УДК 551.466.81

В. А. Боровиков, В. В. Булатов,
Ю. В. Владимиров, Е. С. Левченко

О РАСЧЕТЕ ПОЛЯ ВНУТРЕННИХ ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН, ГЕНЕРИРУЕМЫХ НЕПОДВИЖНЫМ ИСТОЧНИКОМ В ПОТОКЕ СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ЖИДКОСТИ

Рассматривается задача о генерации внутренних волн (ВВ) источником в однородном потоке стратифицированной жидкости. Обычно исследования поля ВВ проводят асимптотическими методами [1, 2]. В [3] найдено точное решение этой задачи в форме однократных квадратур от специальных функций, приведены результаты численных расчетов для случая постоянной частоты Брента — Вяйсяля $N(z)$. В [4] исследован случай двухслойной жидкости. В настоящей работе предлагаются новые более простые квадратурные формулы для поля, приводятся результаты численных расчетов поля ВВ по этим формулам для произвольного модельного распределения $N(z)$ и обсуждаются локальные особенности волнового поля вблизи источника.

Поле ВВ в слое $0 < z < H$ от источника, находящегося в потоке набегающей стратифицированной жидкости, описывается в приближении Буссинеска уравнением

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\eta_{xx} + \eta_{yy} + \eta_{zz}) + N^2(z)(\eta_{xx} + \eta_{yy}) = \tag{1}$$
$$= Q\theta(t)\,\delta_t'(x + vt)\,\delta(y)\,\delta'(z - z_0),$$

где $\eta(x, y, z, t)$ — возвышение, связанное с вертикальной компонентой скорости $w(x, y, z, t)$ соотношением $w = \partial\eta/\partial t$; v — скорость набегающего потока; z_0 — глубина погружения источника; $\theta(t) = 0$ при $t \leqslant 0$ и $\theta(t) = 1$ при $t > 0$; Q — интенсивность источника.

Используется граничное условие в приближении «твердой крышки»

$$\eta = 0, \quad z = 0, \; H. \tag{2}$$

В [5] показано, что решение задачи (1), (2) представляется в виде суммы мод, каждая из которых имеет максимальную групповую скорость $c_n (c_1 > c_2 > \ldots)$. Далее рассмотрим наиболее распространенный случай $v > c_n$, $n = 1, 2, \ldots$ В этих предположениях решение задачи (1), (2) примет вид [5]

$$\eta = \sum_n \eta_n = \frac{Q}{4\pi^2} \sum_n \int_{-\infty}^{\infty} d\nu \times \tag{3}$$
$$\times \int_{-\infty+i\varepsilon}^{\infty+i\varepsilon} d\mu \frac{i\mu v \omega_n^2(k)\,\varphi_n(z, k) \exp(-i\mu(x + vt) - i\nu y)}{k^2\left(\omega_n^2(k) - \mu^2 v^2\right)} \frac{\partial \varphi_n(z_0, k)}{\partial z_0}.$$

Здесь $\varphi_n(z,k)$, $\omega_n(k)$ — собственные функции и собственные числа задачи

$$\frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial z^2} + k^2 \left[\frac{N^2(z)}{\omega_n^2(k)} - 1\right] \varphi_n = 0, \quad \varphi_n = 0 \quad (z = 0, \; H). \tag{4}$$

При $v < c_1$ решение будет более сложного вида и требует специального рассмотрения.

Чтобы вычислить внутренний интеграл в (3), следует замкнуть контур интегрирования по μ в верхней полуплоскости при $\xi < 0$ $(\xi = x + vt)$ и в нижней при $\xi > 0$. Рассмотрим, как устроены особые точки — полюсы и точки ветвления подынтегрального выражения в (3) при вещественных ν и комплексных μ.

Покажем, что полюсы этого выражения, т. е. корни уравнения $\mu^2 v^2 = \omega_n^2\left(\sqrt{\nu^2 + \mu^2}\right)$, существуют лишь при вещественных μ^2, т. е. или при вещественных $\mu = \pm\mu_n(\nu)$, или при чисто мнимых $\mu = \pm i\lambda_n(\nu)$. Действительно, из (3) следует, что корни уравнения $\mu^2 v^2 = \omega_n^2\left(\sqrt{\nu^2 + \mu^2}\right)$ —

собственные числа задачи

$$\frac{\partial^2\psi_n(z,\nu)}{\partial z^2}+\left\{\left[\frac{N^2(z)}{v^2}-\nu^2\right]+\left[\frac{\nu^2N^2(z)}{v^2\mu_n^2(\nu)}-\mu_n^2(\nu)\right]\right\}\psi_n(z,\nu)=0, \tag{5}$$

$$\psi_n=0\quad(z=0,H),$$

которая не является классической задачей Штурма — Лиувилля, так как спектральный параметр $\mu_n(\nu)$ входит нестандартным образом. Умножая (5) на комплексно-сопряженную функцию $\overline{\psi_n(z,\nu)}$ и интегрируя по z, получим

$$\int\limits_0^H\left\{-\left|\frac{\partial\psi_n(z,\nu)}{\partial z}\right|^2+\left[\frac{N^2(z)}{v^2}-\nu^2\right]|\psi_n(z,\nu)|^2+\right.$$
$$\left.+\left[\frac{\nu^2N^2(z)}{v^2\mu_n^2(\nu)}-\mu_n^2(\nu)\right]|\psi_n(z,\nu)|^2\right\}dz=0.$$

При $\mathrm{Im}\,\mu_n^2(\nu)\neq 0$ мнимая часть подынтегрального выражения имеет знак, противоположный знаку $\mathrm{Im}\,\mu_n^2(\nu)$, и интеграл не обращается в нуль. Это противоречие и доказывает, что у спектральной задачи (5) есть лишь вещественные $\mu_n^2(\nu)$. Аналогичные рассуждения можно провести и для $\mu=\pm i\lambda_n(\nu)$, где $\lambda_n(\nu)$ — собственные числа задачи

$$\frac{\partial^2 f_n(z,\nu)}{\partial z^2}+\left\{\left[\frac{N^2(z)}{v^2}-\nu^2\right]+\left[\lambda_n^2(\nu)-\frac{\nu^2N^2(z)}{v^2\lambda_n^2(\nu)}\right]\right\}f_n(z,\nu)=0, \tag{6}$$

$$f_n=0\quad(z=0,\ H).$$

Если $v>c_1$, то при любом ν у спектральной задачи (6) есть собственные числа $\lambda_n(\nu)$ и собственные функции $f_n(z,\nu)$.

Функция $\omega_n^2\left(\sqrt{\nu^2+\mu^2}\right)$ может также иметь точки ветвления при комплексных значениях $\mu=\mu_*(\nu)$, для которых $\partial\omega/\partial k$ при $k=k_*=\sqrt{\nu^2+\mu_*^2(\nu)}$ обращается в бесконечность. Дифференцируя (4) по параметру k, нетрудно показать, что для этого необходимо $\int\limits_0^H N^2(z)\varphi_n^2(z,k)\,dz=0$.

Поэтому при интегрировании по μ в каждом из интегралов в (3) придется кроме указанных выше полюсов в точках $\mu=\pm\mu_n(\nu)$ и $\mu=\pm i\lambda_n(\nu)$ учесть интегралы по соответствующим разрезам. Однако при суммировании по n в (3) интегралы по разрезам взаимно уничтожаются.

Действительно, пусть $\mu=\mu_*$ — точка ветвления функции $\omega_n\left(\sqrt{\nu^2+\mu^2}\right)$. Поскольку, очевидно, каждая из ветвей функции $\omega_n\left(\sqrt{\nu^2+\mu^2}\right)$ — собственное число спектральной задачи (4), то есть несколько собственных чисел, сливающихся друг с другом при $\mu\to\mu_*$ и переходящих друг в друга при обходе точки ветвления $\mu=\mu_*$. В простейшем случае будет два таких числа: ω_n и ω_m, при обходе вокруг точки ветвления ω_n и ω_m переходят друг в друга. При таком обходе в сумме (3) слагаемое η_n переходит в η_m, η_m — в η_n, а сумма $\eta_n+\eta_m$, очевидно,— сама в себя. Иными словами, для $\eta_n+\eta_m$ точка $\mu=\mu_*$ является устранимой особой точкой, и поэтому интеграл по разрезу исчезает. Аналогично показывается, что интегралами по разрезам можно пренебречь и в случае точки ветвления более высокого порядка. Поэтому при интегрировании по μ в каждом из слагаемых в (3) достаточно учитывать лишь полюсы подынтегрального выражения. Далее будем рассматривать одну, отдельно взятую моду. Замыкая контур интегрирования по μ в верхней полуплоскости при $\xi<0$ и в нижней при $\xi>0$, можно получить, что $\eta_n=I_++I_-+I_0$ $(\xi>0)$ или $\eta_n=-I_0$ $(\xi<0)$. Здесь

$$I_\pm=-\frac{Q}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp\left(\pm i\mu_n(\nu)\xi-i\nu y\right)b_n(\nu)\psi_n(z,\nu)\frac{\partial\psi_n(z_0,\nu)}{\partial z_0}\,d\nu; \tag{7}$$

$$(8)\qquad I_0 = -\frac{Q}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\lambda_n(\nu)\,|\xi| + i\nu y\right) d_n(\nu)\, f_n(z,\nu)\,\frac{\partial f_n(z_0,\nu)}{\partial z_0}\,d\nu,$$

$$b_n(\nu) = \frac{i\mu_n^2(\nu)\,v}{2\left(\mu_n^2(\nu)+\nu^2\right)}\left(\frac{\mu_n(\nu)\,\mu_n'(\nu)}{\nu} + 1\right),\quad d_n(\nu) =$$

$$= \frac{\lambda_n^2(\nu)\,v}{2i\left(\lambda_n^2(\nu)-\nu^2\right)}\left(\frac{\lambda_n(\nu)\,\lambda_n'(\nu)}{\nu} - 1\right).$$

Свойства функции $\mu_n(\nu)$ описаны в [5]. Рассмотрим функцию $\lambda_n(\nu)$. Методом возмущений нетрудно показать, что $\lambda_n(\nu)$ при малых ν разлагается в ряд по четным степеням ν: $\lambda_n(\nu) = \alpha_n + \beta_n\nu^2 + \ldots$, где α_n определяется из задачи Штурма — Лиувилля

$$\frac{d^2 p_n}{dz^2} + \left[\frac{N^2(z)}{v^2} + \alpha_n^2\right] p_n = 0,\quad p_n = 0\quad (z = 0,\, H),$$

при этом $p_n(z) = f_n(z,\,0)$, а $\beta_n = \frac{1}{2\alpha_n}\left(1 + \frac{l_n^2}{v^2\alpha_n^2}\right)$, $l_n^2 = \frac{\int_0^H N^2(z)\,p_n^2(z)\,dz}{\int_0^H p_n^2(z)\,dz}$.

Аналогичным образом можно видеть, что при $\nu \to \infty$ функция $\lambda_n(\nu)$ допускает разложение

$$\lambda_n(\nu) = \nu + \gamma_n/\nu + \delta_n/\nu^3 + \ldots,$$

$$\gamma_n = \frac{\pi^2 n^2}{2H^2},\quad \delta_n = -\frac{\pi^2 n^2}{H^3}\left(\frac{\pi^2 n^2}{8H} + \frac{1}{v^2}\int\limits_0^H N^2(z)\sin^2\frac{n\pi}{H}z\,dz\right).$$

Для численных расчетов использовалось распределение $N(z)$, изображенное на рис. 1. На рис. 2 представлены результаты расчетов по формулам (7), (8) при $v = 2$ м/с, $y = 300$ м, $Q = 1$ м³/с, $z = 200$ м, $z_0 = 22$ м. Расчеты проводились для первых трех мод. Видно, что отдельные слагаемые $\eta_n (n = 1, 2, 3)$ претерпевают разрыв при $\xi = 0$, тогда как их сумма непрерывна. При увеличении y основной вклад в поле вносит слагаемое I_+, а остальные слагаемые, включая и интеграл вдоль разреза, пренебрежимо малы, и функции становятся практически непрерывными. Таким образом, при численном расчете ближнего поля непрерывность суммы может служить критерием для определения количества мод, вносящих вклад в общее поле.

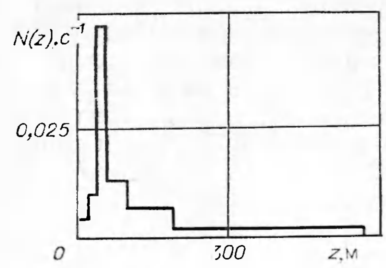

Рис. 1

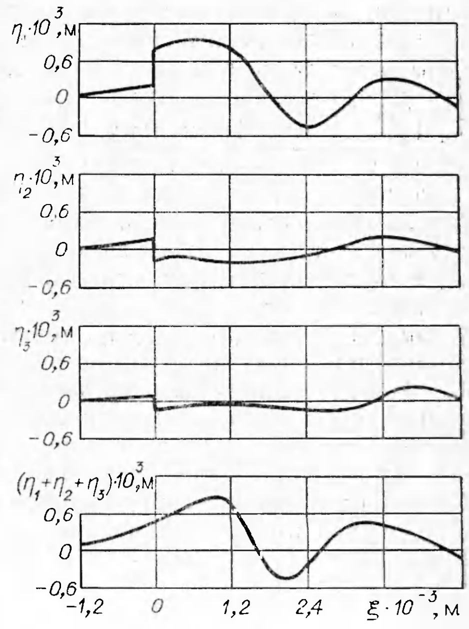

Рис. 2

Заметим, что при расчете поля w вертикальных скоростей отдельные моды всегда непрерывны, так как интегралы по разрезам входят при замыкании контура вверх ($\xi < 0$) и вниз ($\xi > 0$) с одинаковыми знаками (точки ветвления появляются парами, а подынтегральная функция нечетная по μ), и вышеприведенным критерием пользоваться нельзя.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Keller J. B., Munk W. H.** Internal wave wakes of a body moving in a stratified fluid// Phys. Fluids.— 1970.— V. 13, N 6.
2. **Miles J. W.** Internal waves generated by a horizontally moving source // Geoph. Fluid Dyn.— 1971.— V. 2, N 1.
3. **Санников В. Ф.** Ближнее поле установившихся волн, генерируемых локальным источником возмущений в потоке стратифицированной жидкости // Теоретические исследования волновых процессов в океане.— Севастополь, 1983.
4. **Веденьков В. Е., Санников В. Ф.** Некоторые особенности поля внутренних волн, генерируемых локальным источником возмущений в потоке двухслойной жидкости // ПМТФ.— 1987.— № 2.
5. **Боровиков В. А., Владимиров Ю. В., Кельберт М. Я.** Поле внутренних гравитационных волн, возбуждаемых локализованными источниками // Изв. АН СССР. ФАО.— 1984.— Т. 20, № 6.

г. Москва

Поступила 21/IX 1987 г., в окончательном варианте — 16/II 1988 г.

УДК 536.253

Г. С. Голицын, Ю. А. Гостинцев, А. Ф. Солодовник

ТУРБУЛЕНТНАЯ ПЛАВУЧАЯ СТРУЯ В СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ АТМОСФЕРЕ

Надежность прогнозов экологических последствий ряда природных и антропогенных катастроф (извержения вулканов, большие пожары, аварии АЭС, ядерные взрывы) в значительной степени зависит от точности предсказания первоначальной пространственной картины загрязнения атмосферы над индивидуальными источниками тепла и примеси [1]. Под первоначальным загрязнением подразумеваются максимальная высота выброса примеси и распределение ее концентрации в пространстве в моменты времени, близкие к окончанию осредненных вертикальных свободноконвективных перемещений облака или струи нагретых продуктов.

В зависимости от соотношения между временем действия $t_{и}$ источника тепла (примеси) и характерным временем тепловой релаксации атмосферы $t_N \sim 2\pi N^{-1}$ (N — частота Вяйсяля — Брента) можно выделить две предельные пространственные конфигурации свободно-конвективных движений [2]. Если $t_{и} \ll t_N$ (в пределе при мгновенном выделении энергии), то в атмосфере быстро формируется оторвавшееся от земли всплывающее облако — термик. При обратном соотношении времен (в пределе при постоянно действующем источнике) над очагом образуется конвективная колонка восходящего струйного движения продуктов. Для стандартного состояния атмосферы ($N = 0{,}0106$ с$^{-1}$ в тропосферном слое) $t_N \approx 10$ мин. За это время облако или струя достигнут своей максимальной точки подъема и начнут деформироваться в основном в горизонтальном направлении. При этом термик будет совершать затухающие колебательные вертикальные движения около уровня теплового равновесия, а конвективная колонка (например, от очага пожара)— образовывать медленно расширяющуюся на высоте зависания конфигурацию струйного квазистационарного течения.

Перенос примеси в атмосфере мощными термиками исследован довольно подробно как аналитическими [2—5], так и численными [6, 7] методами, и предсказания теории в основном хорошо согласуются с экспериментальными данными. Ниже излагаются результаты изучения второго предельного случая свободноконвективных движений — двумерной осесимметричной турбулентной плавучей струи.

Основные уравнения. Система уравнений для осредненных параметров стационарной турбулентной свободноконвективной осесимметричной