiv M^{-1}$:

$$J' = M'(M'^2 + M''^2)^{-1}, \qquad J'' = -M''(M'^2 + M''^2)^{-1} \tag{26}$$

Проведя вычисления, аналогичные тем, которые были сделаны для вывода дисперсионных соотношений для упругости, получим:

$$J^\circ - J'(\omega) = -\frac{2\omega^2}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{J''(p)\,p^{-1}}{p^2-\omega^2}\,dp, \qquad J'(\omega) - J^\infty = -\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{pJ''(p)}{\omega^2-p^2}\,dp \tag{27}$$

$$J''(\omega) = \frac{2\omega}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{J^\circ - J'(p)}{p^2-\omega^2}\,dp, \qquad J''(\omega) = -\frac{2\omega}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{J'(p) - J^\infty}{p^2-\omega^2}\,dp \tag{28}$$

Уравнения (28) в силу равенства (12) совпадают, тогда как (27) являются различными уравнениями.

В тех случаях, когда система наряду с упругостью обладает способностью к вязкому течению, формулы видоизменяются. Примером таких систем являются поликристаллы, у которых при высоких температурах появляется вязкое течение по границам зерен, в результате чего для таких температур внутреннее трение резко возрастает с температурой [10]. Обычно вязкость учитывается ньютоновским течением $\sigma = \eta\dot{\varepsilon}$, которое вносит в суммарную циклическую деформацию вклад, равный $\sigma / i\omega\eta$.

Поэтому полная податливость $\bar{J}$ будет равна [4]

$$\bar{J} = J + \frac{1}{i\omega\eta} \tag{29}$$

где J дается формулами (23) или (25). Из выражения (29) видно, что мнимая часть податливости имеет в точке $\omega = 0$ полюс первого порядка, чем обеспечивается резкое увеличение внутреннего трения в низкочастотной (высокотемпературной) области.

Для получения дисперсионных соотношений воспользуемся формулой (17). При этом вместо $\bar{J}$ будем рассматривать $J = \bar{J} + i/\omega\eta$, которая не имеет полюсов на действительной оси. Аналитичность J в верхней полуплоскости вытекает из принципа причинности, отраженного в уравнениях (23) или (25). Вместо уравнения (19) для упругости теперь имеем

$$J(\omega) = \frac{\omega - \omega_0}{i\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{J(p)\,dp}{(p-\omega)(p-\omega_0)} + J(\omega_0) \tag{30}$$

Отсюда

$$\bar{J}'(\omega) - J'(\omega_0) = \frac{\omega - \omega_0}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{J}''(p)\,dp}{(p-\omega)(p-\omega_0)} \tag{31'}$$

$$\bar{J}''(\omega) - J''(\omega_0) = -\frac{\omega - \omega_0}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{J}'(p)\,dp}{(p-\omega)(p-\omega_0)} - \frac{1}{\omega\eta} \tag{31''}$$

где учтено, что $J' \to \bar{J}'$, и в равенстве (31′) при замене $J'' \to \bar{J}''$ принято во внимание, что для ω и ω_0, не равных нулю, имеет место равенство

$$\frac{\omega - \omega_0}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{\eta p (p-\omega)(p-\omega_0)} = 0 \tag{32}$$

Формулы (31) являются общими дисперсионными соотношениями для податливости, из которых в частном случае $\eta = \infty$ и $\omega_0 = 0$ или $\omega_0 = \infty$ вытекают соответственно равенства (27) и (28). При $\eta \neq \infty$ и $\omega_0 \neq 0$ формулы (31) допускают преобразования к полупрямой $(0, \infty)$, что дает

$$\bar{J}'(\omega) - J'(\omega_0) = \frac{2(\omega^2 - \omega_0^2)}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{p\bar{J}''(p)\,dp}{(p^2-\omega^2)(p^2-\omega_0^2)} \tag{33'}$$

$$\bar{J}''(\omega) - J''(\omega_0) = -\frac{2(\omega - \omega_0)}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{(p^2 + \omega\omega_0)\bar{J}'(p)\,dp}{(p^2-\omega^2)(p^2-\omega_0^2)} - \frac{1}{\omega\eta} \tag{33''}$$

где учтено, что $\bar{J}'(\omega)$ — четная, а $\bar{J}''(\omega)$ — нечетная функции.

В частном случае $\omega_0 \to \infty$ из равенства (33) получим

$$\bar{J}'(\omega) - J^{\infty} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{p\bar{J}''(p)\,dp}{p^2 - \omega^2} \tag{34'}$$

$$\bar{J}''(\omega) = -\frac{2\omega}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\bar{J}'(p)\,dp}{p^2 - \omega^2} - \frac{1}{\omega\eta} \tag{34''}$$

Таким образом, учет собственной вязкости приводит к появлению в формулах (31′′), (33′′), (34′′) для мнимой части податливости слагаемого $-1/\omega\eta$. Отметим, что аналогичная добавка получается в дисперсионных формулах Крамерса и Кронига для диэлектрической проницаемости в металлах, где добавка обусловлена собственной проводимостью (см., напр. [6]).

При $\eta \neq \infty$ и $\omega_0 = 0$ из равенства (31′′) снова вытекает соотношение (33′′), поскольку $J' = \bar{J}'$. Соотношение же (33′) в этом случае не имеет места, поскольку (32) не выполняется. При $\omega_0 = 0$ в подынтегральном выражении вместо $\bar{J}''$ остается J'' и преобразование интеграла к полупрямой $(0, \infty)$ дает первое равенство (27). Поэтому в данном случае при использовании дисперсионных соотношений надо предварительно выделить из $J''(\omega)$, полученного экспериментально, слагаемое $1/\omega\eta$, обусловленное собственной вязкостью.

Учет собственной вязкости не изменяет полученных ранее формул для упругости, поскольку комплексная упругость, как легко видеть, и в этом случае не имеет полюсов на действительной оси. Полюсу $\bar{J}(\omega)$ в точке $\omega = 0$ соответствует нуль $M(\omega)$.

Следует подчеркнуть, что если в отсутствие собственной вязкости дисперсионные формулы для $J(\omega)$ и $M(\omega)$ одинаково удобны для продолжения кривой внутреннего трения в высокотемпературную область, то при наличии собственной вязкости дисперсионные формулы для податливости имеют определенное преимущество. Последнее связано с простой формой вязкостной добавки, что позволяет разделить эффекты вязкости и релаксации. Разделение этих же эффектов в формулах комплексной упругости затруднено тем, что в этом случае вязкость нельзя выделить в виде отдельного слагаемого. Это подтверждается и непосредственным расчетом сетки, состоящей из упругих и вязких элементов [11].

Проиллюстрируем это на реологической модели, состоящей из последовательно соединенных элементов Максвелла и Фойгта (модель Максвелла составлена из последовательно, а Фойгта — параллельно включенных вязкого и упругого элементов). Дифференциальное уравнение модели имеет вид:

$$(p_0 + p_1 \mathrm{D} + p_2 \mathrm{D}^2)\sigma = (q_1 \mathrm{D} + q_2 \mathrm{D}^2)\varepsilon \tag{35}$$

где p_i и q_i — параметры, а D — оператор дифференцирования по времени. Для циклических процессов $\sigma = \sigma_0 \exp(i\omega t)$ имеем

$$M(\omega) = \frac{1}{J(\omega)} = \frac{i\omega q_1 + (i\omega)^2 q_2}{p_0 + i\omega p_1 + (i\omega)^2 p_2} \tag{36}$$

что дает

$$M(\omega) = \sum_{j=1}^{2} \frac{i\omega c_j}{s_j + i\omega}, \qquad J(\omega) = J^\infty + \frac{1}{i\omega\eta} + \frac{\bar{c}}{\bar{s} + i\omega} \tag{37}$$

Здесь

$$\begin{gathered} s_j \cdot 2p_2 \equiv p_1 - (-1)^j (p_1^2 - 4p_0)^{1/2} \\ c_j \cdot 2p_2 \equiv q_2 + (-1)^j (2q_1 p_2 - q_2 p_1)(p_1^2 - 4p_0)^{-1/2} \\ J^\infty \equiv p_2/q_2, \quad 1/\eta \equiv p_0 q_2/q_1^2, \quad \bar{s} \equiv q_1/q_2, \quad \bar{c} \equiv p_1/q_2 - p_2 q_1/q_2^2 - p_0 q_2/q_1^2 \end{gathered} \tag{38}$$

Таким образом, в выражении (37) для $M(\omega)$ не удается выделить вязкостную добавку $i\omega\eta$. Это объясняется тем, что при последовательном соединении вязкого элемента, моделирующего собственную вязкость с той или иной реологической моделью, описывающей упруго-вязкие свойства твердого тела, складываются деформации, а не напряжения.

Поступила 25 I 1960

ЛИТЕРАТУРА

1. К э Т и н - с у й. Сб. Упругость и неупругость металлов. ИЛ, М., 223, 1954.
2. Ш е р м е р г о р Т. Д. «К термодинамическому описанию неравновесных процессов» Научные доклады Высшей школы, физ.-мат. науки, 5, 147, 1958.
3. Ш е р м е р г о р Т. Д. «Циклическая деформация упруго-вязких тел» Известия вузов, черн. мет., 3, 63, 1959.
4. G r o s s B. Mathematical Structure of the Theories of Viscoelasticity, Paris, 1953.
5. К о л ь с к и й Г. Волны напряжения в твердых телах. ИЛ, М., 1955.
6. Л а н д а у Л. Д., Л и ф ш и ц Е. М. Электродинамика сплошных сред. ГИТТЛ, М., 1957.
7. Р ы ж и к И. М., Г р а д ш т е й н И. С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. ГИТТЛ, М.— Л., 1951.
8. Б о г о л ю б о в Н. Н., М е д в е д е в Б. В., П о л и в а н о в М. К. Вопросы теории дисперсионных соотношений. ГИФ-МЛ, М., 1958.
9. Б о г о л ю б о в Н. Н., Ш и р о к о в Д. В. Введение в теорию квантованных полей. ГИТТЛ, М., 1957.
10. П о с т н и к о в В. С. Температурная зависимость внутреннего трения чистых металлов и сплавов, Успехи физических наук, 66, 1, 43, 1958.
11. B l a n d D. R. «On the foundations of linear isotropic visco-elasticity». Proc. Roy. Soc., 250, 1263, 524, 1959.