О СООТНОШЕНИИ МЕЖДУ НЕКОТОРЫМИ ВИДАМИ ДЕФОРМИРОВАНИЯ

Т. Д. Шермергор *(Сталинск)*

Получены формулы, позволяющие проводить пересчет релаксационных кривых на скоростную зависимость упругого модуля и обратно, а также кривых ползучести на скоростную зависимость податливости и обратно.

Деформирование упруго-вязкого тела сопровождается релаксационными процессами различного типа, в результате чего модуль упругости оказывается зависящим от скорости деформации. В рамках термодинамики обратимых процессов эту зависимость связывают с конечной величиной теплопроводности, в связи с чем различают изотермический и адиабатический модули как два предельных случая [1]. Термодинамика необратимых процессов связывает скоростную зависимость модуля упругости не только с теплопроводностью, но и с другими релаксационными процессами, такими как диффузия и др. Вклад различных релаксационных процессов в суммарный эффект определяется [2-4] функцией распределения констант релаксаций $\psi(s)$. Для одномерной задачи напряжение

$$\sigma = M^{\circ}\varepsilon + L\psi * \varepsilon^{\cdot} \tag{1}$$

где M°— равновесное значение модуля упругости, ε — деформация, L — оператор интегрального преобразования Лапласа, знаком $*$ обозначена операция свертки на отрезке $(0,\ t)$ и точкой — производная по времени.

Равенство (1) эквивалентно известному уравнению Больцмана—Вольтерра [5, 6], функция памяти которого равна $L\psi(t)$. Уравнение Больцмана—Вольтерра, основанное на принципе суперпозиции, предполагает линейность системы. Термодинамический вывод уравнения (1) также основан на предположении линейности системы. В частности, если релаксационный спектр дискретный и включает в себя N точек, то уравнение (1) вырождается в линейное дифференциальное уравнение N-ой степени относительно σ и ε с постоянными коэффициентами.

Важным вопросом является проверка справедливости принципа суперпозиции для различных материалов в широком интервале температур и скоростей деформирования. Непосредственная проверка справедливости уравнения (1) затрудняется неизвестным значением функции памяти $L\psi$. Функцию памяти можно исключить из рассматриваемого уравнения, сопоставляя различные виды деформирования.

В частности, можно сопоставить деформирование при $\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}^{\circ}\cdot 1\ (t)$, $\dot{\varepsilon} = \varepsilon^{\circ}\,\delta\,(t)$ и получить формулы, позволяющие пересчитывать один вид деформации на другой.

Здесь $\delta(t)$ — функция Дирака, а

$$1\,(t) \equiv \int\limits_{-\infty}^{t} \delta\,(t')\,dt'$$

есть единичная функция, равная нулю для $t < 0$ и единице для $t \geqslant 0$. Такие формулы будут являться следствием принципа суперпозиции Больцмана, и их проверка будет косвенной проверкой применимости этого принципа к тому или иному материалу.

Для получения формул, связывающих отмеченные выше типы деформаций, найдем из уравнения (1) модуль упругости при постоянной скорости деформирования:

$$M\,(t) = M^{\circ} + \frac{1}{t}\,L\psi * 1, \qquad \dot{\varepsilon}\,(t) \equiv v\,(t) = v^{\circ}\,1\,(t) \qquad \left(t = \frac{\varepsilon}{v}\right) \tag{2}$$

Выражение, описывающее релаксацию напряжений при постоянной деформации, получим из уравнения (1), приняв $\dot{\varepsilon} = \varepsilon^{\circ}\,\delta\,(t)$

$$M\,(t) = M^{\circ} + L\psi\,(t), \ \varepsilon = \varepsilon^{\circ}\,1\,(t) \tag{3}$$

Здесь t — время, прошедшее после мгновенного деформирования до величины ε°. Уравнение (3) дает релаксацию упругого модуля. Переход от релаксации модуля к релаксации напряжений осуществляется обычным образом — умножением на ε. Обозначим $M\,(t)$, который описывается уравнением (2), через M_v, а описываемый уравнением (3) — через M_{ε}. Индекс у модуля упругости указывает параметр, который удерживается постоянным. Исключая $L\psi$ из (2) и (3), находим

$$[M_{\varepsilon}\,(t) - M^{\circ}] * 1 = [M_v\,(t) - M^{\circ}]\,t \tag{4}$$

Поскольку $1 * 1 = t$, равенство (4) можно упростить

$$M_{\varepsilon} * 1 = M_v\,t \tag{5}$$

Отсюда получаем выражение M_v через M_{ε} и наоборот

$$M_v = \frac{1}{t}\,M_{\varepsilon} * 1, \qquad M_{\varepsilon} = M_v + t\dot{M}_v \tag{6}$$

Для оценки влияния скорости деформирования на напряжения можно ввести скоростной коэффициент ζ, а для оценки релаксации напряжений — коэффициент отдыха α (см. [7])

$$\zeta \equiv \left(\frac{\partial\sigma}{\partial\dot{\varepsilon}}\right)_{\varepsilon}, \quad \alpha \equiv \left(\frac{\partial\sigma}{\partial t}\right)_{\varepsilon} \tag{7}$$

С помощью исходного уравнения (1) получаем следующее выражение для ζ и α:

$$\zeta = L\psi\,(*\,1 - t), \qquad \bar{\alpha} = -L\,[t\psi\,(t)], \qquad \bar{\alpha} \equiv \alpha\,/\,\varepsilon \tag{8}$$

Отсюда, учитывая, что операция свертки с единицей и дифференцирование являются взаимными, находим

$$\bar{\alpha} = -\dot{\zeta}\,/\,t \tag{9}$$

Для выражения ζ через α учтем, что

$$L\psi = \bar{\alpha} * 1 \tag{10}$$

Тогда с помощью выражений (10) и (11) получим

$$\zeta = \bar{\alpha} * 1\,(*\,1 - t) \tag{11}$$

Формулы (6), (9) и (11) позволяют проводить пересчет от деформаций с постоянной скоростью $\dot{\varepsilon}$ к релаксации напряжений и наоборот, если известно, что для данного материала и рассматриваемых деформаций справедлив принцип суперпозиции. С другой стороны, путем одновременного экспериментального определения M_{ε} и M_{v}, либо α и ζ, можно проверить справедливость этих формул, учитывая, что последние получены в предположении, что система описывается линейными дифференциальными либо интегральными операторами. Проверка принципа суперпозиции особенно удобна с помощью второй из формул (6) и формулы (9), поскольку в этом случае нет необходимости знать рассматриваемые кривые для всей области переменного t — достаточно их знать лишь для нескольких одинаковых значений t. Аналогичные соотношения могут быть получены для характеристик деформаций крипа и деформации с постоянной скоростью $\dot{\sigma}$. Исходным уравнением теперь является [3,4].

$$\varepsilon = J^{\circ}\sigma - L\bar{\psi} * \dot{\sigma} \tag{12}$$

где J — податливость, $J^{\circ} \neq \infty$ — ее равновесное значение и $\bar{\psi}$ — функция распределения констант ретардаций. Отсюда, полагая $\dot{\sigma} = \dot{\sigma}^{\circ} \cdot 1\,(t)$ и $\dot{\sigma} = \sigma^{\circ}\,\delta\,(t)$, имеем

$$J = J^{\circ} - \frac{1}{t} L\bar{\psi} * 1, \qquad \dot{\sigma}\,(t) \equiv u\,(t) = u^{\circ}\,1\,(t) \tag{13}$$

$$J = J^{\circ} - L\bar{\psi}\,(t), \qquad \sigma\,(t) = \sigma^{\circ}\,1\,(t) \tag{14}$$

Обозначая, как и прежде, $J\,(t)$ при $\sigma = \mathrm{const}$ через J_{σ}, а $J\,(t)$ при $u = \mathrm{const}$ через J_u и свертывая последнее равенство с единицей, получим

$$J_{\sigma} * 1 = J_u \cdot t \tag{15}$$

Отсюда

$$J_u = \frac{1}{t}\,J_{\sigma} * 1, \qquad J_{\sigma} = J_u + t\dot{J}_u \tag{16}$$

Если, аналогично предыдущему, ввести характеристики ξ и β

$$\xi \equiv \left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\dot{\sigma}}\right)_{\sigma}, \qquad \beta \equiv \left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}\right)_{\sigma} \tag{17}$$

то их взаимосвязь, найденная с помощью уравнения (12), будет определяться соотношениями

$$\bar{\beta} = -\dot{\xi}\,/\,t, \qquad \bar{\beta} \equiv \beta\,/\,\sigma, \qquad \xi = \bar{\beta} * 1\,(*\,1 - t) \tag{18}$$

а выражения ξ и β через $\bar{\psi}$ — формулами

$$\xi = -L\bar{\psi}\,(*\,1 - t), \qquad \bar{\beta} = L\,[t\bar{\psi}\,(t)] \tag{19}$$

Формулы (16) и (18) могут быть использованы для проверки принципа суперпозиции. При этом вторая формула (16) и первая (18), дающие связь в дифференциальной форме, более удобны для этих целей, поскольку они могут быть использованы для любого интервала t, выбор которого может определяться конкретными условиями эксперимента. Первая формула (16) и вторая (18) менее удобны в этом отношении, поскольку предполагают знание механических характеристик на отрезке $(0,\ t)$.

Если же известно, что принцип суперпозиции для данного материала и рассматриваемой области деформаций выполняется, то формулы могут быть использованы для пересчета одного вида деформирования на другой аналогично рассмотренному выше, а также аналогично тому, как такой пересчет делается с релаксации на крип и обратно (см., например, [8, 9]). Следует подчеркнуть, что если пересчет с релаксации напряжений на ползучесть или с ползучести при одном уровне напряжений на ползучесть при другом уровне напряжений [10] может проводиться и для нелинейных систем, то полученные выше пересчетные формулы относятся лишь к малым деформациям, поскольку при больших деформациях поведение реальных тел заведомо нелинейно.

Все полученные выше пересчетные формулы выведены в предположении, что упруго-вязкое тело не имеет стационарной вязкости, учитываемой в реологических моделях путем последовательного включения в схему вязкого элемента. Однако и в этом случае полученные формулы остаются справедливыми. Действительно, исходные уравнения теперь имеют вид [9, 11]

$$\sigma = M^\circ \varepsilon + \eta\dot{\varepsilon} + \chi * \dot{\varepsilon}, \qquad \varepsilon = J^\circ \sigma + \frac{1}{\eta'}\sigma * 1 - \varphi * \dot{\sigma} \tag{20}$$

где χ и φ — функции памяти, и начало действия возмущения на систему принято за нуль. Отсюда находим

$$M_v = M^\circ + \frac{1}{t}(\eta + \chi * 1), \qquad M_\varepsilon = M^\circ + \eta\delta + \chi \tag{21}$$

$$J_u = J^\circ + \frac{t}{2\eta'} - \frac{\varphi * 1}{t}, \qquad J = J^\circ + \frac{t}{\eta'} - \varphi \tag{22}$$

Свертывая вторые формулы (21) и (22) с единицей, а первые формулы (21) и (22) умножая на t, убеждаемся, что и в этом случае выполняются соотношения 5), (6) и (15), (16). Формулы (9), (11) и (18) также остаются справедливыми для (сех $t \neq 0$, поскольку для области $t \geqslant 0$ учет стационарной вязкости дает

$$\zeta = \eta \cdot 1 + \chi(*1 - t), \qquad \bar{\alpha} = \eta\dot{\delta} + \dot{\chi} \tag{23}$$

$$\xi = -\frac{t^2}{2\eta'} - \varphi(*1 - t), \qquad \bar{\beta} = \frac{1}{\eta'} - \dot{\varphi}. \tag{24}$$

Поступила
3.V.1960

ЛИТЕРАТУРА

1. Леонтович М. А. Введение в термодинамику. ГИТТЛ, М.—Л., 1950.
2. Шермергор Т. Д. К термодинамическому описанию неравновесных процессов. Научн. доклады Высшей школы, физ.-мат. науки, 1958, № 5, стр. 147.
3. Шермергор Т. Д. Вычисление функций распределения времен релаксаций для упругого последействия. Физика металлов и металловедение, 1960, т. 9, вып. 2, стр. 161.
4. Шермергор Т. Д. К термодинамической теории упруго-вязких тел. Научн. доклады Высшей школы, физ.-мат. науки, 1959 г. (в печати).
5. Зинер К. Сборник Упругость и неупругость металлов. ИЛ, М., 1954.
6. Кольский Г. Волны напряжения в твердых телах. ИЛ, М., 1955.
7. Шермергор Т. Д. О зависимости напряжения от скорости деформации. Изв. вузов, физика, 1958, № 2, стр. 125.
8. Одинг И. А., Иванова В. С., Бурдукский В. В., Геминов В. Н. Теория ползучести и длительной прочности металлов. Металлургиздат, М., 1959.
9. Gross B. Mathematical Structure of the Theories of Viscoelasticity. Hermann &C°, Paris, 1953.
10. Работнов Ю. Н. Расчет деталей машин на ползучесть. Изв. АН СССР, ОТН, 1948, вып. 6, стр. 789.
11. Bland D. R. On the Founditions of Linear Isotropic Visco-elasticity. Proc. Roy. Soc., 1959, vol. 250, № 1263, p. 524.

ПЕРЕРАСПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ В СПЛОШНОМ ВРАЩАЮЩЕМСЯ ДИСКЕ В ПЕРВОЙ СТАДИИ ПОЛЗУЧЕСТИ

О. В. Соснин

(Новосибирск)

В последнее время были предложены некоторые методы расчета неустановившихся режимов ползучести в дисках на основе гипотезы упрочнения.

Предлагается способ расчета неустановившейся ползучести в сплошном равномерно прогретом диске постоянного профиля на основе гипотезы упрочнения и, как предельное состояние, рассмотрено распределение напряжений в условиях установившейся ползучести.

В заключении приведены результаты расчета неустановившейся ползучести в сплошном диске под действием центробежных сил из стали 40Н при 400° С.

1. Гипотеза упрочнения представляется более оправданной физически, чем общеизвестная теория старения. В решении задач о вращающемся диске существенное упрощение получается за счет того, что основные уравнения теории ползучести берутся по аналогии с теорией пластичности Сен-Венана, использующей ассоциированный закон течения: если $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ — главные напряжения $\dot{p}_1, \dot{p}_2, \dot{p}_3$ — соответствующие