

УДК 519.632

Экономичный прямой метод численного решения задачи Коши для уравнения Лапласа*

С.Б. Сорокин^{1,2}

¹Институт вычислительной математики и математической геофизики Сибирского отделения Российской академии наук, просп. Акад. М.А. Лаврентьева, 6, Новосибирск, 630090

²Новосибирский национальный исследовательский государственный университет (НГУ), ул. Пирогова, 2, Новосибирск, 630090

E-mail: sorokin@sscc.ru

Сорокин С.Б. Экономичный прямой метод численного решения задачи Коши для уравнения Лапласа // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2019. — Т. 22, № 1. — С. 99–117.

Одним из широко используемых подходов к решению задачи Коши для уравнения Лапласа является сведение ее к обратной задаче. Как правило, для решения последней применяется итерационная процедура. В работе описан экономичный прямой метод численного решения обратной задачи в областях прямоугольной формы. Идея основана на разложении искомого решения по базису, состоящему из собственных функций разностного аналога оператора Лапласа.

DOI: 10.15372/SJNM20190107

Ключевые слова: задача Коши для уравнения Лапласа, обратная задача, численное решение, экономичный прямой метод.

Sorokin S.B. An efficient direct method for the numerical solution to the Cauchy problem for the Laplace equation // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2019. — Vol. 22, № 1. — P. 99–117.

One of widespread approaches to solving the Cauchy problem for the Laplace equation is to reduce it to the inverse problem. As a rule, an iterative procedure to solve the latter is used. In this study, an efficient direct method for the numerical solution of the inverse problem in the rectangular form is described. The main idea is based on the expansion of the desired solution with respect to a basis consisting of eigenfunctions of a difference analogue of the Laplace operator.

Keywords: Cauchy problem for Laplace equation, inverse problem, numerical solution, efficient direct method.

Введение

В работе представлены два экономичных прямых алгоритма численного решения задачи Коши для уравнения Лапласа (задача продолжения). Оба алгоритма основаны на методе разделения переменных.

Задача Коши для уравнения Лапласа является одной из классических некорректных задач. В общих случаях (сложная геометрия расчетной области) численные методы ее решения основываются на фундаментальных результатах в области некорректных задач

*Работа выполнена при финансовой поддержке программы Фундаментальных исследований ОМН РАН “Современные вычислительные и информационные технологии решения больших задач”, программы Фундаментальных исследований Президиума РАН “Интеллектуальные информационные технологии, математическое моделирование, системный анализ и автоматизация”.

(см., например, [1]). Одним из наиболее употребимых методов, несомненно, является метод регуляризации Тихонова, основанный на сведении исходной некорректной задачи к задаче минимизации соответствующего функционала. Поиск минимума функционала осуществляется, как правило, посредством применения итерационных алгоритмов.

В случае стандартных расчетных областей (прямоугольник, круг) при решении задачи Коши для уравнения Лапласа можно рассчитывать на конструирование эффективных алгоритмов, базирующихся на специфике геометрии. В частности, имеется возможность использовать аналитические решения. Первые результаты, относящиеся к построению прямого алгоритма, основанные на разложении решения в ряд Фурье, содержатся в [2]. Однако их реализация сопряжена с определенными трудностями.

В [3, 4] для задачи продолжения, поставленной в прямоугольнике и круге соответственно, под решением понимается функция, минимизирующая функционал А.Н. Тихонова. Далее условия минимума функционала формулируются в виде системы, состоящей из взаимно зависимых прямой и сопряженной задач и содержащей искомую точку минимума функционала в краевых условиях. Используя результаты из [5], на основе метода Фурье выписывается явная формула для решения задачи продолжения.

В [6] задача Коши для уравнения Лапласа, поставленная в прямоугольнике так же, как и в [7], сводится к проблеме моментов и указывается эффективный алгоритм ее численного решения, а значит, и исходной задачи продолжения.

Во всех перечисленных выше работах подлежащие определению функции рассматриваются как функции непрерывного аргумента.

Интересный сравнительный анализ методов численного решения задачи Коши для уравнения Лапласа с использованием ее разностной дискретизации проведен в [8]. В этой работе для исходной задачи, сформулированной на дифференциальном уровне, строится дискретный аналог и реализуются три подхода к нахождению разностного решения. В двух из них решение находится с помощью метода регуляризации А.Н. Тихонова и приема С.К. Годунова соответственно. В третьем на разностном уровне применяется итерационный метод, базирующийся на результатах, полученных в [9].

В данной работе разностная обратная задача из [8], сформулированная для задачи Коши для уравнения Лапласа посредством [9], решается прямым методом.

Известно, что в случае стандартных расчетных областей (прямоугольник, круг) для численного решения прямых задач математической физики имеются экономичные алгоритмы, основанные на методе разделения переменных. Как показывают проведенные в работе рассуждения, метод разделения переменных позволяет строить экономичные алгоритмы и для рассматриваемой задачи продолжения.

Первый из изложенных ниже методов можно трактовать как дискретный аналог алгоритма из [6]. Вторым является новым и позволяет существенно расширить круг решаемых задач.

1. Постановка задачи

В области

$$\Omega = \{(x_1, x_2) \in R^2 : x_1 \in (a, b), x_2 \in (c, d)\}$$

рассмотрим начально-краевую задачу (задача продолжения)

$$\begin{aligned}
-\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} &= 0, & (x_1, x_2) \in \Omega, \\
-\frac{\partial u}{\partial x_1}(a, x_2) &= 0, & x_2 \in [c, d], \\
u(a, x_2) &= u_a(x_2), & x_2 \in [c, d], \\
-\frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1, c) &= 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1, d) = 0, & x_1 \in [a, b].
\end{aligned} \tag{1}$$

Необходимо найти функцию $u(x_1, x_2)$ в области Ω по данным $u_a(x_2)$.

Следуя [9, 10], сведем задачу продолжения (1) к обратной задаче — определить функцию $q(x_2)$ из соотношений:

$$\begin{aligned}
-\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} &= 0, & (x_1, x_2) \in \Omega, \\
-\frac{\partial u}{\partial x_1}(a, x_2) &= 0, & x_2 \in [c, d], \\
u(b, x_2) &= q(x_2), & x_2 \in [c, d], \\
-\frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1, c) &= 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1, d) = 0, & x_1 \in [a, b],
\end{aligned} \tag{2}$$

по дополнительной информации

$$u(a, x_2) = u_a(x_2), \quad x_2 \in (c, d). \tag{3}$$

Таким образом, среди всех задач (2), отличающихся друг от друга функцией $q(x_2)$, надо указать такую задачу (такую $q(x_2)$), чтобы ее решение $u(x_1, x_2)$ удовлетворяло равенству (3).

Будем решать обратную задачу (2), (3) на дискретном уровне.

2. Дискретизация обратной задачи

Построим равномерные сетки:

$$\begin{aligned}
\bar{\omega}_1 &= \left\{ x_{1,i} = x_{1,i-1} + h_1, \quad 1 \leq i \leq N_1 + 1, \quad x_{1,0} = a, \quad x_{1,N_1+1} = b, \quad h_1 = \frac{b-a}{N_1+1} \right\}, \\
\bar{\omega}_2 &= \left\{ x_{2,j} = x_{2,j-1} + h_2, \quad 1 \leq j \leq N_2 + 1, \quad x_{2,0} = c, \quad x_{2,N_2+1} = d, \quad h_2 = \frac{d-c}{N_2+1} \right\}, \\
\bar{\omega} &= \{ x_{i,j} = (x_{1,i}, x_{2,j}) \in \bar{\Omega}, \quad x_{1,i} \in \bar{\omega}_1, \quad x_{2,j} \in \bar{\omega}_2 \}.
\end{aligned}$$

Скалярные произведения в пространствах сеточных функций, определенных на этих сетках и на сетке $\bar{\omega} = \bar{\omega}_1 \cup \bar{\omega}_2$, зададим следующим образом (на правом конце сетки $\bar{\omega}_1$ функции принимают нулевое значение):

$$\begin{aligned}
(u^h, v^h)_{\bar{\omega}_1} &= 0.5h_1 u^h(x_{1,0})v^h(x_{1,0}) + \sum_{i=1}^{N_1} u^h(x_{1,i})v^h(x_{1,i})h_1, \\
(u^h, v^h)_{\bar{\omega}_2} &= 0.5h_2 u^h(x_{2,0})v^h(x_{2,0}) + \sum_{j=1}^{N_2} u^h(x_{2,j})v^h(x_{2,j})h_2 + 0.5h_2 u^h(x_{2,N_2+1})v^h(x_{2,N_2+1}), \\
(u^h, v^h)_{\bar{\omega}} &= (1, (u^h, v^h)_{\bar{\omega}_2})_{\bar{\omega}_1}.
\end{aligned}$$

Дискретный аналог обратной задачи (2), (3) сформулируем следующим образом [11, 12]. Среди всех задач

$$\Lambda_1 u^h(x_{1,i}, x_{2,j}) + \Lambda_2 u^h(x_{1,i}, x_{2,j}) = 0, \quad i = \overline{0, N_1}, \quad j = \overline{0, N_2 + 1}, \quad (4)$$

$$u^h(x_{1, N_1+1}, x_{2,j}) = q^h(x_{2,j}), \quad j = \overline{0, N_2 + 1}, \quad (5)$$

отличающихся друг от друга сеточной функцией $q^h(x_{2,j})$, надо указать такую задачу (такую сеточную функцию $q^h(x_{2,j})$), чтобы ее решение $u^h(x_{1,i}, x_{2,j})$ удовлетворяло равенству

$$u^h(x_{1,0}, x_{2,j}) = u_a(x_{2,j}), \quad x_{2,j} \in [c, d]. \quad (6)$$

Здесь действие операторов Λ_1 и Λ_2 определяются равенствами:

$$\Lambda_1 y^{(1)}(x_{1,i}) = \begin{cases} -\frac{2}{h_1} y_{x_1}^{(1)}(x_{1,0}), & i = 0, \\ -y_{\overline{x_1 x_1}}^{(1)}(x_{1,i}), & i = \overline{1, N_1}, \end{cases}$$

$$\Lambda_2 y^{(2)}(x_{2,j}) = \begin{cases} -\frac{2}{h_2} y_{x_2}^{(2)}(x_{2,0}), & j = 0, \\ -y_{\overline{x_2 x_2}}^{(2)}(x_{2,j}), & j = \overline{1, N_2}, \\ \frac{2}{h_2} y_{x_2}^{(2)}(x_{2, N_2+1}), & j = N_2 + 1. \end{cases}$$

Так же, как это описано, например, в [10], можно ввести оператор

$$A_h : q^h(x_{2,j}) \rightarrow u^h(x_{1,0}, x_{2,j}),$$

где $u^h(x_{1,i}, x_{2,j})$ — решение прямой задачи (4), (5).

Тогда обратная задача (4)–(6) может быть записана в следующем виде:

$$A_h q^h(x_{2,j}) = u_a(x_{2,j}). \quad (7)$$

3. Численное решение дискретной задачи

Далее для решения дискретной задачи (4)–(6) описываются два метода, основанных на широко известных экономичных алгоритмах: разложение в двойной ряд и разложение в однократный ряд [11, 12].

Для их изложения нам понадобятся две спектральные задачи, собственные числа и собственные функции которых выписываются в явном виде [11, 12].

3.1. Спектральные задачи

Задача 1.

$$\Lambda_1 \mu^{(1)}(x_{1,i}) = \lambda^{(1)} \mu^{(1)}(x_{1,i}), \quad i = \overline{0, N_1}, \quad (8)$$

$$\mu^{(1)}(x_{1, N_1+1}) = 0.$$

Собственные функции $\mu_n^{(1)}$, $n = 1, 2, \dots, N_1 + 1$:

$$\mu_n^{(1)}(x_{1,i}) = \sqrt{\frac{2}{b-a}} \sin\left(\frac{(2n-1)\pi(b-x_{1,i})}{2(b-a)}\right), \quad n = 1, 2, \dots, N_1 + 1, \quad i = \overline{0, N_1},$$

$$(\mu_n^{(1)}, \mu_k^{(1)})_{\bar{\omega}_1} = \delta_{nk}.$$

Собственные числа:

$$\lambda_n^{(1)} = \frac{4}{h_1^2} \sin^2\left(\frac{(2n-1)\pi h_1}{4(b-a)}\right), \quad n = 1, 2, \dots, N_1 + 1.$$

Задача 2.

$$\Lambda_2 \mu^{(2)}(x_{2,j}) = \lambda^{(2)} \mu^{(2)}(x_{2,j}), \quad j = \overline{0, N_2 + 1}. \quad (9)$$

Собственные функции $\mu_m^{(2)}$, $m = 0, 1, \dots, N_2 + 1$:

$$\mu_m^{(2)}(x_{2,j}) = \sqrt{\frac{2}{d-c}} \cos\left(\frac{m\pi(x_{2,j}-c)}{d-c}\right), \quad m = 1, 2, \dots, N_2, \quad j = \overline{0, N_2 + 1},$$

$$\mu_0^{(2)}(x_{2,j}) = \sqrt{\frac{1}{d-c}}, \quad j = \overline{0, N_2 + 1},$$

$$\mu_{N_2+1}^{(2)}(x_{2,j}) = \sqrt{\frac{1}{d-c}} \cos\left(\frac{(N_2+1)\pi(x_{2,j}-c)}{d-c}\right), \quad j = \overline{0, N_2 + 1},$$

$$(\mu_m^{(2)}, \mu_l^{(2)})_{\bar{\omega}_2} = \delta_{ml}.$$

Собственные числа:

$$\lambda_m^{(2)} = \frac{4}{h_2^2} \sin^2\left(\frac{m\pi h_2}{2(d-c)}\right), \quad m = 0, 1, \dots, N_2 + 1.$$

3.2. Разложение в двойной ряд

Разложим сеточную функцию $q^h(x_{2,j})$ по базису, составленному из собственных функций дискретной спектральной задачи 2:

$$q^h(x_{2,j}) = \sum_{k=0}^{N_2+1} \alpha_k \mu_k^{(2)}(x_{2,j}). \quad (10)$$

Тогда решение задачи (4), (5) представимо, в силу ее линейности, в виде линейной комбинации

$$u^h(x_{1,i}, x_{2,j}) = \sum_{k=0}^{N_2+1} \alpha_k w_k(x_{1,i}, x_{2,j}) \quad (11)$$

решений $w_k(x_{1,i}, x_{2,j})$ задач ($k = \overline{0, N_2 + 1}$):

$$\Lambda_1 w_k(x_{1,i}, x_{2,j}) + \Lambda_2 w_k(x_{1,i}, x_{2,j}) = 0, \quad i = \overline{0, N_1}, \quad j = \overline{0, N_2 + 1}, \quad (12)$$

$$w_k(x_{1, N_1+1}, x_{2,j}) = \mu_k^{(2)}(x_{2,j}), \quad j = \overline{0, N_2 + 1}. \quad (13)$$

Очевидно, что отыскание $q^h(x_{2,j})$ эквивалентно отысканию коэффициентов α_k разложения (10). А их можно определить из дополнительного условия (6)

$$u^h(x_{1,0}, x_{2,j}) = \sum_{k=0}^{N_2+1} \alpha_k w_k(x_{1,0}, x_{2,j}) = u_a(x_{2,j}).$$

Краевые условия Дирихле (13) задачи (12), (13) учтем в правой части. В результате получим задачу

$$\bar{\Lambda}_1 w_k(x_{1,i}, x_{2,j}) + \Lambda_2 w_k(x_{1,i}, x_{2,j}) = f_k(x_{1,i}, x_{2,j}), \quad i = \overline{0, N_1}, \quad j = \overline{0, N_2 + 1}. \quad (14)$$

Здесь

$$\bar{\Lambda}_1 w_k(x_{1,i}, x_{2,j}) = \begin{cases} \Lambda_1 w_k(x_{1,i}, x_{2,j}), & i = \overline{0, N_1 - 1}, \quad j = \overline{0, N_2 + 1}, \\ \frac{-w_k(x_{1, N_1 - 1}, x_{2,j}) + 2w_k(x_{1, N_1}, x_{2,j})}{h_1^2}, & i = N_1, \quad j = \overline{0, N_2 + 1}, \end{cases} \quad (15)$$

а правая часть задается формулой

$$f_k(x_{1,i}, x_{2,j}) = \begin{cases} 0, & i = \overline{0, N_1 - 1}, \quad j = \overline{0, N_2 + 1}, \\ \frac{\mu_k^{(2)}(x_{2,j})}{h_1^2}, & i = N_1, \quad j = \overline{0, N_2 + 1}. \end{cases} \quad (16)$$

Будем решать задачу (14) методом разложения в двойной ряд.

Представим ее решение и правую часть в виде ряда по собственным функциям

$$\mu_n^{(1)}(x_{1,i}) \mu_m^{(2)}(x_{2,j}), \quad i = \overline{1, N_1 + 1}, \quad j = \overline{0, N_2 + 1},$$

оператора из (14), отвечающим его собственным числам

$$\lambda_n^{(1)} + \lambda_m^{(2)}, \quad i = \overline{1, N_1 + 1}, \quad j = \overline{0, N_2 + 1},$$

$$w_k(x_{1,i}, x_{2,j}) = \sum_{n=1}^{N_1+1} \sum_{m=0}^{N_2+1} w_{k,nm} \mu_n^{(1)}(x_{1,i}) \mu_m^{(2)}(x_{2,j}), \quad (17)$$

$$f_k(x_{1,i}, x_{2,j}) = \sum_{n=1}^{N_1+1} \sum_{m=0}^{N_2+1} f_{k,nm} \mu_n^{(1)}(x_{1,i}) \mu_m^{(2)}(x_{2,j}).$$

Коэффициенты в этих разложениях вычисляются по формулам

$$w_{k,nm} = (w_k, \mu_n^{(1)} \mu_m^{(2)})_{\bar{\omega}}, \quad f_{k,nm} = (f_k, \mu_n^{(1)} \mu_m^{(2)})_{\bar{\omega}}.$$

В соответствии с введенными скалярными произведениями и видом $f_k(x_{1,i}, x_{2,j})$ имеем

$$\begin{aligned} f_{k,nm} &= (f_k, \mu_n^{(1)} \mu_m^{(2)})_{\bar{\omega}} = (1, (f_k(x_{1,i}, x_{2,j}), \mu_n^{(1)}(x_{1,i}) \mu_m^{(2)}(x_{2,j}))_{\bar{\omega}_2})_{\bar{\omega}_1} \\ &= \left(\frac{\mu_k^{(2)}(x_{2,j})}{h_1^2}, \mu_n^{(1)}(x_{1, N_1}) \mu_m^{(2)}(x_{2,j}) \right)_{\bar{\omega}_2} h_1 = \frac{\mu_n^{(1)}(x_{1, N_1})}{h_1} (\mu_k^{(2)}(x_{2,j}), \mu_m^{(2)}(x_{2,j}))_{\bar{\omega}_2} \\ &= \frac{\mu_n^{(1)}(x_{1, N_1})}{h_1} \delta_{km}. \end{aligned}$$

Таким образом для $k = \overline{0, N_2 + 1}$ имеем

$$f_{k,nm} = \begin{cases} 0, & m \neq k, \\ \frac{\mu_n^{(1)}(x_{1, N_1})}{h_1}, & m = k, \quad n = \overline{1, N_1 + 1}. \end{cases}$$

Тогда, в соответствии с [11, 12], для каждого номера $k = \overline{0, N_2 + 1}$ коэффициенты Фурье решения $w_k(x_{1,i}, x_{2,j})$ задачи (14) вычисляются следующим образом:

$$w_{k,nm} = \begin{cases} 0, & m \neq k, \\ \frac{\mu_n^{(1)}(x_{1,N_1})}{h_1} \frac{1}{\lambda_n^{(1)} + \lambda_k^{(2)}}, & m = k, \quad n = \overline{1, N_1 + 1}, \end{cases}$$

а само решение (17) принимает вид

$$w_k(x_{1,i}, x_{2,j}) = \left[\sum_{n=1}^{N_1+1} \frac{\mu_n^{(1)}(x_{1,N_1})}{h_1} \frac{1}{\lambda_n^{(1)} + \lambda_k^{(2)}} \mu_n^{(1)}(x_{1,i}) \right] \mu_k^{(2)}(x_{2,j}).$$

На левой границе сетки расчетной области (точки $(x_{1,0}, x_{2,j})$, $j = \overline{0, N_2 + 1}$) оно принимает значения

$$w_k(x_{1,0}, x_{2,j}) = \gamma_k \mu_k^{(2)}(x_{2,j}). \quad (18)$$

Здесь введено обозначение

$$\gamma_k = \left[\sum_{n=1}^{N_1+1} \frac{\mu_n^{(1)}(x_{1,N_1})}{h_1} \frac{1}{\lambda_n^{(1)} + \lambda_k^{(2)}} \mu_n^{(1)}(x_{1,0}) \right]. \quad (19)$$

А значит, все решение (11) задачи (4), (5) на левой границе записывается в форме

$$u^h(x_{1,0}, x_{2,j}) = \sum_{k=0}^{N_2+1} \alpha_k w_k(x_{1,0}, x_{2,j}) = \sum_{k=0}^{N_2+1} \alpha_k \gamma_k \mu_k^{(2)}(x_{2,j}).$$

Наконец, для отыскания коэффициентов α_k в (11) разложим дополнительную информацию $u_a(x_{2,j})$ по базису $\mu_k^{(2)}(x_{2,j})$, $k = \overline{0, N_2 + 1}$:

$$\begin{aligned} u_a(x_{2,j}) &= \sum_{k=0}^{N_2+1} \beta_k \mu_k^{(2)}(x_{2,j}), \\ \beta_k &= \left(u_a(x_{2,j}), \mu_k^{(2)}(x_{2,j}) \right)_{\bar{\omega}_2}, \end{aligned} \quad (20)$$

и приравняем два последних разложения

$$u^h(x_{1,0}, x_{2,j}) = \sum_{k=0}^{N_2+1} \alpha_k \gamma_k \mu_k^{(2)}(x_{2,j}) = u_a(x_{2,j}) = \sum_{k=0}^{N_2+1} \beta_k \mu_k^{(2)}(x_{2,j}).$$

Отсюда коэффициенты α_k равны:

$$\alpha_k = \frac{\beta_k}{\gamma_k}, \quad (21)$$

и искомое краевое условие дискретной задачи (4)–(6) вычисляется по формуле (10):

$$q^h(x_{2,j}) = \sum_{k=0}^{N_2+1} \alpha_k \mu_k^{(2)}(x_{2,j}).$$

Итак, решение дискретной обратной задачи (4)–(6) с использованием метода разложения в двойной ряд состоит из четырех этапов:

1. Вычисляются коэффициенты Фурье дополнительной информации

$$\beta_k, \quad k = 0, 1, \dots, N_2 + 1,$$

по формуле (20) (БПФ).

Стоимость порядка $N_2 \ln N_2$ операций.

2. По формуле (19) вычисляются величины γ_k .

Стоимость порядка $N_1 N_2$ операций.

3. По формуле (21) вычисляются коэффициенты Фурье

$$\alpha_k, \quad k = 0, 1, \dots, N_2 + 1,$$

искомой функции $q^h(x_{2,j})$.

Стоимость N_2 операций.

4. Вычисляются значения функции $q^h(x_{2,j})$ в точках сетки $\bar{\omega}_2$ по формуле (10) (БПФ).

Стоимость порядка $N_2 \ln N_2$ операций.

3.3. Разложение в однократный ряд

В этом пункте задачу (14)–(16) будем решать методом разложения в однократный ряд.

Рассматривая сеточные функции $w_k(x_{1,i}, x_{2,j})$ и $f_k(x_{1,i}, x_{2,j})$ при фиксированном i как сеточные функции аргумента j , разложим их по базису $\mu_m^{(2)}$, $m = 0, 1, \dots, N_2 + 1$:

$$w_k(x_{1,i}, x_{2,j}) = \sum_{m=0}^{N_2+1} w_{k,m}(i) \mu_m^{(2)}(x_{2,j}), \quad w_{k,m}(i) = (w_k(x_{1,i}, x_{2,j}), \mu_m^{(2)}(x_{2,j}))_{\bar{\omega}_2}, \quad (22)$$

$$f_k(x_{1,i}, x_{2,j}) = \sum_{m=0}^{N_2+1} f_{k,m}(i) \mu_m^{(2)}(x_{2,j}), \quad f_{k,m}(i) = (f_k(x_{1,i}, x_{2,j}), \mu_m^{(2)}(x_{2,j}))_{\bar{\omega}_2}.$$

Подставляя эти разложения в уравнение (14) и учитывая равенства

$$\Lambda_2 \mu^{(2)}(x_{2,j}) = \lambda^{(2)} \mu^{(2)}(x_{2,j}), \quad j = \overline{0, N_2 + 1},$$

имеем

$$\left[\sum_{m=0}^{N_2+1} \bar{\Lambda}_1 w_{k,m}(i) + \lambda_m^{(2)} w_{k,m}(i) \right] \mu_m^{(2)}(x_{2,j}) = \sum_{m=0}^{N_2+1} f_{k,m}(i) \mu_m^{(2)}(x_{2,j}).$$

Используя линейную независимость собственных функций, получаем систему линейных уравнений для каждого номера $m = 0, 1, \dots, N_2 + 1$:

$$\bar{\Lambda}_1 w_{k,m}(i) + \lambda_m^{(2)} w_{k,m}(i) = f_{k,m}(i), \quad i = \overline{0, N_1}. \quad (23)$$

В соответствии с введенными скалярными произведениями и видом $f_k(x_{1,i}, x_{2,j})$ (16) для каждого фиксированного номера k имеем

$$f_{k,m}(i) = (f_k(x_{1,i}, x_{2,j}), \mu_m^{(2)}(x_{2,j}))_{\bar{\omega}_2} = \begin{cases} 0, & i = \overline{0, N_1 - 1}, m = \overline{0, N_2 + 1}, \\ \left(\frac{\mu_k^{(2)}}{h_1^2}, \mu_m^{(2)} \right)_{\bar{\omega}_2} = \frac{1}{h_1^2} \delta_{km}, & i = N_1, m = \overline{0, N_2 + 1}. \end{cases} \quad (24)$$

Поэтому при фиксированном k все системы (23) (предназначенные для определения коэффициентов Фурье $w_{k,m}(i)$, $i = \overline{0, N_1}$; $m = \overline{0, N_2 + 1}$) для номеров $m \neq k$ будут однородными. Следовательно, их решения тождественно равны нулю:

$$w_{k,m}(i) = 0, \quad i = \overline{0, N_1}, \quad \forall m \neq k.$$

Единственной неоднородной системой из (23) будет система с номером $m = k$. Имея в виду (24), эта система записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \bar{\Lambda}_1 w_{k,k}(i) + \lambda_k^{(2)} w_{k,k}(i) &= 0, \quad i = \overline{0, N_1 - 1}, \\ \bar{\Lambda}_1 w_{k,k}(N_1) + \lambda_k^{(2)} w_{k,k}(N_1) &= \frac{1}{h_1^2}. \end{aligned} \quad (25)$$

Суммируя вышесказанное, решение (22) вспомогательной (базисной) задачи (14)–(16) с номером k записывается в форме

$$w_k(x_{1,i}, x_{2,j}) = w_{k,k}(i) \mu_k^{(2)}(x_{2,j}). \quad (26)$$

Тогда решение задачи (4), (5) представимо, в силу ее линейности, в виде линейной комбинации

$$u^h(x_{1,i}, x_{2,j}) = \sum_{k=0}^{N_2+1} \alpha_k w_k(x_{1,i}, x_{2,j})$$

решений $w_k(x_{1,i}, x_{2,j})$ задач (14), (16) ($k = \overline{0, N_2 + 1}$). С учетом (26) имеем

$$u^h(x_{1,i}, x_{2,j}) = \sum_{k=0}^{N_2+1} \alpha_k w_{k,k}(i) \mu_k^{(2)}(x_{2,j}). \quad (27)$$

На левой границе сеточной области полученное решение принимает вид

$$u^h(x_{1,0}, x_{2,j}) = \sum_{k=0}^{N_2+1} \alpha_k w_{k,k}(0) \mu_k^{(2)}(x_{2,j}).$$

Разложим дополнительную информацию (6) по базису $\mu_k^{(2)}(x_{2,j})$, $k = \overline{0, N_2 + 1}$:

$$u_a(x_{2,j}) = \sum_{k=0}^{N_2+1} \beta_k \mu_k^{(2)}(x_{2,j}).$$

Приравняем, в соответствии с (6), два последних разложения

$$\sum_{k=0}^{N_2+1} \alpha_k w_{k,k}(0) \mu_k^{(2)}(x_{2,j}) = \sum_{k=0}^{N_2+1} \beta_k \mu_k^{(2)}(x_{2,j}).$$

А значит, коэффициенты α_k равны:

$$\alpha_k = \frac{\beta_k}{w_{k,k}(0)}. \quad (28)$$

Подставляя их в (10), получаем решение обратной задачи (4)–(6)

$$q^h(x_{2,j}) = \sum_{k=0}^{N_2+1} \frac{\beta_k}{w_{k,k}(0)} \mu_k^{(2)}(x_{2,j}).$$

Итак, решение дискретной обратной задачи (4)–(6) с использованием метода разложения в однократный ряд состоит из следующих этапов:

1. Вычисляются коэффициенты Фурье дополнительной информации

$$\beta_k, \quad k = 0, 1, \dots, N_2 + 1,$$

по формуле (20) (БПФ).

Стоимость порядка $N_2 \ln N_2$ операций.

2. Вычисляются методом прогонки решения задач (25) для $k = 0, 1, \dots, N_2 + 1$.

Стоимость порядка $N_1 N_2$ операций.

3. По формуле (28) вычисляются коэффициенты Фурье

$$\alpha_k, \quad k = 0, 1, \dots, N_2 + 1,$$

искомой функции $q^h(x_{2,j})$.

Стоимость $N_2 + 2$ операций.

4. Вычисляются значения функции $q^h(x_{2,j})$ в точках сетки $\bar{\omega}_2$ по формуле (10) (БПФ).

Стоимость порядка $N_2 \ln N_2$ операций.

Замечание. Для рассматриваемого в работе случая решения задач (25) можно получить в виде разложения по собственным функциям оператора \bar{L}_1 :

$$w_{k,k}(i) = \sum_{n=1}^{N_1+1} \frac{\mu_n^{(1)}(x_{1,N_1})}{h_1} \frac{1}{\lambda_n^{(1)} + \lambda_k^{(2)}} \mu_n^{(1)}(x_{1,i}).$$

Отсюда получаем

$$w_{k,k}(0) = \sum_{n=1}^{N_1+1} \frac{\mu_n^{(1)}(x_{1,N_1})}{h_1} \frac{1}{\lambda_n^{(1)} + \lambda_k^{(2)}} \mu_n^{(1)}(x_{1,0}),$$

что совпадает с выражением для γ_k из (19). А значит, совпадают и решения, получаемые по обоим алгоритмам.

4. Численный эксперимент

Для проверки работоспособности представленных алгоритмов были проведены тестовые расчеты. Вычислительные эксперименты проводились для задач, имеющих аналитическое решение. Исходная задача Коши для первого теста взята из [8], а для второго сконструирована по аналогии с [13]. Результаты расчетов по обоим алгоритмам совпали.

При реализации алгоритмов был применен метод Лаврентьева [14, 15] для регуляризации уравнения (7), заключающийся в его замене уравнением

$$\alpha q^h + A_h q^h(x_{2,j}) = u_a(x_{2,j}), \quad \alpha > 0.$$

Параметр α подбирался экспериментально.

4.1. Тест 1

Исходная задача Коши:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + ku &= 0, & (x_1, x_2) &\in (0, 1) \times (0, \pi), \\ -\frac{\partial u}{\partial x_1}(0, x_2) &= 0, & x_2 &\in [0, \pi], \\ u(0, x_2) &= u_a(x_2), & x_2 &\in [0, \pi], \\ -\frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1, 0) &= 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1, \pi) = 0, & x_1 &\in [0, 1]. \end{aligned} \quad (29)$$

В качестве условия Дирихле на левой границе $x_1 = 0$ бралась функция

$$u_a(x_2) = \frac{1}{\operatorname{ch}(\sqrt{k})} - \frac{1}{\operatorname{ch}(\sqrt{k+4})} \cos(2x_2). \quad (30)$$

Точное решение этой задачи имеет вид

$$u(x_1, x_2) = \frac{1}{\operatorname{ch}(\sqrt{k})} \operatorname{ch}(\sqrt{k} x_1) - \frac{1}{\operatorname{ch}(\sqrt{k+4})} \operatorname{ch}(\sqrt{k+4} x_1) \cos(2x_2).$$

Его след на правой границе $x_1 = 1$ равен

$$q(x_2) = u(1, x_2) = 1 - \cos(2x_2). \quad (31)$$

Итак, в расчетах, в соответствии с описанными алгоритмами, исходя из (29), (30), определялась функция (31).

Расчеты проводились на сетках: $N_1 \times N_1 = 20 \times 20$, $N_1 \times N_1 = 40 \times 40$, $N_1 \times N_1 = 80 \times 80$ для $k = 1$.

На рисунке 1 сплошной линией представлено точное (аналитическое) решение $q(x_2) = u(1, x_2) = 1 - \cos(2x_2)$, а точками — полученное на сетке $N_1 \times N_1 = 20 \times 20$ численное решение.

На рис. 2 изображены графики погрешностей: разность между точным и соответствующим численным решениями. Точками отмечены абсолютные значения погрешности. Линии, соединяющие точки, нарисованы для наглядности. График с наибольшей амплитудой соответствует расчету, произведенному на сетке $N_1 \times N_1 = 20 \times 20$, график с наименьшей амплитудой соответствует сетке $N_1 \times N_1 = 80 \times 80$, третий график соответствует сетке $N_1 \times N_1 = 40 \times 40$.

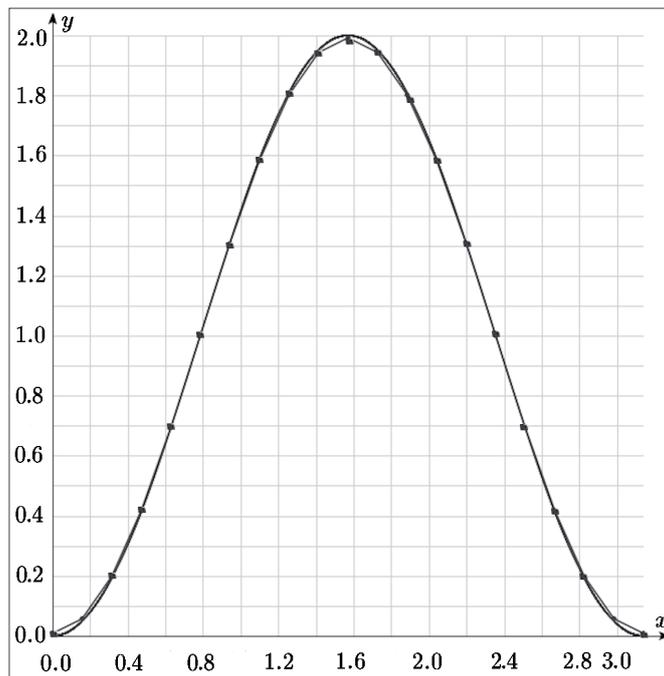


Рис. 1. Задача (29)–(31), $k = 1$. Точное решение — сплошная линия, численное решение — точки. Сетка 20×20 , $\alpha = 10^{-7}$

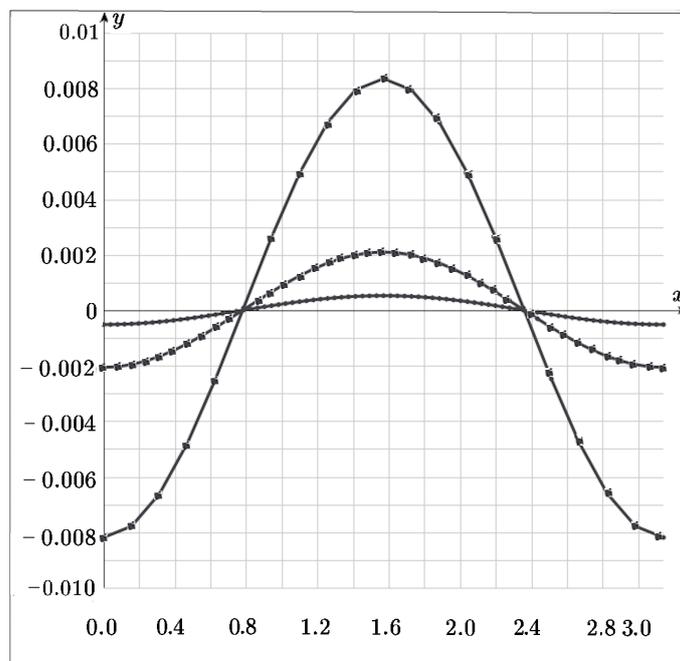


Рис. 2. Задача (29)–(31), $k=1$. Погрешность решения на сетках: 20×20 , 40×40 , 80×80 ; $\alpha = 10^{-7}$

4.2. Тест 2

Исходная задача Коши для уравнения Лапласа:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} &= 0, & (x_1, x_2) \in (0, 1) \times (0, \pi), \\ -\frac{\partial u}{\partial x_1}(0, x_2) &= 0, & x_2 \in [0, \pi], \\ u(0, x_2) &= \frac{1}{n} \cos(n x_2), & x_2 \in [0, \pi], \\ -\frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1, 0) &= 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1, \pi) = 0, & x_1 \in [0, 1]. \end{aligned} \quad (32)$$

Точное решение этой задачи имеет вид $u(x_1, x_2) = \frac{1}{n} \cos(n x_2) \operatorname{ch}(n x_1)$. Его след на правой границе $x_1 = 1$ равен

$$q(x_2) = u(1, x_2) = \frac{1}{n} \cos(n x_2) \operatorname{ch}(n). \quad (33)$$

Так же, как и в предыдущем тесте, в расчетах, в соответствии с описанными алгоритмами, исходя из (32), определялась функция (33).

На рис. 3 сплошной линией представлено точное (аналитическое) решение, соответствующее значению $n = 1$, а точками — полученное на сетке $N_1 \times N_1 = 20 \times 20$ численное решение.

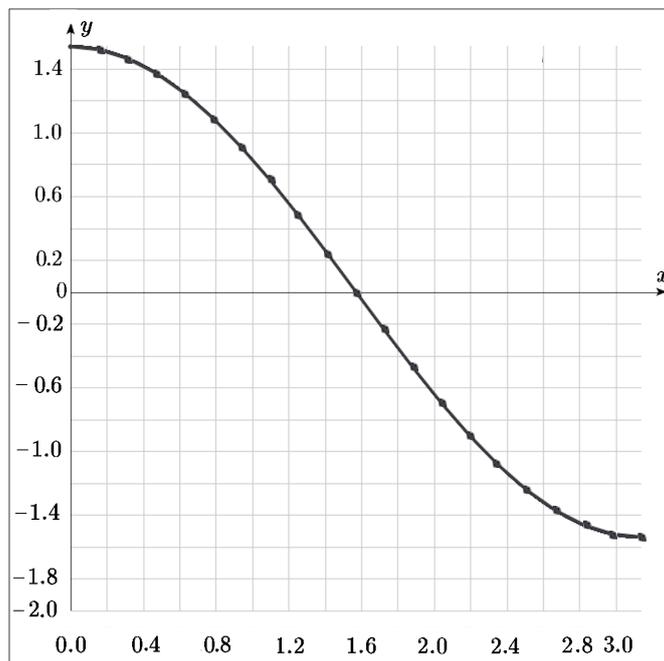


Рис. 3. Тест 2, $n = 1$. Точное решение — сплошная линия, численное решение — точки. Сетка 20×20 , $\alpha = 10^{-7}$

На рис. 4 изображены графики погрешностей. Точками отмечены абсолютные значения погрешности. Линии, соединяющие точки, нарисованы для наглядности. График с наибольшей амплитудой соответствует расчету, произведенному на сетке $N_1 \times N_1 = 20 \times 20$, график с наименьшей амплитудой соответствует сетке $N_1 \times N_1 = 80 \times 80$, третий график соответствует сетке $N_1 \times N_1 = 40 \times 40$.

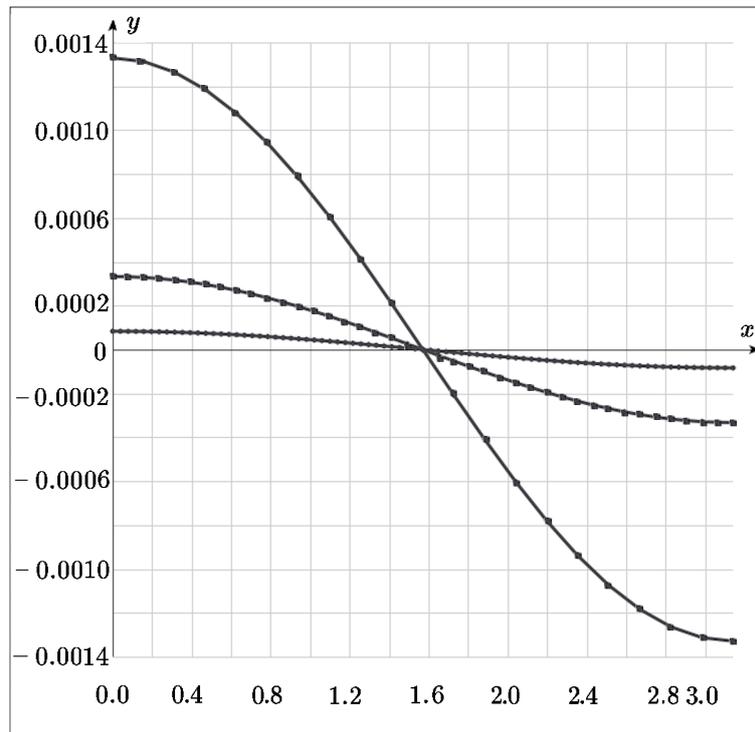


Рис. 4. Тест 2, $n = 1$. Погрешность решения на сетках: 20×20 , 40×40 , 80×80 ; $\alpha = 10^{-7}$

На рис. 5 и рис. 6 представлены результаты расчетов для теста 2 с $n = 5$.

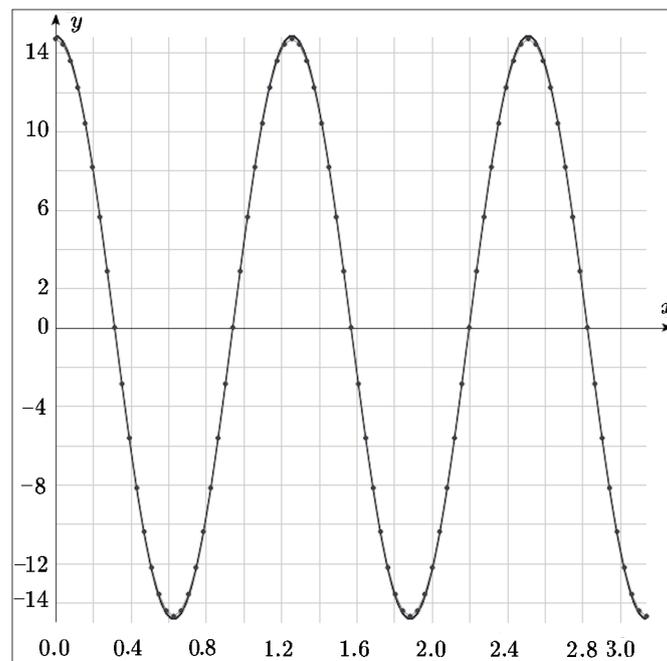


Рис. 5. Тест 2, $n = 5$. Точное решение — сплошная линия, численное решение — точки. Сетка 80×80 , $\alpha = 10^{-7}$

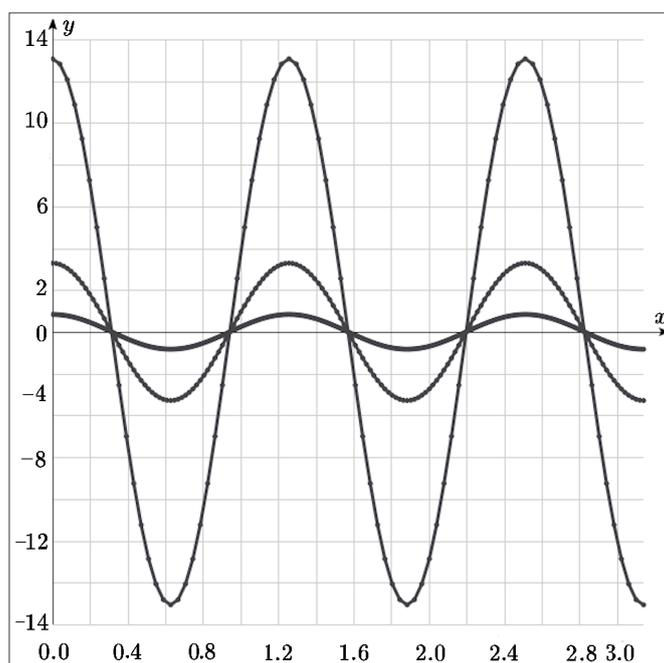


Рис. 6. Тест 2, $n = 5$. Погрешность решения на сетках: 80×80 , 160×160 , 320×320 ; $\alpha = 10^{-7}$

На рис. 5 точное (аналитическое) решение теста 2, соответствующее значению $n = 5$, изображено сплошной линией, а точками — полученное на сетке $N_1 \times N_1 = 80 \times 80$ численное решение.

На рис. 6 точками отмечены абсолютные значения погрешности для теста 2 с $n = 5$. Линии, соединяющие точки, нарисованы для наглядности. График с наибольшей амплитудой соответствует расчету, произведенному на сетке $N_1 \times N_1 = 80 \times 80$, график с наименьшей амплитудой соответствует сетке $N_1 \times N_1 = 320 \times 320$, третий график соответствует сетке $N_1 \times N_1 = 160 \times 160$.

4.3. Тест 3

В этом тесте численные расчеты проводились с зашумленными данными. В качестве исходной задачи выбиралась задача из теста 2 с $n = 5$. В краевое условие Дирихле (дополнительная информация)

$$u(0, x_2) = \frac{1}{n} \cos(n x_2), \quad x_2 \in [0, \pi],$$

вносилось случайным образом распределенное возмущение в 1% и 3%.

На рис. 7 и рис. 8 сплошной линией изображено точное (аналитическое) решение теста 2, соответствующее значению $n = 5$, а точками — полученное на сетке $N_1 \times N_1 = 160 \times 160$ численное решение для возмущения в 1% и 3% соответственно.

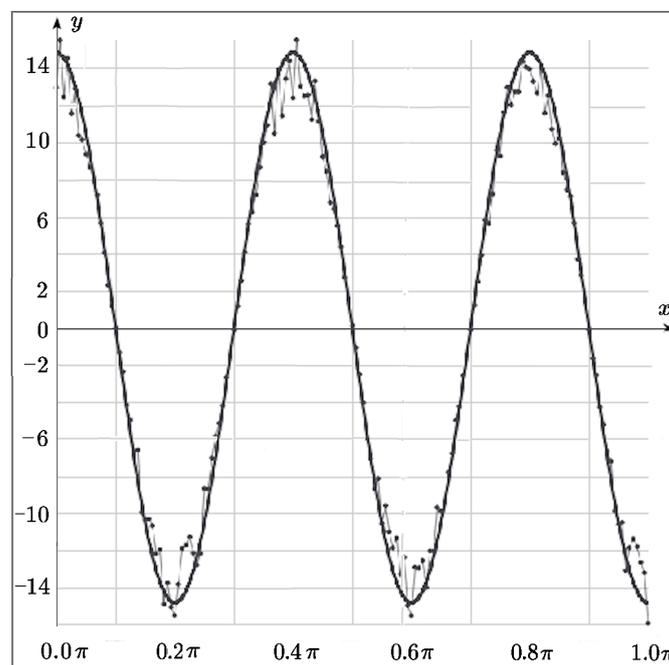


Рис. 7. Тест 3, $n = 5$, зашумление 1%. Точное решение — сплошная линия, численное решение — точки. Сетка 160×160 , $\alpha = 10^{-3}$

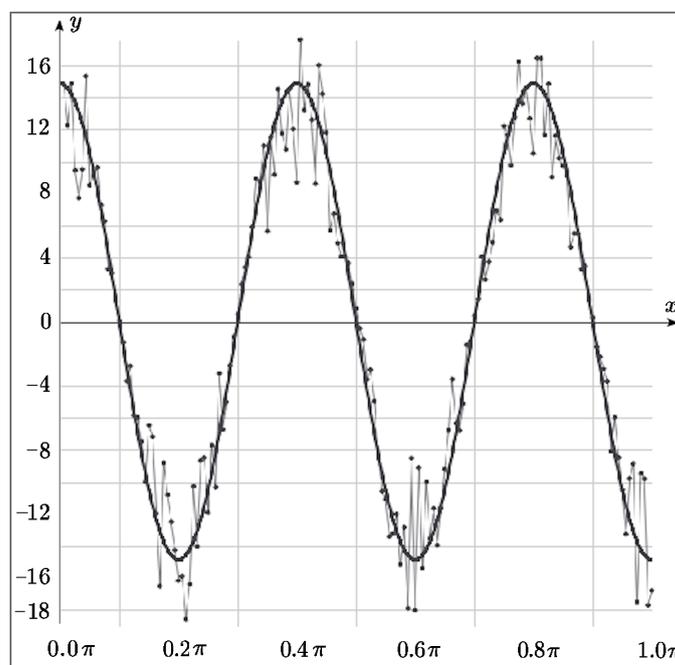


Рис. 8. Тест 3, $n = 5$, зашумление 3%. Точное решение — сплошная линия, численное решение — точки. Сетка 160×160 , $\alpha = 10^{-3}$

5. Заключение

В работе на примере конкретной задачи описаны два экономичных прямых алгоритма численного решения задачи Коши для уравнения Лапласа. Оба метода очевидным образом обобщаются на трехмерный случай. Нетрудно указать класс задач, связанный с параболическими уравнениями, для которого описанные методы могут быть использованы в качестве одного из этапов численного решения.

Укажем очевидные обобщения метода, использующего разложение в однократный ряд.

Метод применим:

1. Для различных типов краевых условий, в том числе и неоднородных;
2. В случае использования неравномерных сеток по координате x_2 ;
3. Для операторов с переменными коэффициентами вида

$$-\frac{\partial}{\partial x_1} \left(k_1(x_2) \frac{\partial u}{\partial x_1} \right) - \frac{\partial}{\partial x_2} \left(k_2(x_2) \frac{\partial u}{\partial x_2} \right) + k_3(x_2)u;$$

4. В цилиндрических координатах с переменными коэффициентами, зависящими от r .

Отметим один интересный факт, непосредственно следующий из результатов проведенного исследования.

Оператор A_h из (7) действует на сеточные функции, определенные на сетке $\bar{\omega}_2$, и результатом его действия является тоже сеточная функция, заданная на той же сетке. Поэтому результаты, полученные в пунктах 3.2 и 3.3, в частности, можно трактовать как решение спектральной задачи

$$A_h \varphi = \lambda \varphi.$$

В этих пунктах показано, что собственными функциями оператора A_h являются (см. (12), (13), (18), (19) и (12), (13), (26) для $i = 0$)

$$\mu_k^{(2)}(x_{2,j}), \quad k = \overline{0, N_2 + 1}.$$

Собственные числа A_h представлены в двух видах: как γ_k из (19) или как $w_{k,k}(0)$.

В свете только что сказанного представленные в работе алгоритмы фактически реализуют решение уравнения (7) посредством разложения $q^h(x_{2,j})$ и $u_a(x_{2,j})$ по собственным функциям оператора A_h .

Литература

1. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. — М.: Наука, 1979.
2. Лаврентьев М.М. О задаче Коши для уравнения Лапласа // Изв. АН СССР. Сер. матем. — 1956. — Т. 20, вып. 6. — С. 819–842.
3. Mukanova V. Numerical reconstruction of unknown boundary data in the Cauchy problem for Laplace's equation // Inverse Problems in Science and Engineering. — 2012. — Vol. 21, iss. 8. — P. 1255–1267.
4. Mukanova B., Maussumbekova S., Kulbay M. Solving of the regularized inverse problem for elliptic equations in cylindrical coordinates: analytical formulas // J. of Appl. Mechanics and Materials. — 2015. — Vols. 799–800. — P. 693–697.

5. **Kabanikhin S.I., Bektemesov M.A., Ayapbergenova A.T., and Nechaev D.V.** Optimization methods of solving continuation problems // Computational technologies. — 2004. — Vol. 9, special iss. — P. 49–60.
6. **Karchevsky A.L.** Reformulation of an inverse problem statement that reduces computational costs // Eurasian J. of Mathematical and Computer Application. — 2013. — Vol. 1, iss. 2. — P. 4–20.
7. **Cheng J., Hon Y.C., Wei T., and Yamamoto M.** Numerical computation of a Cauchy problem for Laplace's equation // ZAMM. — 2001. — Vol. 81, iss. 10. — P. 665–674.
8. **Kabanikhin S.I., Shishlenin M.A., Nurseitov D.B., Nurseitova A.T., and Kasenov S.E.** Comparative analysis of methods for regularizing an initial boundary value problem for the Helmholtz equation // J. of Appl. Math. — 2014. — Vol. 2014, special iss. — P. 1–7.
9. **Kabanikhin S.I., Karchevsky A.L.** Method for solving the Cauchy problem for an elliptic equation // J. of Inverse and Ill-posed Problems. — 1995. — Vol. 3, iss. 1. — P. 21–46.
10. **Кабанихин С.И.** Обратные и некорректные задачи. — Новосибирск: Сибирское научное издательство, 2009.
11. **Самарский А.А., Николаев Е.С.** Методы решения сеточных уравнений. — М.: Наука, 1978.
12. **Самарский А.А., Андреев В.Б.** Разностные методы для эллиптических уравнений. — М.: Наука, 1979.
13. **Liu C.-S.** An analytical method for the inverse Cauchy problem of Laplace equation in a rectangular plate // J. of Mechanics. — 2011. — Vol. 27, iss. 4. — P. 575–584.
14. **Лаврентьев М.М.** Об интегральных уравнениях первого рода // ДАН СССР. — 1959. — Т. 127, № 1. — С. 31–33.
15. **Лаврентьев М.М., Савельев Л.Я.** Теория операторов и некорректные задачи. 2-е изд., перераб. и дополн. — Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 2010.

Поступила в редакцию 28 декабря 2017 г.

После доработки 6 июня 2018 г.

Принята к публикации 5 октября 2018 г.

Литература в транслитерации

1. **Tikhonov A.N., Arsenin V.Ya.** Metody resheniya nekorrektnykh zadach. — М.: Nauka, 1979.
2. **Lavrent'ev M.M.** O zadache Koshi dlya uravneniya Laplasy // Izv. AN SSSR. Ser. matem. — 1956. — Т. 20, вып. 6. — С. 819–842.
3. **Mukanova B.** Numerical reconstruction of unknown boundary data in the Cauchy problem for Laplace's equation // Inverse Problems in Science and Engineering. — 2012. — Vol. 21, iss. 8. — P. 1255–1267.
4. **Mukanova B., Maussumbekova S., Kulbay M.** Solving of the regularized inverse problem for elliptic equations in cylindrical coordinates: analytical formulas // J. of Appl. Mechanics and Materials. — 2015. — Vols. 799–800. — P. 693–697.
5. **Kabanikhin S.I., Bektemesov M.A., Ayapbergenova A.T., and Nechaev D.V.** Optimization methods of solving continuation problems // Computational technologies. — 2004. — Vol. 9, special iss. — P. 49–60.
6. **Karchevsky A.L.** Reformulation of an inverse problem statement that reduces computational costs // Eurasian J. of Mathematical and Computer Application. — 2013. — Vol. 1, iss. 2. — P. 4–20.
7. **Cheng J., Hon Y.C., Wei T., and Yamamoto M.** Numerical computation of a Cauchy problem for Laplace's equation // ZAMM. — 2001. — Vol. 81, iss. 10. — P. 665–674.

8. **Kabanikhin S.I., Shishlenin M.A., Nurseitov D.B., Nurseitova A.T., and Kasenov S.E.** Comparative analysis of methods for regularizing an initial boundary value problem for the Helmholtz equation // *J. of Appl. Math.* — 2014. — Vol. 2014, special iss. — P. 1–7.
9. **Kabanikhin S.I., Karchevsky A.L.** Method for solving the Cauchy problem for an elliptic equation // *J. of Inverse and Ill-posed Problems.* — 1995. — Vol. 3, iss. 1. — P. 21–46.
10. **Kabanikhin S.I.** *Obratnye i nekorrektnye zadachi.* — Novosibirsk: Sibirskoe nauchnoe izdatel'stvo, 2009.
11. **Samarskii A.A., Nikolaev E.S.** *Metody resheniya setochnykh uravneniy.* — M.: Nauka, 1978.
12. **Samarskii A.A., Andreev V.B.** *Raznostnye metody dlya ellipticheskikh uravneniy.* — M.: Nauka, 1979.
13. **Liu C.-S.** An analytical method for the inverse Cauchy problem of Laplace equation in a rectangular plate // *J. of Mechanics.* — 2011. — Vol. 27, iss. 4. — P. 575–584.
14. **Lavrent'ev M.M.** Ob integral'nykh uravneniyakh pervogo roda // *DAN SSSR.* — 1959. — T. 127, № 1. — S. 31–33.
15. **Lavrent'ev M.M., Savel'ev L.Ya.** *Teoriya operatorov i nekorrektnye zadachi.* 2-e izd., pererab. i dopoln. — Novosibirsk: Izd-vo In-ta matematiki, 2010.

