УДК 533

КЛАСС ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ИНВАРИАНТНЫХ РЕШЕНИЙ ПОДМОДЕЛИ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ТЕЧЕНИЙ ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА

В. С. Потяков

Уфимский государственный авиационный технический университет, 450000 Уфа
E-mail: vit@ufanet.ru

Для подмодели установившихся осесимметричных течений политропного газа рассматривается класс дифференциально-инвариантных решений задачи, в которой давление не зависит от радиальной координаты. Переопределенная система оказывается совместной и интегрируется. Найдены все решения, задающие трансзвуковые и сверхзвуковые течения с предельной поверхностью. Проведено сравнение этих решений с полученными ранее инвариантными решениями.

Ключевые слова: осесимметричное течение газа, разделение переменных, дифференциально-инвариантные решения.

Введение. В работе [1] предложена программа "ПОДМОДЕЛИ" для исследования всех подмоделей газовой динамики, полученных с помощью симметрий, допускаемых газодинамическими уравнениями. В рамках этой программы в работе [2] рассмотрена подмодель установившихся осесимметричных течений идеального газа с давлением, не зависящим от радиуса. В этом случае подмодель допускает дополнительный оператор растяжения. С помощью этого оператора строятся инвариантные решения, описывающие трансзвуковые течения газа с предельной поверхностью, на которой ускорение бесконечно. Эти решения зависят от трех существенных постоянных (постоянных, которые нельзя привести к каким-либо заданным значениям с помощью групповых преобразований, допускаемых исходной системой уравнений).

В настоящей работе проведена классификация всех решений подмодели установившихся осесимметричных течений политропного газа, давление которого не зависит от радиуса.

В отличие от инвариантных решений общее решение зависит от произвольной функции и двух существенных постоянных. Получены решения, описывающие трансзвуковые течения с предельной поверхностью и с произволом в краевых условиях в одну функцию. Классификация решений основана на обобщенном методе разделения переменных, предложенном в работе [3].

1. Постановка задачи. Установившиеся осесимметричные течения политропного газа в цилиндрической системе координат описываются уравнениями [4. С. 219]

$$U\rho_z + V\rho_r + \rho(U_z + V_r + Vr^{-1}) = 0; \qquad (1.1)$$

$$\rho(UU_z + VU_r) + p_z = 0; \qquad (1.2)$$

Работа выполнена в рамках государственной научно-технической программы Республики Башкортостан № 3.

$$\rho(UV_z + VV_r) + p_r = 0; \tag{1.3}$$

$$Up_z + Vp_r + \gamma p(U_z + V_r + Vr^{-1}) = 0, \tag{1.4}$$

где ρ — плотность; p — давление; V — радиальная компонента скорости; U — проекция скорости на ось z; γ — постоянный показатель адиабаты. Система (1.1)–(1.4) допускает алгебру Ли с базисом из операторов $r\,\partial_r + z\,\partial_z$, ∂_z, $\rho\,\partial_\rho + p\,\partial_p$, $U\,\partial_U + V\,\partial_V - 2\rho\,\partial_\rho$, представляющую собой фактор нормализатора двумерной алгебры L_2 переносов по времени и по углу поворота вокруг оси z в 13-параметрической алгебре, допускаемой общими уравнениями газовой динамики политропного газа [5]. Система (1.1)–(1.4) является инвариантной подмоделью ранга 2 по алгебре L_2.

Далее предполагается, что давление не зависит от радиуса:

$$p_r = 0, \qquad p_z \neq 0. \tag{1.5}$$

Равенство (1.5) связывает дифференциальные инварианты допускаемой алгебры Ли и поэтому определяет класс дифференциально-инвариантных решений.

Цель данной работы — найти все решения переопределенной системы (1.1)–(1.5) и сравнить их с решениями, полученными в работе [2].

2. Представление решения. Уравнение (1.4) после умножения на $\gamma^{-1} r p^{1/(\gamma-1)}$ приводится к дивергентному виду. Введя потенциал φ: $rUp^{1/\gamma} = \varphi_r$, $rVp^{1/\gamma} = -\varphi_z$, находим компоненты скорости

$$U = \varphi_r r^{-1} p^{-1/\gamma}, \qquad V = -\varphi_z r^{-1} p^{-1/\gamma}. \tag{2.1}$$

С учетом (1.5) и (2.1) уравнение (1.3) принимает вид

$$\varphi_z(\varphi_z r^{-1} p^{-1/\gamma})_r - \varphi_r(\varphi_z r^{-1} p^{-1/\gamma})_z = 0.$$

Так как это уравнение представляет собой якобиан функций φ и $\varphi_z r^{-1} p^{-1/\gamma}$, его общее решение имеет вид $rp^{1/\gamma} = (\Phi(\varphi))_z$. Интегрируя полученное решение по z, находим

$$\Phi(\varphi) = r \int p^{1/\gamma}\, dz + \psi(r), \tag{2.2}$$

где $\psi(r)$ — произвольная функция.

Уравнение (1.1) после умножения на r приводится к дивергентному виду. Введем второй потенциал Ψ: $rU\rho = \Psi_r$, $rV\rho = -\Psi_z$. В силу (2.1) получаем

$$\rho\varphi_r = \Psi_r p^{1/\gamma}, \qquad \rho\varphi_z = \Psi_z p^{1/\gamma}. \tag{2.3}$$

Отсюда следует, что якобиан функций φ и Ψ равен нулю, поэтому $\Psi = \chi(\varphi)$ (χ — произвольная функция). Из (2.3) следует представление для плотности

$$\rho = p^{1/\gamma} \chi'(\varphi). \tag{2.4}$$

Таким образом, с помощью формул (2.1), (2.2) и (2.4) получены представления функций U, V, ρ через произвольные функции $\Phi(\varphi)$, $p(z)$, $\psi(r)$, $\chi(\varphi)$.

3. Условие совместности. Подставляя представления (2.1), (2.2), (2.4) в уравнение (1.2) и приводя подобные слагаемые, получаем условие совместности системы уравнений (1.1)–(1.5)

$$\frac{2}{r^2 p'}\Big(\int p^{1/\gamma}\, dz + \psi'\Big) - \frac{1}{\gamma r^2 p^{1/\gamma+1}}\Big(\int p^{1/\gamma}\, dz + \psi'\Big)^2 - \frac{\psi''}{rp'} + \Omega(\varphi) = 0, \tag{3.1}$$

где $\Omega(\varphi) = \Phi'^2 (\chi')^{-1}$.

В равенстве (3.1) необходимо разделить переменные. Для этого (3.1) продифференцируем по r и z. Из полученных двух равенств исключим отношение Ω'/Φ':

$$2\Big(\int p^{1/\gamma}\,dz+\psi'\Big)^2\omega-\frac{\gamma+1}{\gamma^2}\,\frac{p'^2}{p^{2+2/\gamma}}\Big(\int p^{1/\gamma}\,dz+\psi'\Big)^3-$$
$$-\Big(\int p^{1/\gamma}\,dz+\psi'\Big)(6+r\psi''\omega)=r^2\psi'''-3r\psi''. \qquad (3.2)$$

Здесь $\omega=2\gamma^{-1}p'p^{-1-1/\gamma}+p^{-1/\gamma}(p')^{-1}p''$.

Равенство (3.2) представляет собой сумму произведений функций, зависящих от независимых переменных $p(z)$, $\psi(r)$. Разделим (3.2) на функцию, выбранную таким образом, чтобы после дифференцирования по одной из независимых переменных (r или z) число слагаемых в сумме уменьшилось. Эту операцию будем выполнять до тех пор, пока в сумме не останется только два слагаемых. При этом переменные разделяются.

Продифференцируем (3.2) по z; полученное равенство продифференцируем по r и разделим на ψ'', считая $\psi''\neq 0$ (случай $\psi''=0$ рассмотрен ниже). Полученное равенство еще раз продифференцируем по r и разделим на ψ''. В результате имеем соотношение

$$4\omega'-6\,\frac{(\gamma+1)p'^2}{\gamma^2p^{2+1/\gamma}}-6(q+\psi')\Big(\frac{(\gamma+1)p'^2}{\gamma^2p^{2+2/\gamma}}\Big)'=$$
$$=\frac{1}{\psi''}\Big(\frac{r\psi'''}{\psi''}\Big)'\big[\omega p^{1/\gamma}+(q+\psi')\omega'\big]+2\,\frac{(r\psi'')'}{\psi''}\,\omega',$$

где $q=\displaystyle\int p^{1/\gamma}\,dz$. Дифференцируя это соотношение по r, получаем

$$-6\psi''\Big(\frac{(\gamma+1)p'^2}{\gamma^2p^{2+2/\gamma}}\Big)'=\Big[\frac{1}{\psi''}\Big(\frac{r\psi'''}{\psi''}\Big)'\Big]'\big[\omega p^{1/\gamma}+(q+\psi')\omega'\big]+3\Big(\frac{r\psi'''}{\psi''}\Big)'\omega'. \qquad (3.3)$$

Полагая $\omega'\neq 0$ (случай $\omega'=0$ приводит к противоречию), разделим соотношение (3.3) на ω':

$$-6\psi''P_1=\Big[\frac{1}{\psi''}\Big(\frac{r\psi'''}{\psi''}\Big)'\Big]'(P_2+q+\psi')+3\Big(\frac{r\psi'''}{\psi''}\Big). \qquad (3.4)$$

Здесь

$$P_1(z)=\Big(\frac{(\gamma+1)p'^2}{\gamma^2p^{2+2/\gamma}}\Big)'(\omega')^{-1},\qquad P_2(z)=\omega p^{1/\gamma}(\omega')^{-1}.$$

Продифференцировав (3.4) по z и разделив на выражение $P_2'+p^{1/\gamma}\neq 0$ (случай $P_2'+p^{1/\gamma}=0$ приводит к противоречию), получим равенство, в котором переменные разделены:

$$\frac{P_1'}{P_2'+p^{1/\gamma}}=-\frac{1}{6\psi''}\Big[\frac{1}{\psi''}\Big(\frac{r\psi'''}{\psi''}\Big)'\Big]'\equiv N. \qquad (3.5)$$

В (3.5) левая часть зависит от z, а правая — от r, значит, N является постоянной. Таким образом, имеем два уравнения для нахождения функций $p(z)$ и $\psi(r)$.

При использовании условия совместности (3.1) возможны следующие случаи:

1) при $\psi''\neq 0$, $\omega'\neq 0$, $P_2'+p^{1/\gamma}\neq 0$ задача сводится к уравнению (3.5);

2) при $\psi''\neq 0$, $\omega'\neq 0$, $P_2'+p^{1/\gamma}=0$ условие совместности (3.1) не выполняется;

3) при $\psi''\neq 0$, $\omega'=0$ условие совместности (3.1) не выполняется;

4) $\psi''=0$.

4. Случай 1. Проинтегрируем уравнения (3.5):

$$P_1 = N(P_2 + q) + N_1; \tag{4.1}$$

$$\frac{1}{\psi''}\Big(\frac{r\psi'''}{\psi''}\Big)' = -6N\psi' + N_2. \tag{4.2}$$

Здесь N_1, N_2 — постоянные. Подставляя равенства (4.1), (4.2) в уравнение (3.4) и приводя подобные слагаемые, получим $\psi''(2N_1 - 8N\psi' + N_2) = 0$. Так как $\psi'' \neq 0$, то из последнего равенства следует $N = 0$, $N_2 = -2N_1$. С учетом этого проинтегрируем уравнение (4.2):

$$r\psi'' - \psi' = -N_1\psi'^2 + N_3\psi' + N_4 \tag{4.3}$$

(N_3, N_4 — постоянные). Уравнение (4.1) записывается в виде $P_1 = N_1$. Подставим в это равенство выражение для P_1 из (3.4) и проинтегрируем полученное уравнение:

$$(\gamma^{-1} + \gamma^{-2})p^{-2-2/\gamma}p'^2 = N_1\omega + N_5. \tag{4.4}$$

Подставляя представления (4.3) и (4.4) в равенство (3.2), получаем

$$2(q+\psi')^2\omega - (q+\psi')^3(N_1\omega + N_5) - (q+\psi')[6 + \omega(-N_1\psi'^2 + (N_3+1)\psi' + N_4)] =$$
$$= (-N_1\psi'^2 + (N_3+1)\psi' + N_4)(-2N_1\psi' + N_3 - 3). \tag{4.5}$$

Независимая переменная r входит в (4.5) в виде функции $\psi'(r) \neq \mathrm{const}$, поэтому выражение (4.5) можно считать тождеством по ψ'.

Приравнивая в (4.5) коэффициенты при степенях ψ'^3, ψ'^2, ψ', получаем равенства

$$N_5 = -2N_1^2, \qquad \omega(-2N_1q - N_3 + 1) = -6N_1^2q - N_1(3N_3 - 1),$$
$$\omega(-3N_1q^2 - N_4 - (N_3-3)q) = -6N_1^2q^2 + 6 + (N_3-3)(N_3+1) - 2N_1N_4,$$

из которых, исключая ω, находим

$$(1 - N_3 - 2N_1q)(3 - 2N_3 + N_3^2 - 2N_1N_4 - 6N_1^2q^2) =$$
$$= (-3N_1q^2 - N_4 - (N_3-3)q)N_1(1 - 6N_1q - 3N_3).$$

Данное равенство можно считать тождеством по переменной q. Приравнивая к нулю коэффициенты при степенях q, получаем значения постоянных $N_1 = 0$, $N_3 = 1 \Rightarrow N_2 = 0$, $N_5 = 0$. Из (4.4) следует, что $\gamma = -1$. С учетом найденных постоянных и замены

$$q = \int p^{-1}\,dz \neq \mathrm{const} \quad \Rightarrow \quad p = (q')^{-1}, \qquad p' = -\frac{q''}{q'^2} \tag{4.6}$$

уравнение (4.5) принимает вид

$$qq''(2q - N_4) = 2q'q''(3q - N_4). \tag{4.7}$$

Интегрируя уравнение (4.3), получаем

$$\psi = N_8r^3/3 - N_4r/2 + N_9, \tag{4.8}$$

где $N_8 \neq 0$; N_9 — постоянные.

Запишем уравнение (2.2) с учетом (4.8):

$$\Phi(\varphi) = rq(z) + N_8 r^3/3 - N_4 r/2 + N_9. \tag{4.9}$$

Будем считать, что в (4.9) φ, z — независимые переменные, а r — функция этих переменных. Тогда из (4.9) найдем производную

$$r_z = -rq'(q - 2^{-1}N_4 + N_8 r^2)^{-1}.$$

Условие совместности (3.1) запишем в виде

$$2\,\frac{q - N_4/2}{r^2 p'} + \frac{(q - N_4/2 + N_8 r^2)^2}{r^2} + \Omega(\varphi) = 0.$$

Дифференцируя это равенство по z и умножая на $r^2(N_8 r^2 - 2^{-1}N_4)$, с учетом выражения для r_z получим тождество по переменным z, φ:

$$4(q - N_4/2 + N_8 r^2)^2 q' - 4N_8(q - N_4/2 + N_8 r^2) r^2 q' + \\ + (q - N_4/2 + N_8 r^2)(2q'/p' + N_4 p''/p'^2) + 2qq'/p' + 2N_4 q'/p' = 0.$$

В это уравнение переменная φ входит только через степени функции $r(\varphi, z)$, поэтому коэффициенты при r^2 приравняем к нулю, используя замену (4.6):

$$q'''(2q - N_4) = 2q'q''. \tag{4.10}$$

Для функции $q(z)$ имеем два уравнения: (4.7) и (4.10). Выразив из (4.10) q''' и подставив в (4.7), получаем равенство $q'(2q - N_4) = 0$, которое противоречит условию замены (4.6). Итак, в данном случае решений не существует.

Случаи 2, 3 рассматриваются аналогично случаю 1.

5. Случай 4. Осталось рассмотреть случай линейной функции

$$\psi = N_1 r + N_2. \tag{5.1}$$

В силу (5.1) и замены

$$q(z) = \int p^{1/\gamma}\,dz + N_1 \quad \Rightarrow \quad p = (q')^\gamma, \quad p' = \gamma(q')^{\gamma-1}q'', \quad q' \geqslant 0$$

из (2.2) получаем

$$\Phi(\varphi) = rq + N_2, \qquad \Phi' \neq 0. \tag{5.2}$$

Исключив r из условия совместности (3.1), в силу (5.2) имеем

$$-2\,\frac{q^3}{\gamma(q')^{\gamma-1}q''} + \frac{q^4}{\gamma(q')^{\gamma+1}} = \frac{\Phi'^2}{\chi'}\,(\Phi - N_2)^2 = N_3 \leqslant 0,$$

где переменные φ, z разделены; N_3 — постоянная. Неравенство $N_3 \leqslant 0$ следует из (2.4), поэтому

$$\chi' = -(\Phi'(\Phi - N_2))^2/N_3; \tag{5.3}$$

$$2q^3 q'^2 - q^4 q'' = \gamma N_3 (q')^{\gamma+1} q''. \tag{5.4}$$

Поскольку в уравнение (5.4) входит интегрирующий множитель $2(q')^{-3}$, это уравнение можно представить в виде

$$\begin{gathered} (\gamma - 1)q^4 = 2\gamma N_3 (q')^{\gamma+1} + N_4 q'^2, \qquad \gamma \neq 1, \\ q^4 = 2N_3 q'^2 \ln q' + N_4 q'^2, \qquad \gamma = 1. \end{gathered} \tag{5.5}$$

Введя параметр $s = q'(z) \geqslant 0$, решение уравнения (5.5) запишем в параметрическом виде

$$\int p^{1/\gamma}\,dz + N_1 = q = \begin{cases} [(2N_3\gamma s^{\gamma+1} + N_4 s^2)/(\gamma-1)]^{1/4}, & \gamma \neq 1, \\ (2N_3 s^2 \ln s + N_4 s^2)^{1/4}, & \gamma = 1; \end{cases} \tag{5.6}$$

$$\begin{gathered} 2(\gamma-1)(z-z_0) = \int \frac{\gamma(\gamma+1)N_3 s^{\gamma-1} + N_4}{(2\gamma N_3 s^{\gamma-1} + N_4)^{3/4} s^{1/2}/(\gamma-1)}\,ds, \qquad \gamma \neq 1, \\ 2(z-z_0) = \int \frac{2N_3 \ln s + N_3 + N_4}{(2N_3 \ln s + N_4)^{3/4} s^{3/2}}\,ds, \qquad \gamma = 1. \end{gathered} \tag{5.7}$$

Из (5.2) определим $\varphi = \Phi^{(-1)}(\lambda + N_2)$, $\lambda = rq$. Пусть $\theta(\lambda) = (\Phi^{(-1)}(\lambda + N_2))'$ — производная от функции, обратной $\Phi(\varphi)$. Растяжение $-N_3\rho \to \rho$, $-N_3 p \to p$ дает решение системы (1.1)–(1.5) в виде

$$U = \theta(\lambda) q/(rq'); \tag{5.8}$$

$$V = -\theta(\lambda); \tag{5.9}$$

$$\rho = q'(z)(\lambda/\theta(\lambda))^2; \tag{5.10}$$

$$p = -N_3(q'(z))^\gamma, \tag{5.11}$$

где $\lambda = rq(z)$; $\theta(\lambda)$ — произвольная функция; q, $q'(z)$ вычисляются по формулам (5.6), (5.7).

Таким образом, система (1.1)–(1.5) проинтегрирована. Решение задается формулами (5.6)–(5.11) и зависит от произвольной функции $\theta(\lambda)$ и существенных постоянных $N_3 < 0$, $N_4 > 0$ при $\gamma > 1$.

6. Течения газа. Решения системы (1.1)–(1.5) заданы формулами (5.6)–(5.11). При $N_4 = 2c(\gamma-1)$, $N_3 = -ac$, $\theta(\lambda) = -\lambda^{\alpha+1}$, где c, a, α — постоянные, эти решения включают все решения из работы [2].

Запишем уравнение для линий тока: $U\,dr = V\,dz$. Подставляя представление решений (5.8), (5.9), получим уравнение линий тока $qr = b$, где b — постоянная. На решениях (5.6)–(5.10) уравнение звуковой линии $U^2 + V^2 = \gamma p \rho^{-1}$ принимает вид

$$q^4 + r^2 q'^2 q^2 + \gamma N_3 (q')^{\gamma+1} = 0.$$

Все геометрические характеристики решений (5.6)–(5.11) аналогичны характеристикам решений, полученных в работе [2], но краевые условия более общие, чем в [2], и определяются произвольной функцией $\theta(\lambda)$.

Из уравнения (5.5) определяется область значений параметра s:

$$\gamma > 1: \quad s \in [0; (-N_4^{-1} 2\gamma N_3)^{1/(1-\gamma)}], \qquad \gamma = 1: \quad s \in [0; \mathrm{e}^{-N_4/(2N_3)}].$$

При этом линия $z = \mathrm{const}$, соответствующая значению параметра

$$s = (-N_4^{-1}\gamma(\gamma+1)N_3)^{1/(1-\gamma)} \quad \text{при} \quad \gamma \neq 1, \qquad s = \mathrm{e}^{(-N_4-N_3)/(2N_3)} \quad \text{при} \quad \gamma = 1,$$

является предельной, если в (5.7) $z_s = 0$ и производные по z от скоростей (5.8), (5.9) обращаются в бесконечность. На рис. 1 представлена зависимость параметра решения s от z при $N_3 = -1$, $N_4 = 1$, $\gamma = 1{,}4$. На рис. 2 приведены линии тока и звуковая линия, соответствующие тем же значениям постоянных. Линия $z = z_0 \approx 0{,}1728$ является предельной. На рис. 3 показана зависимость давления ρ от z для течения, представленного на рис. 2.

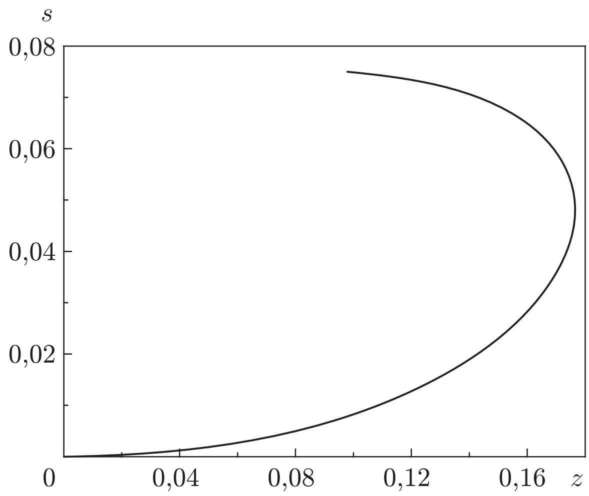

Рис. 1. Зависимость параметра решения s от продольной координаты z

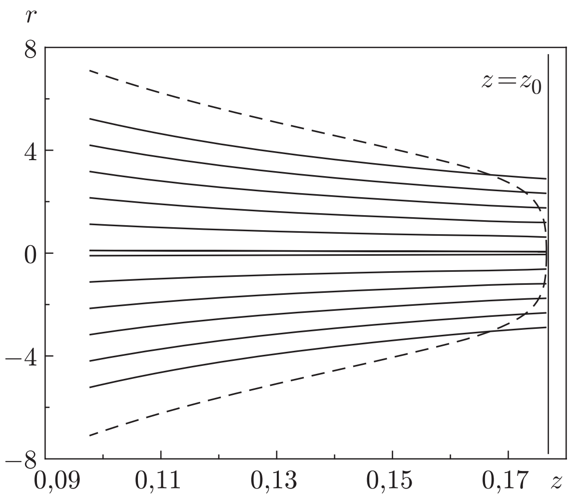

Рис. 2

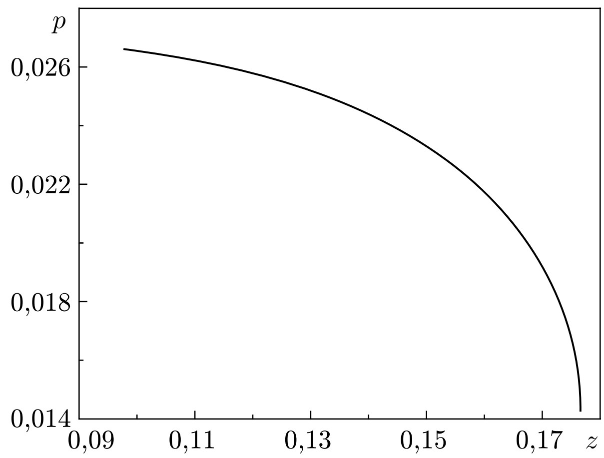

Рис. 3

Рис. 2. Линии тока трансзвукового течения с предельной линией: сплошные линии — линии тока; штриховая — предельная линия

Рис. 3. Зависимость давления p от продольной координаты z для течения, представленного на рис. 2

Таким образом, рассмотрены течения газа, соответствующие решениям (5.6)–(5.11) системы (1.1)–(1.5), и проведено сравнение с приведенными в работе [2] инвариантными решениями.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Овсянников Л. В.** Программа ПОДМОДЕЛИ. Газовая динамика // Прикл. математика и механика. 1994. Т. 58, вып. 4. С. 30–55.

2. **Капцев О. В.** Точные решения уравнений осесимметричного течения идеального газа // Динамика сплошной среды / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 1989. Вып. 91. С. 37–47.

3. **Хабиров С. В.** Частично инвариантные решения для подмодели радиальных движений газа // ПМТФ. 2007. Т. 48, № 5. С. 26–34.
4. **Овсянников Л. В.** Лекции по основам газовой динамики. М.; Ижевск: Ин-т компьютер. исслед., 2003.
5. **Головин С. В.** Оптимальная система подалгебр для алгебры Ли операторов, допускаемых уравнениями газовой динамики в случае политропного газа. Новосибирск, 1996. (Препр. / СО РАН. Ин-т гидродинамики; № 5-96).

Поступила в редакцию 7/XI 2007 г.,
в окончательном варианте — 18/VIII 2008 г.