УДК 539.3

ДВИЖЕНИЕ ЖЕСТКОГО ШТАМПА С МАЛОЙ СКОРОСТЬЮ ПО ГРАНИЦЕ ВЯЗКОУПРУГОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ

А. В. Марк

Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, 119526 Москва
E-mail: A-V-Mark@yandex.ru

Рассмотрена контактная задача о взаимодействии жесткого штампа с вязкоупругой полуплоскостью. Определена зависимость перемещения границы полуплоскости от приложенной к ней нормальной нагрузки, выведено и решено методом “малых λ” интегральное уравнение для определения контактного давления. В графическом виде представлены распределения контактных давлений под штампом.

Ключевые слова: вязкоупругая полуплоскость, движущийся штамп, контактное давление.

Введение. Исследованию задач о движении штампов с постоянной скоростью по границе вязкоупругой полуплоскости посвящено большое количество работ, подробный обзор которых приведен в [1]. Однако в этих работах недостаточно изучено распределение контактного давления при малых скоростях движения, а также не рассмотрены случаи штампов с острыми краями. В данной работе получено распределение контактного давления под жестким штампом с острыми краями, движущимися с малой постоянной скоростью.

1. Постановка задачи. Пусть по границе вязкоупругой полуплоскости в отрицательном направлении оси x движется штамп. Принимаются следующие предположения. Силы трения между штампом и полуплоскостью отсутствуют, и вне штампа полуплоскость не нагружена. Область контакта между штампом и полуплоскостью описывается неравенством $x \leqslant a$ (a — полудлина области контакта), основание штампа в области контакта является плоским. Для того чтобы штамп находился в равновесии, к нему приложены погонные сила P и момент. Скорость движения штампа V во много раз меньше скорости звука в материале полуплоскости, поэтому инерционными членами в уравнениях движения можно пренебречь. Процесс является стационарным, поэтому напряжения σ_{lj}, деформации ε_{lj} и перемещения u_l ($l = 1, 2,\ j = 1, 2$) можно представить в форме $f(x + Vt)$. Материал полуплоскости описывается моделью Кельвина [2]

$$\sigma_{lj} = \frac{2G_*\nu}{1-2\nu}\,\theta + 2G_*\varepsilon_{lj}, \qquad \theta = \varepsilon_{ll},$$
$$G_*f(t) = G_f\Big(f(t) - (\gamma^{-1} - \mu^{-1}) \int\limits_{-\infty}^{t} f(\tau) \exp\left[-(t-\tau)/\gamma\right] d\tau\Big), \tag{1.1}$$

где μ, γ — характерные времена ползучести и релаксации соответственно; G_f — мгновенный модуль сдвига; ν — коэффициент Пуассона.

Уравнения равновесия и геометрические соотношения имеют стандартный вид.

Граничные условия в движущейся со штампом системе координат записываются следующим образом (в соответствии с линейной теорией упругости граничные условия сформулированы для недеформированной поверхности тела):

$$x \leqslant a\colon \quad u_2'(x,0) = -\delta_0'(x), \qquad x > a\colon \quad \sigma_{22}(x,0) = 0. \tag{1.2}$$

Кроме того, при $(x,y) \to \infty$ $\sigma_{lj} \to 0$. В (1.2) $u_2'(x,0)$ — производная от вертикальной компоненты перемещения. Так как штамп плоский, то $\delta_0'(x) \equiv 0$. Требуется определить распределение контактного давления под штампом $\sigma_{22}(x,0) = -q(x)$.

Данная задача является смешанной, поэтому сначала с помощью принципа Вольтерры [2] и преобразования Фурье по координате x необходимо решить вспомогательную задачу, чтобы найти зависимость производной вертикального перемещения границы полуплоскости от действующей на нее нормальной нагрузки [3].

2. Вывод и решение интегрального уравнения. Искомая зависимость производной перемещения под штампом от приложенной нагрузки в подвижных координатах имеет вид [4]

$$u_2'(x,0) = -\frac{1}{\pi\Theta_f}\int_{-a}^{a} q(\xi)M(\xi - x)\,d\xi,$$

$$M(w) = \frac{1}{w} - \frac{k}{V}\exp\Big(\frac{w}{\mu V}\Big)\operatorname{Ei}\Big(-\frac{w}{\mu V}\Big),$$

$$k = \frac{1}{\gamma} - \frac{1}{\mu}, \qquad \Theta_f = \frac{G_f}{1-\nu},$$

где $\operatorname{Ei}(w)$ — интегральная показательная функция.

С учетом (1.2) интегральное уравнение для определения контактного давления принимает вид

$$\frac{1}{\pi\Theta_f}\int_{-a}^{a} q(\xi)M(\xi - x)\,d\xi = \delta_0'(x). \tag{2.1}$$

Согласно [4] выражение для $M(w)$ можно представить следующим образом:

$$M(w) = -\frac{1}{2}\,i\int_{-\infty}^{\infty}\Big(1 + \frac{k}{\mu^{-1} - Vsi}\Big)\operatorname{sgn}(s)\,\mathrm{e}^{isw}\,ds. \tag{2.2}$$

Заменим уравнения (2.1), (2.2) следующими уравнениями:

$$\int_{-a}^{a} q(\xi)N(\xi - x)\,d\xi = \Theta_f\delta_0(x),$$

$$N(w) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Big(1 + \frac{k}{\mu^{-1} - Vsi}\Big)\frac{1}{\sqrt{s^2 + \beta^2}}\,\mathrm{e}^{isw}\,ds. \tag{2.3}$$

Исходные уравнения (2.1), (2.2) получаются из (2.3) путем дифференцирования по x и приравнивания β к нулю.

После замены переменной $s = \alpha/(\mu V)$ второе выражение в (2.3) принимает вид

$$N(w) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\alpha + bi}{\alpha + i}\,\frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}\exp\Big(\frac{i\alpha w}{\mu V}\Big)\,d\alpha, \qquad b = 1 + k\mu = \frac{\mu}{\gamma}.$$

Введем следующие безразмерные величины и обозначения:

$$x' = \frac{x}{a}, \quad \xi' = \frac{\xi}{a}, \quad \varphi(x') = \frac{q(x)}{\Theta_f}, \quad \lambda = \frac{\mu V}{a}, \quad g(x') = \frac{\delta_0(x)}{a}, \quad \varepsilon = \beta\mu V.$$

Тогда уравнения (2.3) записываются в виде (штрихи у x' и ξ' опущены)

$$\int_{-1}^{1} \varphi(\xi) N\Big(\frac{\xi - x}{\lambda}\Big)\, d\xi = g(x),$$

$$N\Big(\frac{w}{\lambda}\Big) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha + bi}{\alpha + i}\, \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \varepsilon^2}} \exp\Big(\frac{i\alpha w}{\lambda}\Big)\, d\alpha. \tag{2.4}$$

Решим уравнение (2.4) методом “малых λ” [3, 5]. Рассмотрим систему трех интегральных уравнений

$$\begin{aligned}
&\int_{-1}^{\infty} \varphi_+(\xi) N\Big(\frac{\xi - x}{\lambda}\Big)\, d\xi = g(x) + \int_{-\infty}^{-1} [\varphi_-(\xi) - \varphi_0(\xi)] N\Big(\frac{\xi - x}{\lambda}\Big)\, d\xi, \quad x \in [-1, \infty),\\
&\int_{-\infty}^{1} \varphi_-(\xi) N\Big(\frac{\xi - x}{\lambda}\Big)\, d\xi = g(x) + \int_{1}^{\infty} [\varphi_+(\xi) - \varphi_0(\xi)] N\Big(\frac{\xi - x}{\lambda}\Big)\, d\xi, \quad x \in (-\infty, 1];
\end{aligned} \tag{2.5}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_0(\xi) N\Big(\frac{\xi - x}{\lambda}\Big)\, d\xi = g(x), \qquad x \in (-\infty, \infty). \tag{2.6}$$

Складывая уравнения (2.5) и вычитая (2.6) на общем участке $|x| \leqslant 1$, можно показать, что решение уравнения (2.4) представляет собой линейную комбинацию решений уравнений (2.5), (2.6)

$$\varphi(x) = \varphi_+(x) + \varphi_-(x) - \varphi_0(x). \tag{2.7}$$

Выполнив в левой части первого уравнения (2.5) замену переменных $t = (1 + x)/\lambda$, $\tau = (1 + \xi)/\lambda$, а в правой — $\tau = (1 - \xi)/\lambda$, в левой части второго уравнения (2.5) — $t = (1 - x)/\lambda$, $\tau = (1 - \xi)/\lambda$, а в правой — $\tau = (1 + \xi)/\lambda$, получаем

$$\begin{gathered}
\int_{0}^{\infty} \zeta(\tau) N(t - \tau)\, d\tau = h_1(t) + \int_{2/\mu}^{\infty} [\eta(\tau) - \chi_2(\tau)] N\Big(\frac{2}{\lambda} - \tau - t\Big)\, d\tau,\\
\int_{0}^{\infty} \eta(\tau) N(t - \tau)\, d\tau = h_2(t) + \int_{2/\mu}^{\infty} [\zeta(\tau) - \chi_1(\tau)] N\Big(-\frac{2}{\lambda} + \tau + t\Big)\, d\tau,\\
t \in [0, \infty),
\end{gathered} \tag{2.8}$$

где

$$\begin{aligned}
&\zeta(t) = \varphi_+(\lambda t - 1), \qquad h_1(t) = \lambda^{-1} g(\lambda t - 1), \qquad \chi_1(t) = \varphi_0(\lambda t - 1),\\
&\eta(\tau) = \varphi_-(1 - \lambda t), \qquad h_2(t) = \lambda^{-1} g(1 - \lambda t), \qquad \chi_2(t) = \varphi_0(1 - \lambda t).
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Так как параметр λ мал, то интегралы в правых частях уравнений (2.8) можно опустить. В этом случае получаем следующие интегральные уравнения для определения $\zeta(t)$, $\eta(t)$, $\varphi_0(x)$:

$$\begin{gathered}\int\limits_0^\infty \zeta(\tau)N(t-\tau)\,d\tau = h_1(t), \qquad t\in[0,\infty),\\ \int\limits_0^\infty \eta(\tau)N(t-\tau)\,d\tau = h_2(t), \qquad t\in[0,\infty),\\ \int\limits_{-\infty}^\infty \varphi_0(\xi)N\Big(\frac{\xi-x}{\lambda}\Big)\,d\xi = g(x), \qquad x\in(-\infty,\infty).\end{gathered} \tag{2.10}$$

Далее рассматривается случай плоского штампа:

$$g(x)\equiv g, \qquad g=\mathrm{const}\,. \tag{2.11}$$

Первые два уравнения в (2.10) запишем в виде

$$\begin{gathered}\int\limits_{-\infty}^\infty \zeta_+(\tau)N(t-\tau)\,d\tau = r_+(t)+e_-(t),\\ \int\limits_{-\infty}^\infty \eta_+(\tau)N(t-\tau)\,d\tau = r_+(t)+j_-(t),\\ -\infty<t<\infty,\end{gathered} \tag{2.12}$$

где

$$\zeta_+(t)=\frac12\,(1+\operatorname{sgn}(t))\zeta(t), \qquad \eta_+(t)=\frac12\,(1+\operatorname{sgn}(t))\eta(t),$$
$$e_-(t)=\frac12\,(1-\operatorname{sgn}(t))e(t), \qquad j_-(t)=\frac12\,(1-\operatorname{sgn}(t))j(t),$$
$$r_+(t)=\frac12\,(1+\operatorname{sgn}(t))g\lambda^{-1},$$
$$e(t)=\int\limits_0^\infty \zeta(\tau)N(\tau-t)\,d\tau, \qquad j(t)=\int\limits_0^\infty \eta(\tau)N(t-\tau)\,d\tau.$$

Применяя к уравнениям (2.12) преобразование Фурье

$$F(\alpha)=\int\limits_{-\infty}^\infty f(t)\,\mathrm{e}^{i\alpha t}\,dt,$$

получаем краевые задачи Римана [6, 7]

$$\begin{gathered}Z_+(\alpha)K_1(\alpha)=R(\alpha)+E_-(\alpha), \qquad H_+(\alpha)K_2(\alpha)=R(\alpha)+J_-(\alpha),\\ K_1(\alpha)=\frac{\alpha+bi}{\alpha+i}\,\frac{1}{\sqrt{\alpha^2+\varepsilon^2}}, \qquad K_2(\alpha)=\frac{\alpha-bi}{\alpha-i}\,\frac{1}{\sqrt{\alpha^2+\varepsilon^2}}, \qquad R(\alpha)=\frac{gi}{\lambda\alpha},\end{gathered} \tag{2.13}$$

где $Z_+(\alpha)$, $H_+(\alpha)$, $E_-(\alpha)$, $J_-(\alpha)$ — трансформанты Фурье от функций $\zeta_+(t)$, $\eta_+(t)$, $e_-(t)$, $j_-(t)$ соответственно. Согласно [3] $Z_+(z)$, $H_+(z)$ являются регулярными функциями комплексной переменной $z=\alpha+iy$ в верхней полуплоскости, так как они являются трансформантами Фурье от функций, равных нулю при $t<0$, а функции $E_-(z)$, $J_-(z)$ регулярны в нижней полуплоскости, так как они являются трансформантами Фурье от функций, равных нулю при $t>0$. Можно также показать, что $E_-(z)$, $J_-(z)$ непрерывны при $\mathrm{Im}\,(z)=0$.

Предположим, что функции $\zeta(t)=O(t^{-p})$, $\eta(t)=O(t^{-p})$, $0<p<1$ при $t\to 0$. Тогда согласно [3] $Z_+(z)=O(z^{1-p})$, $H_+(z)=O(z^{1-p})$ при $|z|\to\infty$.

Для функций $E_-(z)$, $J_-(z)$ справедливы оценки [3]

$$E_-(z)=O(\alpha^{-1}),\qquad J_-(z)=O(\alpha^{-1}),\qquad \alpha\to\infty,$$

так как эти функции являются трансформантами ограниченных функций.

Факторизуем функции $K_{1,2}(\alpha)$, т. е. представим их в виде произведения непрерывных краевых значений двух функций $K^+_{1,2}(\alpha)$ и $K^-_{1,2}(\alpha)$, регулярных в верхней и нижней полуплоскостях соответственно:

$$K_1^+(\alpha)=\frac{\alpha+bi}{\alpha+i}\,\frac{1}{\sqrt{\alpha+i\varepsilon}},\qquad K_1^-(\alpha)=\frac{1}{\sqrt{\alpha-i\varepsilon}},$$
$$K_2^+(\alpha)=\frac{1}{\sqrt{\alpha+i\varepsilon}},\qquad K_2^-(\alpha)=\frac{\alpha-bi}{\alpha-i}\,\frac{1}{\sqrt{\alpha-i\varepsilon}}.$$

Тогда уравнения (2.13) можно записать в виде

$$Z_+(\alpha)K_1^+(\alpha)=\frac{R(\alpha)}{K_1^-(\alpha)}+\frac{E_-(\alpha)}{K_1^-(\alpha)},\qquad H_+(\alpha)K_2^+(\alpha)=\frac{R(\alpha)}{K_2^-(\alpha)}+\frac{J_-(\alpha)}{K_2^-(\alpha)}.\tag{2.14}$$

Представим функции $R(\alpha)/K^-_{1,2}(\alpha)$ в виде суммы непрерывных краевых значений функций $R^+_{1,2}(\alpha)$ и $R^-_{1,2}(\alpha)$, регулярных в верхней и нижней полуплоскостях соответственно:

$$R(\alpha)/K^-_{1,2}(\alpha)=R^+_{1,2}(\alpha)+R^-_{1,2}(\alpha),$$
$$R_1^+(\alpha)=-\frac{g\sqrt{\varepsilon}}{\lambda\alpha}\sqrt{i},\qquad R_1^-(\alpha)=\frac{gi}{\lambda\alpha}\,(\sqrt{\alpha-\varepsilon i}-\sqrt{-\varepsilon i}\,),\qquad R_2^+(\alpha)=\frac{R_1^+(\alpha)}{b},$$
$$R_2^-(\alpha)=\frac{gi}{\alpha\lambda}\,(\sqrt{\alpha-\varepsilon i}-\sqrt{-\varepsilon i}\,)\,\frac{\alpha-i}{\alpha-bi}+\frac{gi\sqrt{-\varepsilon i}}{b\lambda}\,\frac{b-1}{\alpha-bi}.$$

В этом случае имеем

$$\begin{gathered}Z_+(\alpha)K_1^+(\alpha)-R_1^+(\alpha)=R_1^-(\alpha)+E_-(\alpha)/K_1^-(\alpha),\\ H_+(\alpha)K_2^+(\alpha)-R_2^+(\alpha)=R_2^-(\alpha)+J_-(\alpha)/K_2^-(\alpha).\end{gathered}\tag{2.15}$$

С учетом свойств $E_-(\alpha)$, $J_-(\alpha)$, а также (2.14) можно сделать вывод, что правые части уравнений (2.15) являются непрерывными функциями, следовательно, и левые части также непрерывны.

Левые и правые части уравнений (2.15) представляют собой краевые значения функций, регулярных в верхней и нижней полуплоскостях комплексной переменной z. Тогда согласно теореме об аналитическом продолжении [6] эти функции являются единой аналитической функцией во всей комплексной плоскости. Согласно обобщенной теореме Лиувилля, а также с учетом того, что функции, краевыми значениями которых являются левые и правые части (2.15), при $\alpha \to \infty$ стремятся к нулю, единая аналитическая функция тождественно равна нулю. Тогда

$$Z_+(\alpha) = \frac{R_1^+(\alpha)}{K_1^+(\alpha)} = \frac{g\sqrt{\varepsilon}}{\lambda}\,\frac{\alpha+i}{\alpha+bi}\,(-\sqrt{i}\,)\,\frac{\sqrt{\alpha+i\varepsilon}}{\alpha},$$

$$H_+(\alpha) = \frac{R_2^+(\alpha)}{K_2^+(\alpha)} = \frac{g\sqrt{\varepsilon}}{b\lambda}\,(-\sqrt{i}\,)\,\frac{\sqrt{\alpha+i\varepsilon}}{\alpha}.$$

Используя обратное преобразование Фурье

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} F(\alpha)\,\mathrm{e}^{-i\alpha t}\,d\alpha,$$

найдем функции $\zeta(t)$, $\eta(t)$:

$$\zeta(t) = \frac{g\sqrt{\varepsilon}}{\lambda}\,\zeta_1(t), \qquad \eta(t) = \frac{g\sqrt{\varepsilon}}{\lambda}\,\eta_1(t),$$

$$\zeta_1(t) = \sqrt{\varepsilon}\,I(t\varepsilon) - (b-1)\int\limits_{-\infty}^{t}\sqrt{\varepsilon}\,I(\varepsilon\xi)\,\mathrm{e}^{-b(t-\xi)}\,d\xi, \qquad \eta_1(t) = \sqrt{\varepsilon}\,I(t\varepsilon), \tag{2.16}$$

$$I(t) = \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{\pi t}} + \operatorname{erf}(\sqrt{t}\,)$$

($\operatorname{erf}(t)$ — функция ошибок) [3]. При вычислении оригиналов использовались интегралы [3]

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}(-\sqrt{i}\,)\,\frac{\sqrt{\alpha+i}}{\alpha}\,\mathrm{e}^{-i\alpha t}\,d\alpha = h(t)I(t),$$

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\alpha+i}{\alpha+bi}\,\mathrm{e}^{-i\alpha t}\,d\alpha = -(b-1)h(t)\,\mathrm{e}^{-bt} + \delta(t),$$

а также теорема о свертке и подобии для преобразования Фурье. В приведенных формулах $h(t)$ и $\delta(t)$ — функции Хевисайда и Дирака соответственно.

Рассмотрим уравнение (2.10), представив ядро (2.4) в виде

$$N(w) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}K(\alpha)\exp(-i\alpha w)\,d\alpha, \qquad K(\alpha) = \lambda\,\frac{\lambda\alpha-bi}{\lambda\alpha-i}\,\frac{1}{\sqrt{(\lambda\alpha)^2+\varepsilon^2}}. \tag{2.17}$$

Решение уравнения (2.10) с ядром (2.17) может быть получено с помощью преобразования Фурье [3]:

$$\varphi_0(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}g(\xi)\,\mathrm{e}^{i\alpha\xi}\,d\xi\,\frac{\mathrm{e}^{-i\alpha x}}{K(\alpha)}\,d\alpha.$$

С учетом (2.11), а также интеграла [3]

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{i\alpha x}\,d\alpha$$

имеем

$$\varphi_0(x) = \frac{g}{K(0)} = \frac{g\varepsilon}{b\lambda}. \tag{2.18}$$

В результате приближенное решение уравнения (2.4) при $|x| \leqslant 1$ с учетом формул (2.7), (2.9), (2.16), (2.18) имеет вид

$$\varphi(x) = \frac{g\sqrt{\varepsilon}}{\lambda}\Big[\zeta_1\Big(\frac{1+x}{\lambda}\Big) + \eta_1\Big(\frac{1-x}{\lambda}\Big) - \frac{\sqrt{\varepsilon}}{b}\Big]. \tag{2.19}$$

Таким образом, получено приближенное решение уравнения (2.3). Осталось получить решение уравнений (2.1), (2.2). Для этого необходимо найти связь между величинами

$$N_0 = \int\limits_{-1}^{1} \varphi(\xi)\, d\xi$$

и $g\sqrt{\varepsilon}\,\lambda^{-1}$, поскольку решение уравнений (2.1), (2.2) определяется с точностью до этой постоянной [4]. Проинтегрировав (2.19), получаем

$$g = N_0\lambda \Big/ \Big\{\sqrt{\varepsilon}\int\limits_{-1}^{1} \Big[\zeta_1\Big(\frac{1+x}{\lambda}\Big) + \eta_1\Big(\frac{1-x}{\lambda}\Big) - \frac{\sqrt{\varepsilon}}{b}\Big]\, dx\Big\}.$$

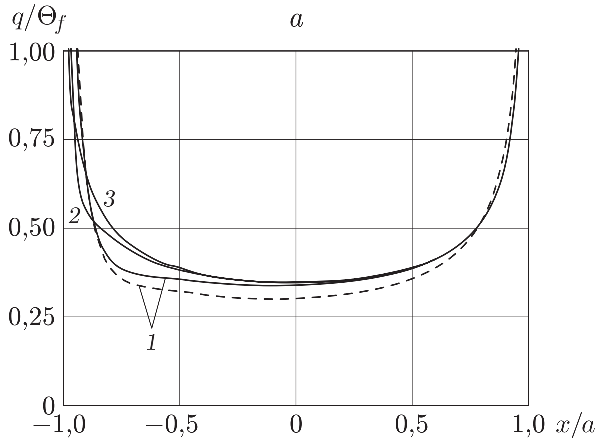
Подставляя эту формулу в (2.19) и устремляя параметр ε к нулю, получаем окончательное выражение для распределения безразмерного контактного давления под плоским штампом

$$\varphi(x) = N_0\Big(\frac{1}{\sqrt{\pi(1+x)}} - (b-1)\,\frac{\operatorname{erfi}\sqrt{(1+x)b\lambda^{-1}}}{\sqrt{b\lambda}}\ \mathrm{e}^{-b(1+x)\lambda^{-1}} + \frac{1}{b}\,\frac{1}{\sqrt{\pi(1-x)}}\Big) \Big/$$

$$\Big/ \int\limits_{-1}^{1}\Big[\frac{1}{\sqrt{\pi(1+x)}} - (b-1)\,\frac{\operatorname{erfi}\sqrt{(1+x)b\lambda^{-1}}}{\sqrt{b\lambda}}\ \mathrm{e}^{-b(1+x)\lambda^{-1}} + \frac{1}{b}\,\frac{1}{\sqrt{\pi(1-x)}}\Big]\, dx,$$

где $\operatorname{erfi}(x) = -i\operatorname{erf}(ix)$.

3. Примеры. Рассмотрим зависимости контактного давления от отношения b времен ползучести и релаксации, а также от безразмерной скорости движения λ. Для контроля



Распределения контактных давлений, полученные различными методами, при $b = 2$ (a) и $b = 3$ ($б$) в случае $N_0 = 1$:
сплошные линии — метод "малых λ", штриховые — метод Мультоппа — Каландии;
1 — $\lambda = 3/16$, *2* — $\lambda = 1/16$, *3* — $\lambda = 1/48$

точности результатов приведем результаты решения уравнений (2.1), (2.2), полученные методом Мультоппа — Каландии [4, 8]. Метод Мультоппа — Каландии имеет иное математическое обоснование и относится к группе методов "больших λ". В этом случае можно предположить, что если при некотором значении λ_0 оба метода дают близкие результаты, то при $\lambda < \lambda_0$ достоверные результаты дает метод "малых λ", а при $\lambda > \lambda_0$ — метод Мультоппа — Каландии.

На рисунке представлены распределения контактных давлений, полученные методом "малых λ", при отношении времен ползучести и релаксации $b = 2, 3$ и $N_0 = 1$. При $b = 2$ максимальное различие кривых *1* составляет 11 %, при $b = 3$ — 14 %.

В случае $b = 3$ при уменьшении скорости движения штампа локальный минимум на кривых зависимости $q/\Theta_f(x/a)$ не исчезает, а становится у́же и сдвигается вверх и влево. В предельном случае, когда штамп не движется, график является симметричным.

Автор выражает благодарность В. М. Александрову за ценные советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Развитие** теории контактных задач в СССР / Под ред. Л. А. Галина. М.: Наука, 1976.
2. **Работнов Ю. Н.** Элементы наследственной механики твердых тел. М.: Наука, 1977.
3. **Александров В. М.** Задачи механики сплошных сред со смешанными граничными условиями / В. М. Александров, Е. В. Коваленко. М.: Наука, 1986.
4. **Александров В. М., Марк А. В.** Движение штампа с постоянной скоростью по границе вязкоупругого основания // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2009. № 1. С. 135–142.
5. **Механика** контактных взаимодействий / Под ред. И. И. Воровича, В. М. Александрова. М.: Физматлит, 2001.
6. **Гахов Ф. Д.** Краевые задачи. М.: Наука, 1977.
7. **Гахов Ф. Д.** Уравнения типа свертки / Ф. Д. Гахов, Ю. И. Черский. М.: Наука, 1978.
8. **Александров В. М.** Контактные задачи в машиностроении / В. М. Александров, Б. Л. Ромалис. М.: Машиностроение, 1986.

Поступила в редакцию 12/V 2011 г.,
в окончательном варианте — 27/IX 2011 г.