10. **Гупало Ю. П., Полянин А. Д., Рязанцев Ю. С.** Массотеплообмен реагирующих частиц с потоком.— М.: Наука, 1985.
11. **Антановский Л. К., Копбосынов Б. К.** Нестационарный термокапиллярный дрейф капли вязкой жидкости // ПМТФ.— 1986.— № 2.
12. **Антановский Л. К.** Влияние капиллярных сил на нестационарное движение капли в однородной жидкости // Гидромеханика и тепломассообмен в невесомости.— Новосибирск: ИГ СО АН СССР, 1988.
13. **Редников А. Е., Рязанцев Ю. С.** К вопросу о нестационарном движении капли под действием капиллярных и массовых сил // ПМТФ.— 1991.— № 4.
14. **Гидромеханика** невесомости/Бабский В. Г., Копачевский Н. Д., Мышкис А. Д. и др.— М.: Наука, 1976.
15. **Антановский Л. К.** Симметризация уравнений динамики капиллярной жидкости // ПМТФ.— 1990.— № 6.
16. **Napolitano L. G.** Thermodynamics and dynamics of pure interfaces // Acta Astronaut.— 1978.— V. 5, N 9.
17. **Гиббс Дж. В.** Термодинамика. Статистическая механика.— М.: Наука, 1982.
18. **Де Гроот С., Мазур П.** Неравновесная термодинамика.— М.: Мир, 1964.

г. Новосибирск *Поступила 8/VI 1990 г.*

УДК 534:532.529.6

А. А. Дойников, С. Т. Завтрак

СИЛА КЁНИГА В СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

В публикациях, где упоминается сила Кёнига (см., например, [1—3]), предполагается, что длина звуковой волны много больше расстояния между дисперсными частицами. Такое предположение позволяет не учитывать сжимаемость жидкости, но оно справедливо только для низкочастотных волн. Тем временем на практике, например в ультразвуковой технологии, приходится иметь дело с излучением достаточно высоких частот (10^4—10^9 Гц [4]). Длина волны такого излучения может быть сравнима и даже меньше расстояния между частицами, оставаясь много больше их размеров. Очевидно, что пренебрежение сжимаемостью жидкости становится неправомочным. Возникает вопрос, как при учете сжимаемости жидкости изменится структура силы Кёнига? Данная работа дает на него ответ.

Итак, нужно вычислить силу радиационного взаимодействия (силу Кёнига) двух твердых сферических частиц с радиусами R_1 и R_2, центры которых совершают малые осцилляции с круговой частотой ω, при условии, что расстояние l между частицами сравнимо с длиной звуковой волны $\lambda = 2\pi c\omega^{-1}$ (c — скорость звука в жидкости).

Рассмотрим вопрос о малых параметрах. Во-первых, полагаем, что выполняются два традиционных условия: потенциальность колебаний жидкости, т. е. $\mathbf{v} = \nabla\varphi$ (φ — потенциал скорости жидкости $\mathbf{v}$), и $|\mathbf{v}|/c \ll \ll 1$. Последнее означает малость амплитуды волнового поля. Во-вторых, при решении аналогичной задачи для несжимаемой жидкости используются еще два малых параметра: $kR_{1,2} \ll 1$ и $kl \ll 1$ ($k = \omega/c$ — волновое число), причем $kR_{1,2} \ll kl$. Их малость и соотношение между ними следуют из предположения о том, что $R_{1,2} \ll l \ll \lambda$. Отказ от требования $l \ll \lambda$ означает, что остается только один малый параметр $kR_{1,2}$, по которому и ведется все разложение.

Хорошо известно, что радиационные силы, в том числе и сила Кёнига, квадратичны по полю. Учитывая это, задачу можно сформулировать и так: необходимо найти главные члены в разложении силы Кёнига по параметру $kR_{1,2}$ в квадратичном по полю приближении при произвольном соотношении λ и l.

Радиационную силу $\mathbf{F}_j$, действующую на j-ю частицу ($j = 1, 2$), будем вычислять по формуле, полученной в [3]:

$$\mathbf{F}_j = \rho_0 \left\langle \int\limits_{s_j} [\mathbf{n}_j (v^2 - k^2\varphi^2)/2 - \mathbf{v}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}_j)]\, ds_j \right\rangle. \quad (1)$$

Здесь ρ_0 — плотность покоящейся жидкости; ds_j — элемент поверхности покоящейся j-й частицы; $\mathbf{n}_j$ — единичный вектор внешней нормали к ее поверхности, угловые скобки означают усреднение по времени. Поскольку все члены в подынтегральном выражении формулы (1) квадратичны по полю, φ и $\mathbf{v}$ достаточно вычислить в линейном по полю приближении. Следовательно, можно пользоваться линеаризованными уравнениями движения жидкости и ограничиться выполнением граничных условий для $\mathbf{v}$ на поверхности покоящихся частиц. Таким образом, необходимо решить краевую задачу

$$\Delta\varphi + k^2\varphi = 0; \tag{2}$$

$$\mathbf{n}_j\cdot\mathbf{v} = \mathbf{n}_j\cdot\mathbf{w}_j \text{ при } \boldsymbol{\rho}_j = \mathbf{n}_j R_j,\ j = 1,\ 2, \tag{3}$$

где $\boldsymbol{\rho}_j = \mathbf{r} - \mathbf{r}_j$: $\mathbf{r}$ — радиус-вектор произвольной точки жидкости; $\mathbf{r}_j$ — радиус-вектор равновесного центра j-й частицы; $\mathbf{w}_j = \mathrm{Re}\,\{\mathbf{U}_j \exp(-i\omega t)\}$— скорость осцилляций j-й частицы; $\mathbf{U}_j$ — комплексная амплитуда. Запишем φ в виде суммы двух дипольных потенциалов: $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$. Здесь

$$\varphi_j = \mathrm{Re}\,\{a_{j\alpha} n_{j\alpha} h_1^{(1)}(k\rho_j)\exp(-i\omega t)\}\ (\rho_j = |\boldsymbol{\rho}_j|); \tag{4}$$

$h_1^{(1)}(k\rho_j)$ — сферическая функция Ганкеля; по индексу α производится суммирование. Очевидно, что φ удовлетворяет (2). Для скорости жидкости $\mathbf{v}$ соответственно получаем $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$, где $\mathbf{v}_j = \nabla\cdot\varphi_j$. Неизвестные коэффициенты $a_{j\alpha}$ находим из граничных условий (3) с точностью до главных по $kR_{1,2}$ членов: $a_{j\alpha} = -ik^2R_j^3U_{j\alpha}/2$.

Перейдем к вычислению радиационных сил. Учитывая симметрию задачи, достаточно найти силу $\mathbf{F}_1$, действующую на 1-ю частицу. Силу $\mathbf{F}_2$ легко получить, поменяв местами в выражении для $\mathbf{F}_1$ обозначения, относящиеся к 1-й и 2-й частицам. Положив в формуле (1) $j = 1$ и подставив в нее выражения для φ и $\mathbf{v}$, имеем

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_1 = \rho_0\left\langle\int_{s_1}[\mathbf{n}_1(v_2^2 - k^2\varphi_2^2)/2 - \mathbf{v}_2(\mathbf{v}_2\cdot\mathbf{n}_1)]\,ds_1\right\rangle + \\ + \rho_0\left\langle\int_{s_1}[\mathbf{n}_1(v_1^2 - k^2\varphi_1^2)/2 - \mathbf{v}_1(\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{n}_1)]\,ds_1\right\rangle + \\ + \rho_0\left\langle\int_{s_1}[\mathbf{n}_1(\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_2 - k^2\varphi_1\varphi_2) - \mathbf{v}_1(\mathbf{v}_2\cdot\mathbf{n}_1) - \mathbf{v}_2(\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{n}_1)]\,ds_1\right\rangle.\end{aligned} \tag{5}$$

У подынтегрального выражения в 1-м слагаемом формулы (5) нет особенностей внутри объема, ограниченного поверхностью s_1. Переходя от интегрирования по поверхности к интегрированию по объему, нетрудно убедиться, что первое слагаемое тождественно равно нулю. Подставляя во второе слагаемое φ_1 и $\mathbf{v}_1$ в соответствии с (4), убеждаемся, что оно также равно нулю. Разложим φ_2 и $\mathbf{v}_2$ в ряд вблизи точки $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1$:

$$\varphi_2 \approx \varphi_2(\mathbf{r}_1) + \boldsymbol{\rho}_1\nabla_1\cdot\varphi_2(\mathbf{r}_1); \tag{6}$$

$$\mathbf{v}_2 \approx \mathbf{v}_2(\mathbf{r}_1) + (\boldsymbol{\rho}_1\cdot\nabla_1)\mathbf{v}_2(\mathbf{r}_1). \tag{7}$$

Подставим (6) и (7), а также φ_1 и $\mathbf{v}_1$ в третье слагаемое (5). Опуская несложные промежуточные выкладки, запишем итоговую формулу

$$\mathbf{F}_1 = -2\pi\rho_0R_1^3\langle(\mathbf{w}_1\cdot\nabla_1)\,\mathbf{v}_2(\mathbf{r}_1)\rangle. \tag{8}$$

В совокупности с (4) формула (8) решает поставленную задачу. Приведем окончательные выражения, которые справедливы как для $\mathbf{F}_1$, так и для $\mathbf{F}_2$:

$$\mathbf{F}_j = \mathbf{F}_{j1} + \mathbf{F}_{j2} + \mathbf{F}_{j3} + \mathbf{F}_{j4},$$

где

$$\mathbf{F}_{j1} = B\,\mathrm{Im}\,\{\exp[-(-1)^j ikl](\mathbf{m}\cdot\mathbf{U}_1^*)(\mathbf{m}\cdot\mathbf{U}_2)\,\mathbf{m}\}\,(kl)^{-1}; \tag{9}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_{j2} = (-1)^j B\,\mathrm{Re}\,\{\exp[-(-1)^j ikl]\,[(\mathbf{m}\cdot\mathbf{U}_2)\,\mathbf{U}_1^* + \\ + (\mathbf{m}\cdot\mathbf{U}_1^*)\,\mathbf{U}_2 + (\mathbf{U}_1^*\cdot\mathbf{U}_2)\,\mathbf{m} - 6\,(\mathbf{m}\cdot\mathbf{U}_1^*)(\mathbf{m}\cdot\mathbf{U}_2)\,\mathbf{m}]\}\,(kl)^{-2};\end{aligned} \tag{10}$$

$$(11)\qquad \mathbf{F}_{j3} = 3B\,\mathrm{Im}\,\{\exp[-(-1)^j ikl]\,[(\mathbf{m}\cdot\mathbf{U}_2)\,\mathbf{U}_1^* + (\mathbf{m}\cdot\mathbf{U}_1^*)\,\mathbf{U}_2 + (\mathbf{U}_1^*\cdot\mathbf{U}_2)\,\mathbf{m} - 5\,(\mathbf{m}\cdot\mathbf{U}_1^*)\,(\mathbf{m}\cdot\mathbf{U}_2)\,\mathbf{m}]\}\,(kl)^{-3};$$

$$(12)\qquad \mathbf{F}_{j4} = -3\,(-1)^j\,B\,\mathrm{Re}\,\{\exp[-(-1)^j ikl]\,[(\mathbf{m}\cdot\mathbf{U}_2)\,\mathbf{U}_1^* + (\mathbf{m}\cdot\mathbf{U}_1^*)\,\mathbf{U}_2 + (\mathbf{U}_1^*\cdot\mathbf{U}_2)\,\mathbf{m} - 5\,(\mathbf{m}\cdot\mathbf{U}_1^*)\,(\mathbf{m}\cdot\mathbf{U}_2)\,\mathbf{m}]\}\,(kl)^{-4}$$

$$\left(B = \pi k^4 R_1^3 R_2^3 \rho_0/2,\ \mathbf{m} = \mathbf{l}/l,\ \mathbf{l} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1\right).$$

Сравним полученные формулы с ранее известными. В [1, 2] приводится формула для силы Кёнига в несжимаемой жидкости при условии, что обе частицы колеблются вдоль линии, соединяющей их центры. В [3] эта формула обобщается на случай, когда направления осцилляций частиц произвольны. При этом она существенно усложняется. Учет сжимаемости жидкости выявляет тот факт, что структура силы Кёнига имеет еще более сложный характер. Во-первых, у силы Кёнига возникают дальнодействующие члены (9)—(11), которые в отличие от «классического» члена (12) обратно пропорциональны не l^4, а l, l^2 и l^3 соответственно. В пределе несжимаемой жидкости ($kl \ll 1$) можно ограничиться только последним членом (12), совпадающим с полученным в [1—3]. Во-вторых, сила Кёнига начинает зависеть от фазы переизлучения kl, вследствие чего при определенных l она может обращаться в нуль и менять знак. В-третьих, $\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 \neq 0$. Последнее связано с тем, что в сжимаемой жидкости часть импульса рассматриваемой системы уносится на бесконечность [5].

В заключение отметим, что изменения в структуре силы Кёнига имеют в некотором смысле универсальный характер. Аналогичные изменения обнаружены у силы Бьеркнеса [5, 6]. Те же эффекты имеют место и в задачах о радиационном взаимодействии в поле электромагнитной волны электрических зарядов [7] и магнитных моментов [8].

ЛИТЕРАТУРА

1. **Ламб Г.** Гидродинамика.— М.; Л.: ОГИЗ, 1947.
2. **Кузнецов Г. Н., Щёкин И. Е.** Взаимодействие пульсирующих пузырьков в вязкой жидкости // Акуст. журн.— 1972.— Т. 18, № 4.
3. **Алексеев В. Н.** К вопросу о радиационной силе давления звука на сферу // Акуст. журн.— 1983.— Т. 29, № 2.
4. **Агранат Б. А., Дубровин М. Н., Хаевский Н. Н. и др.** Основы физики и техники ультразвука.— М.: Высш. шк., 1987.
5. **Немцов Б. Е.** Эффекты радиационного взаимодействия пузырьков в жидкости // Письма в ЖТФ.— 1983.— Т. 9, № 14.
6. **Дойников А. А., Завтрак С. Т.** Учет сжимаемости жидкости в задаче о взаимодействии газовых пузырьков в поле звуковой волны // Акуст. журн.— 1988.— Т. 34, № 2.
7. **Завтрак С. Т.** Радиационное взаимодействие зарядов // Письма в ЖТФ.— 1989.— Т. 15, № 9.
8. **Завтрак С. Т.** Радиационное взаимодействие магнитных моментов в поле плоской электромагнитной волны // Письма в ЖТФ.— 1989.— Т. 15, № 16.

г. Минск *Поступила 20/IX 1989 г., в окончательном варианте — 31/VII 1990 г.*

УДК 532.516 : 536.24.01

Е. А. Рябицкий

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ РАВНОВЕСИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО СЛОЯ ЖИДКОСТИ ПРИ НАЛИЧИИ ВНУТРЕННИХ ИСТОЧНИКОВ ТЕПЛА

При отсутствии массовых сил существенное влияние на устойчивость равновесия неравномерно нагретой жидкости оказывают зависимость коэффициента поверхностного натяжения от температуры и порождаемый ею термокапиллярный эффект. Если равновесный градиент температуры достаточно велик, то наличие термокапиллярных сил на свободной поверхности может привести к возникновению конвективного движения.