

УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ ТОНКИХ ПЛАСТИН И ОБОЛОЧЕК ПРИ ЛИНЕЙНОМ УПРОЧНЕНИИ И ИДЕАЛЬНОМ ЭФФЕКТЕ БАУШИНГЕРА

Г. В. Иванов

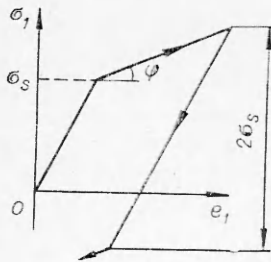
(Новосибирск)

Рассматривается упругопластическое деформирование тонких пластин и оболочек в случае, когда удлинения и сдвиги малы по сравнению с единицей, упрочнение линейное, эффект Баушингера идеальный, напряжения и деформации связаны уравнениями [1, 2]. При численном решении задач с использованием уравнений [1, 2] необходимо вычислять интегралы по толщине пластины (оболочки), соответственно в процессе решения хранить и обрабатывать информацию о напряжениях, остаточных микронапряжениях, характере деформирования в узлах по толщине пластины (оболочки). Ниже аналогично случаю идеального упругопластического деформирования пластин и оболочек [3] формулируются соответствующие уравнения [1, 2] приближенные уравнения, которые не содержат напряжений и связывают скорости деформаций непосредственно с усилиями и моментами. При решении задач с использованием этих уравнений отпадает надобность в вычислении интегралов по толщине пластины (оболочки), что упрощает решение. Численные эксперименты, проведенные для ряда путей деформирования элемента оболочки, показывают удовлетворительное соответствие приближенных уравнений уравнениям [1, 2].

1. Для записи уравнений используем лагранжеву систему координат, ортогональную в недеформированном состоянии. При малых удлинениях и сдвигах рассматриваемую систему координат можно считать ортогональной и в деформированном состоянии. Компоненты тензоров деформаций и напряжений в случае упругопластического деформирования с линейным упрочнением и идеальным эффектом Баушингера (фиг. 1) связаны уравнениями [1, 2]

$$(1.1) \quad \begin{aligned} e_{ij} &= (1 + \nu) \sigma'_{ij} - 3\nu \delta_{ij} \sigma' + \gamma \eta_{ij}, \quad \eta_{ij} = \lambda s'_{ij}; \\ \lambda &= 0, \quad \text{если } 3T^2 < 1 \text{ или } 3T^2 = 1, \quad T' < 0; \\ \lambda &> 0, \quad \text{если } 3T^2 = 1, \quad T' = 0; \\ s'_{ij} &= \sigma'_{ij} - \eta_{ij}, \quad \sigma'_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij} \sigma, \quad \sigma = \frac{1}{3} \delta_{ij} \sigma_{ij}, \\ T^2 &= \frac{1}{2} s'_{ij} s'_{ij}, \quad \gamma = \frac{3}{2} (E/E' - 1), \quad i, j = 1, 2, 3, \end{aligned}$$

где σ_{ij} , e_{ij} — напряжения и деформации, отнесенные соответственно к σ_s и σ_s/E , σ_s — предел текучести при одноосном растяжении (см. фиг. 1); E — модуль Юнга; точка означает дифференцирование по параметру нагружения; ν — коэффициент Пуассона; $E' = \operatorname{tg} \varphi$ — касательный модуль диаграммы одноосного растяжения (см. фиг. 1).



Фиг. 1

Полагаем, что напряженное состояние оболочки плоское ($\sigma_{33} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0$), а деформирование соответствует гипотезе Кирхгофа. Обозначим

$$(1.2) \quad e_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\alpha\beta} + 2\xi \kappa_{\alpha\beta}, \quad \xi = 2z/h, \quad s_{\alpha\beta} = s'_{\alpha\beta} + \delta_{\alpha\beta} s,$$

$$s = -s'_{33} = \delta_{\alpha\beta} s'_{\alpha\beta} = \frac{1}{3} \delta_{\alpha\beta} s_{\alpha\beta}, \quad \alpha, \beta = 1, 2,$$

z — координата, отсчитываемая от срединной поверхности по нормали к ней; h — толщина оболочки. Очевидно,

$$(1.3) \quad \sigma_{\alpha\beta} = s_{\alpha\beta} + \eta_{\alpha\beta} + \delta_{\alpha\beta}\eta, \quad \eta = \delta_{\alpha\beta}\eta_{\alpha\beta}.$$

2. Предположим, что элемент оболочки полностью (по всей толщине) деформируется пластически и скорости упругих деформаций пренебрежимо малы по сравнению со скоростями пластических деформаций. В этом случае

$$(2.1) \quad \dot{\varepsilon}_{\alpha\beta} + 2\zeta\dot{\kappa}_{\alpha\beta} = \gamma\dot{\eta}_{\alpha\beta}, \quad \dot{\eta}_{\alpha\beta} = \lambda\dot{s}'_{\alpha\beta},$$

$$3T^2 = \frac{3}{2} s'_{\alpha\beta} s_{\alpha\beta} = \frac{3}{2} (s_{\alpha\beta} s'_{\alpha\beta} + s^2) = 1$$

и, следовательно,

$$(2.2) \quad \dot{\varepsilon}_{\alpha\beta} = \gamma\dot{q}_{\alpha\beta}, \quad \dot{\kappa}_{\alpha\beta} = \frac{3}{4}\gamma\dot{\theta}_{\alpha\beta}, \quad q_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \eta_{\alpha\beta} d\zeta, \quad \theta_{\alpha\beta} = \int_{-1}^1 \eta_{\alpha\beta} \zeta d\zeta,$$

$$p_{\alpha\beta} \dot{\varepsilon}_{\alpha\beta} + \mu_{\alpha\beta} \dot{\kappa}_{\alpha\beta} = \gamma\dot{\Lambda}, \quad p_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 s_{\alpha\beta} d\zeta, \quad \mu_{\alpha\beta} = \int_{-1}^1 s_{\alpha\beta} \zeta d\zeta,$$

$$6\Lambda\gamma = 2\gamma \int_{-1}^1 \lambda d\zeta = \sqrt{6} \int_{-1}^1 \{(\dot{\varepsilon}_{\alpha\beta} + 2\zeta\dot{\kappa}_{\alpha\beta})(\dot{\varepsilon}_{\alpha\beta} + 2\zeta\dot{\kappa}_{\alpha\beta}) +$$

$$+ [\delta_{\alpha\beta}(\dot{\varepsilon}_{\alpha\beta} + 2\zeta\dot{\kappa}_{\alpha\beta})]^2\}^{1/2} d\zeta, \quad p_{\alpha\beta} = \gamma\partial\Lambda/\partial\dot{\varepsilon}_{\alpha\beta}, \quad \mu_{\alpha\beta} = \gamma\partial\Lambda/\partial\dot{\kappa}_{\alpha\beta}.$$

Согласно (2.2), шесть величин $p_{\alpha\beta}$, $\mu_{\alpha\beta}$ являются функциями пяти аргументов — отношений скоростей деформаций. Поэтому между $p_{\alpha\beta}$, $\mu_{\alpha\beta}$ имеет место такая же зависимость, как и между усилиями, моментами в предельном состоянии идеально пластических оболочек [3, 4]. Аппроксимируем ее уравнением [3, 4]

$$(2.3) \quad f = 1, \quad f = Q_t + \frac{1}{2} Q_m - (Q_t Q_m - Q_{tm}^2)/4(Q_t + 0,48Q_{tm}) +$$

$$+ \frac{1}{2} \sqrt{Q_m^2 + 4Q_{tm}^2}, \quad Q_t = \frac{3}{2} p_{\alpha\beta} p'_{\alpha\beta}, \quad Q_m = \frac{3}{2} \mu_{\alpha\beta} \mu'_{\alpha\beta}, \quad Q_{tm} = \frac{3}{2} p_{\alpha\beta} \mu'_{\alpha\beta},$$

$$p'_{\alpha\beta} = p_{\alpha\beta} - \delta_{\alpha\beta} p, \quad p = \frac{1}{3} \delta_{\alpha\beta} p_{\alpha\beta}, \quad \mu'_{\alpha\beta} = \mu_{\alpha\beta} - \delta_{\alpha\beta} \mu, \quad \mu = \frac{1}{3} \delta_{\alpha\beta} \mu_{\alpha\beta}.$$

В работе [4] показано, что зависимость (2.3) незначительно отличается от точной.

Используя (2.3), заменим уравнения (2.1) приближенными

$$(2.4) \quad \dot{\varepsilon}_{\alpha\beta} = \gamma\dot{q}_{\alpha\beta}, \quad \dot{\kappa}_{\alpha\beta} = \frac{3}{4}\gamma\dot{\theta}_{\alpha\beta}, \quad f = 1,$$

$$\dot{q}_{\alpha\beta} = \varphi\partial f/\partial p_{\alpha\beta}, \quad \dot{\theta}_{\alpha\beta} = \frac{4}{3}\varphi\partial f/\partial \mu_{\alpha\beta}.$$

Обозначим через $t_{\alpha\beta}$, $m_{\alpha\beta}$ усилия и моменты в оболочке

$$t_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \sigma_{\alpha\beta} d\zeta, \quad m_{\alpha\beta} = \int_{-1}^1 \sigma_{\alpha\beta} \zeta d\zeta.$$

Используя (1.3), находим

$$(2.5) \quad \begin{aligned} t_{\alpha\beta} &= p_{\alpha\beta} + q_{\alpha\beta} + \delta_{\alpha\beta} q, \quad q = \delta_{\alpha\beta} q_{\alpha\beta}, \\ m_{\alpha\beta} &= \mu_{\alpha\beta} + \theta_{\alpha\beta} + \delta_{\alpha\beta} \theta, \quad \theta = \delta_{\alpha\beta} \theta_{\alpha\beta}. \end{aligned}$$

Уравнения (2.4), (2.5) образуют приближенную систему уравнений связи скоростей деформаций $\dot{\varepsilon}_{\alpha\beta}$, $\dot{\kappa}_{\alpha\beta}$ с усилиями $t_{\alpha\beta}$ и моментами $m_{\alpha\beta}$, соответствующую случаю, когда элемент оболочки полностью (по всей толщине) деформируется пластически и скорости упругих деформаций пренебрежимо малы по сравнению со скоростями пластических деформаций.

3. В общем случае деформирования элемента оболочки полагаем, что при $f < 1$, а также при $f = 1, f^* < 0$ скорости пластических деформаций по всей толщине элемента равны нулю (элемент деформируется упруго), при $f = 1, f^* = 0$ скорости пластических деформаций определяются уравнениями (2.4). Соответственно

$$(3.1) \quad \begin{aligned} \dot{\varepsilon}_{\alpha\beta} &= (1 + \nu) \dot{t}_{\alpha\beta} - 3\nu \delta_{\alpha\beta} \dot{t} + \gamma q_{\alpha\beta}, \quad q_{\alpha\beta} = c \varphi \partial f / \partial p_{\alpha\beta}, \\ \dot{\kappa}_{\alpha\beta} &= \frac{3}{4} [(1 + \nu) \dot{m}_{\alpha\beta} - 3\nu \delta_{\alpha\beta} \dot{m} + \gamma \theta_{\alpha\beta}], \quad \theta_{\alpha\beta} = \frac{4}{3} c \varphi \partial f / \partial \mu_{\alpha\beta}, \\ c &= \begin{cases} 0, & \text{если } f < 1 \text{ или } f = 1, \quad f^* < 0, \\ 1, & \text{если } f = 1, \quad f^* = 0, \end{cases} \\ t &= \frac{1}{3} \delta_{\alpha\beta} t_{\alpha\beta}, \quad m = \frac{1}{3} \delta_{\alpha\beta} m_{\alpha\beta}. \end{aligned}$$

Дополняя (3.1) соотношениями (2.5), получим приближенную систему уравнений упругопластического деформирования пластин и оболочек с линейным упрочнением и идеальным эффектом Баушингера. Она не содержит напряжений и связывает скорости деформаций $\dot{\varepsilon}_{\alpha\beta}$, $\dot{\kappa}_{\alpha\beta}$ непосредственно с усилиями $t_{\alpha\beta}$ и моментами $m_{\alpha\beta}$. Из (2.5), (3.1) находим

$$(1 - \nu^2) \dot{p}_{\alpha\beta} = (1 - \nu) \dot{\varepsilon}_{\alpha\beta} + \nu \delta_{\alpha\beta} \dot{\varepsilon} - (4 - 5\nu + \gamma) \nu \delta_{\alpha\beta} \dot{q} - \nu(1 + \nu + \gamma) \dot{q}_{\alpha\beta}, \\ (1 - \nu^2) \dot{\mu}_{\alpha\beta} = \frac{4}{3} [(1 - \nu) \dot{\kappa}_{\alpha\beta} + \nu \delta_{\alpha\beta} \dot{\kappa}] - \\ - (4 - 5\nu + \gamma) \nu \delta_{\alpha\beta} \dot{\theta} - \nu(1 + \nu + \gamma) \dot{\theta}_{\alpha\beta}, \\ \dot{\varepsilon} = \delta_{\alpha\beta} \dot{\varepsilon}_{\alpha\beta}, \quad \dot{\kappa} = \delta_{\alpha\beta} \dot{\kappa}_{\alpha\beta}$$

и, следовательно,

$$(1 - \nu^2) \dot{f} = \Omega - c \varphi S,$$

$$\begin{aligned} \Omega &= [(1 - \nu) \dot{\varepsilon}_{\alpha\beta} + \nu \delta_{\alpha\beta} \dot{\varepsilon}] \partial f / \partial p_{\alpha\beta} + \frac{4}{3} [(1 - \nu) \dot{\kappa}_{\alpha\beta} + \nu \delta_{\alpha\beta} \dot{\kappa}] \partial f / \partial \mu_{\alpha\beta}, \\ S &= \nu \{ (4 - 5\nu + \gamma) [(\partial f / \partial p_{11} + \partial f / \partial p_{22})^2 + (4/3)(\partial f / \partial \mu_{11} + \partial f / \partial \mu_{22})^2] + \\ &+ (1 + \nu + \gamma) [(\partial f / \partial p_{\alpha\beta}) \cdot \partial f / \partial p_{\alpha\beta} + (4/3) \partial f / \partial \mu_{\alpha\beta} \cdot \partial f / \partial \mu_{\alpha\beta}] \}. \end{aligned}$$

Поэтому функцию φ в (3.1) можно записать в виде

$$\varphi = \Omega / S,$$

а условия для c в (3.1) заменить условиями

$$c = \begin{cases} 0, & \text{если } f < 1 \text{ или } f = 1, \quad \Omega \leq 0, \\ 1, & \text{если } f = 1, \quad \Omega > 0. \end{cases}$$

При решении задач с использованием уравнений (3.1) вычисление функции f и ее производных удобно вести по формулам

$$\begin{aligned} f &= aQ_t + 2bQ_{tm} + dQ_m, \quad \partial f / \partial p_{\alpha\beta} = 3(a p'_{\alpha\beta} + b \mu'_{\alpha\beta}), \\ \partial f / \partial \mu_{\alpha\beta} &= 3(b p'_{\alpha\beta} + d \mu'_{\alpha\beta}), \quad a = 1 - (Q_{tm}^2 + 0,48Q_m^2) N_1^2, \\ N_1 &= (Q_t + 0,48Q_m)^{-1}, \quad b = Q_{tm} \left(N_2 + \frac{1}{4} N_1 \right), \quad N_2 = (Q_m^2 + 4Q_{tm}^2)^{-1/2}, \\ d &= \frac{1}{2} (1 + Q_m N_2) - (Q_t^2 + 0,48Q_{tm}^2) N_1^2. \end{aligned}$$

4. В случае $\gamma = 0$ элемент оболочки деформируется упруго, уравнения (3.1), (2.5) точно соответствуют уравнениям (1.1)–(1.3). В случае $\gamma = \infty$ уравнения (1.1)–(1.3) переходят в уравнения идеального упруго-пластического деформирования оболочек [3]. Соответствие уравнений (3.1), (2.5) уравнениям (1.1)–(1.3) в этом случае удовлетворительное [3].

Для сопоставления результатов по (3.1), (2.5) с результатами по (1.1)–(1.3) при $0 < \gamma < \infty$ рассмотрим изгиб элемента оболочки при пропорциональном изменении кривизн

$$e_{11} = 2\zeta k_1 t, \quad e_{22} = 2\zeta k_2 t, \quad e_{12} = 0,$$

k_1, k_2 — постоянные; t — параметр деформирования. Полагаем для простоты $\nu = 1/2$.

В этом случае по уравнениям (1.1)–(1.3) деформирование будет упругим

$$(4.1) \quad \sigma_{11} = \frac{4}{3} \zeta (2k_1 + k_2), \quad \sigma_{22} = \frac{4}{3} \zeta (2k_2 + k_1)$$

при $t < t_0$, а также при $t \geq t_0$, $|\zeta| < \zeta_0$,

$$t_0 = \sqrt{3} [16(k_1^2 + k_1 k_2 + k_2^2)]^{-1/2}, \quad \zeta_0 = t_0/t.$$

Деформирование будет пластическим

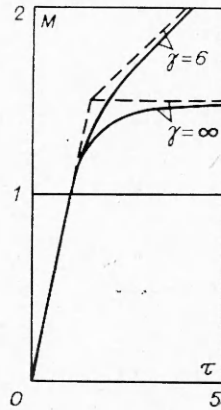
$$(4.2) \quad \begin{aligned} \sigma_{11} &= 4\zeta (2k_1 + k_2) / (3 + 2\gamma), \\ \sigma_{22} &= 4\zeta (2k_2 + k_1) / (3 + 2\gamma) \end{aligned}$$

при $t \geq t_0$, $|\zeta| \geq \zeta_0$. Обозначим

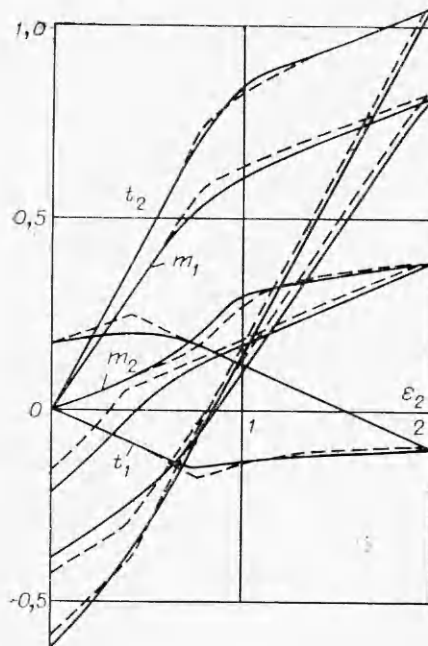
$$\begin{aligned} M &= 9m_{11} [8(2k_1 + k_2)t_0]^{-1} = 9m_{22} [8(2k_2 + k_1)t_0]^{-1}, \\ \tau &= t/t_0. \end{aligned}$$

Из (4.1), (4.2) находим

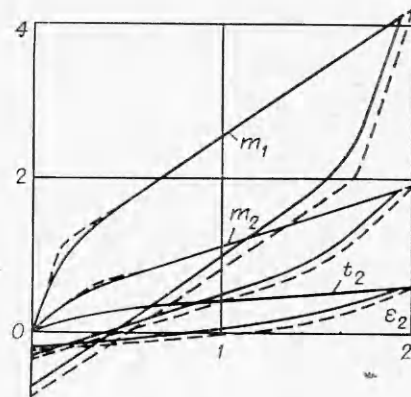
$$(4.3) \quad \begin{aligned} M = \tau, \quad \tau \leq 1; \quad M &= [\tau + \gamma - (1/3)\gamma\tau^2] \times \\ &\times [1 + (2/3)\gamma]^{-1}, \quad \tau \geq 1. \end{aligned}$$



Ф и г. 2



Ф и г. 3



Ф и г. 4

По уравнениям (3.1), (2.5)

$$(4.4) \quad M = \tau, \quad \tau \leq 3/2; \quad M = (\tau + \gamma)[1 + (2/3)\gamma]^{-1}, \quad \tau \geq 3/2.$$

Очевидно, разница в результатах по (4.3), (4.4) при $0 < \gamma < \infty$ не превосходит этой разницы при $\gamma =$

$= \infty$. На фиг. 2 приведены результаты вычислений по (4.3) (сплошные линии) и (4.4) (штриховые линии) при $\gamma = 6, \gamma = \infty$.

На фиг. 3, 4 приведены результаты вычисления усилий и моментов по уравнениям (1.1)–(1.3) (сплошные линии) и уравнениям (3.1), (2.5) (штриховые линии) при деформировании элемента оболочки по закону

$$\begin{aligned} \varepsilon_{12} = \kappa_{12} = \kappa_{22} = 0, \quad \kappa_{11} = \chi \varepsilon_{22}, \quad \varepsilon_{11} = -(1/2) \varepsilon_{22}, \\ \varepsilon_{22} = 1, \quad 0 < t \leq t_1; \quad \varepsilon_{22} = -1, \quad t_1 < t \leq 2t_1, \end{aligned}$$

где точка означает дифференцирование по t . Результаты на фиг. 3 соответствуют $\chi = 0,5$, на фиг. 4 — $\chi = 5$. Вычисление велось при $\nu = 0,3, \gamma = 6, t_1 = 2$. При вычислении $t_{\alpha\beta}, m_{\alpha\beta}$ по (1.1)–(1.3) интегралы заменялись квадратурными формулами Симпсона с 21 узлом. Процедура вычислений аналогична изложенной в [3].

Результаты на фиг. 2–4, вычисления при других путях деформирования элемента оболочки, сопоставление с результатами работы [3] показывают, что уравнения (3.1), (2.5) удовлетворительно соответствуют уравнениям (1.1)–(1.3), разница в результатах при $\gamma < \infty$ не превосходит этой разницы в случае идеального упругопластического деформирования оболочек [3].

Поступила 8 II 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. Ишлинский А. Ю. Общая теория пластичности с линейным упрочнением.—«Укр. мат. журн.», 1954, № 3.
2. Кадашевич Ю. И., Новожилов В. В. Теория пластичности, учитывающая остаточные микронапряжения.— ПММ, 1958, т. 22, вып. 1.

3. Иванов Г. В. Упругопластическое течение оболочек при условии текучести Мизеса.—«Изв. АН СССР. МТТ», 1969, № 3.
 4. Иванов Г. В. Аппроксимация конечного соотношения между усилиями и моментами оболочек при условии пластичности Мизеса.—«Инж. журн. МТТ», 1967, № 6.

УДК 539.3

СИНГУЛЯРНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК ДЛЯ СОСРЕДОТОЧЕННОЙ КАСАТЕЛЬНОЙ НАГРУЗКИ

В. П. Ольшанский

(Харьков)

Как известно [1, 2], при действии сосредоточенных нагрузок решения уравнений оболочек имеют сингулярный характер. Эти решения различными методами строились главным образом для нормальной сосредоточенной силы. Попытка получить фундаментальные решения для касательной силы привела к весьма громоздким результатам [3]. Ниже методом интегральных преобразований Фурье удалось получить более компактные решения в виде степенных и тригонометрических рядов. В дополнение к известным результатам при анализе сингулярностей напряженного состояния в окрестности сосредоточенного источника радиуса r показано, что кроме тангенциальных усилий, растущих, как r^{-1} при $r \rightarrow 0$, более слабую особенность логарифмического вида имеет также одна из перерезывающих сил. Даны асимптотические формулы поведения фундаментальных решений при малых значениях аргумента.

Анализ упругого локального напряженного состояния проводится на основе уравнений теории тонких, пологих, изотропных оболочек. Решение этих уравнений с помощью двумерного преобразования Фурье, подробно изложенное в работе [3], дает следующие значения компонент внутренних силовых факторов:

$$\begin{aligned}
 (1) \quad t_1 &= \frac{-2X}{1-\nu} \left[\frac{1-\nu}{2} A_1 + \frac{2-\nu-\nu^2}{2} A_2 + \left(a_1 + \frac{\lambda+\nu}{1-\nu^2} b^4 a_5 \right) A_5 + \right. \\
 &+ \left. \left(a_2 - \nu a_3 + \frac{\lambda+\nu}{1-\nu^2} b^4 a_4 \right) A_6 \right], \quad t_2 = \frac{-2X}{1-\nu} \left[\nu \frac{1-\nu}{2} A_1 + \frac{\nu}{2} A_2 + \right. \\
 &+ \left. \left(\nu a_1 + \frac{1+\lambda\nu}{1-\nu^2} b^4 a_5 \right) A_5 + \left(\nu a_2 - a_3 + \frac{1+\lambda\nu}{1-\nu^2} b^4 a_4 \right) A_6 \right], \\
 t_{12} &= -X [A_3 - \nu A_4 + (a_1 - a_3) A_8 + a_2 A_7], \quad m_1 = \frac{2X}{(1-\nu) R_2} [a_5 B_1 + \nu a_4 B_2 + \\
 &+ (a_4 + \nu a_5) B_3], \quad m_2 = \frac{2X}{(1-\nu) R_2} [\nu a_5 B_1 + a_4 B_2 + (a_5 + \nu a_4) B_3], \\
 m_{12} &= \frac{2X}{R_2} (a_4 B_4 + a_5 B_5), \\
 q_1 &= \frac{-2X}{(1-\nu) R_2} (a_4 B_7 + a_5 B_6), \quad q_2 = \frac{-2X}{(1-\nu) R_2} (a_4 B_8 + a_5 B_9),
 \end{aligned}$$

где t_1, t_2, t_{12} — тангенциальные и сдвигающие усилия; m_1, m_2, m_{12} — изгибающие и скручивающий моменты; q_1, q_2 — перерезывающие силы; X — внешняя касательная сила, направленная по линии главной кривизны большего радиуса; R_1, R_2 — радиусы кривизны ($R_2 \leq R_1$); ν — коэффи-