

$a_{2m} = -\beta$, $a_{2(n+m)} = -1$. Остальные a_i равны нулю. Соотношения (2.6) можно доказать, воспользовавшись формулами Виета.

Используя такой метод обращения интегралов Фурье, можно получить значения напряжений в любой точке материала.

Рассмотренная модель соударения металлических пластин в упругой постановке не описывает всех явлений, имеющих место в задачах сварки взрывом. Однако она позволяет оценить, в частности, величину касательных напряжений, что нельзя сделать, оставаясь в рамках гидродинамической теории [4]. С помощью описанной модели можно вычислить величину разрывающих напряжений, действующих на границе раздела материалов, которые оказывают существенное влияние на прочность получившегося соединения. Пользуясь расчетами упругой модели, по-видимому, можно подойти теоретически к определению области режимов соударений для получения сварки хорошего качества данной пары материалов.

Поступила 24 X 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. Babul W. Wlodarczyk. On the conditions for the occurrence of the wafe surface of metal bonding made by explosive technique.—«Proceedings of vibration problems», 1970, vol. 11, N 3.
2. Ефремов В. В. Исследование косых соударений металлических пластин в упругой постановке.— ПМТФ, 1975, № 1.
3. Слепян Л. И. Нестационарные упругие волны. Л., «Судостроение», 1972.
4. Дерибас А. А. Физика упрочнения и сварки взрывом. Новосибирск, «Наука», 1972.
5. Нобл Б. Метод Винера-Хопфа. ИЛ, 1962.
6. Джрбашян М. М. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. М., «Наука», 1966.

УДК 624.074.4

ПЛОТНОСТЬ СОБСТВЕННЫХ ДВИЖЕНИЙ УПРУГИХ ОБОЛОЧЕК ПРИ ИНТЕНСИВНОМ ДИНАМИЧЕСКОМ НАГРУЖЕНИИ

В. М. Корнев, А. В. Маркин

(Новосибирск)

Рассматривается вопрос о плотности собственных движений в задачах динамики упругих оболочек. Изучаются движения, при которых происходит экспоненциальное нарастание амплитуды со временем. При использовании идеи Р. Куранта подсчитывается число собственных движений, попадающих в заданный интервал изменения показателя экспоненты. Находятся определяющие собственные движения и точки сгущения, в которых плотность собственных движений стремится к бесконечности. В конкретных примерах проведено сопоставление точек сгущения и определяющих движений.

При действии на оболочку интенсивной динамической нагрузки, превышающей нагрузку Эйлера, наибольшей скоростью роста прогибов обладает собственная форма, отличная от первой [1]. Прогибы оболочки с течением времени стремятся к бесконечности [1,2]. В реальных конструкциях развиваются конечные деформации за конечный интервал времени.

При аппроксимации исходной системы с бесконечным числом степеней свободы на конечном отрезке времени системой с конечным числом степеней свободы необходимо принять во внимание плотность собственных движений [3].

Рассмотрим прямоугольную шарнирно-опертую по сторонам оболочку $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$ при нулевых начальных условиях. В безразмерных переменных

$$x_1 = x/a, y_1 = y/a, 0 \leq x_1 \leq 1, 0 \leq y_1 \leq b/a, a = R_1$$

движение тонкостенной упругой оболочки, имеющей постоянные радиусы кривизны, описывается уравнением [4], индексы при x и y опущены

$$(1) \quad \varepsilon^2 \Delta \Delta \Delta \Delta \Phi + \Delta_k \Delta_k \Phi + \lambda \Delta \Delta (v \Phi_{xx} + \Phi_{yy}) + R_1^2 \rho E^{-1} \Delta \Delta \Phi_{tt} = f(x, y),$$

$$\varepsilon^2 = h^2/12(1 - \nu^2) R_1^2, \quad \lambda = h N_2 / R_1 N_*,$$

$$\Delta_k = (\chi \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2), \quad \chi = R_1 / R_2,$$

$$\nu = N_1 / N_2, \quad N_* = E h^2 R_1^{-1}.$$

Здесь ε^2 — малый параметр; λ — коэффициент перегрузки; x, y — декартовы координаты; $\Phi(x, y, t)$ — разрешающая функция; $f(x, y)$ — функция, определяемая малыми возмущениями; h — толщина; R_1, R_2 — радиусы кривизны оболочки; N_1, N_2 — нормальные усилия в срединной поверхности вдоль осей x, y соответственно; N_* — критическая нагрузка Эйлера; ν, E — коэффициент Пуассона и модуль Юнга; ρ — плотность материала на единицу поверхности оболочки; t — время.

Точное решение задачи для шарнирно-опертой оболочки может быть представлено в виде

$$(2) \quad \Phi = \sum_{m,n} q_{mn}(t) \sin k_m x \sin k_n y, \quad k_m = m\pi, \quad k_n = n\pi a/b.$$

Полученное решение для шарнирно-опертой оболочки является асимптотическим решением задачи при произвольных граничных условиях [4].

Подставляя (2) в (1) после соответствующих преобразований для $q_{mn}(t)$, получим уравнения

$$(3) \quad q_{mn}''(t) - \alpha_{mn}^2 q_{mn}(t) = f_{mn};$$

$$(4) \quad \alpha_{mn}^2 = -\varepsilon^2 (k_m^2 + k_n^2)^2 - (\chi k_m^2 + k_n^2)^2 (k_m^2 + k_n^2)^{-2} + \lambda (v k_m^2 + k_n^2).$$

Решение уравнения (3) зависит от значений, которые принимает коэффициент α_{mn}^2 . При $\alpha_{mn}^2 < 0$ уравнение (3) описывает колебательный процесс, при $\alpha_{mn}^2 = 0$ — процесс линейного нарастания амплитуды q_{mn} со временем. Далее будет рассматриваться только случай $\alpha_{mn}^2 > 0$, т. е. будут изучаться движения, при которых происходит экспоненциальное увеличение амплитуды $q_{mn}(t)$.

В плоскости k_m, k_n , вводя новые переменные r, θ

$$k_m^2 + k_n^2 = r^2, \quad k_m^2 = r^2 \cos^2 \theta, \quad k_n^2 = r^2 \sin^2 \theta,$$

получим из (4)

$$(5) \quad \varepsilon^2 r^4 - \lambda r^2 (v \cos^2 \theta + \sin^2 \theta) + (\chi \cos^2 \theta + \sin^2 \theta)^2 + \alpha_{mn}^2 = 0.$$

Используем метод Р. Куранта [5], в котором число собственных чисел $N(\mu)$, меньших, чем заданное значение μ_* , приближенно определяется как площадь области на плоскости m, n , внутри которой собственное число μ меньше, чем заданное μ_* . Применение этого метода для различного типа задач можно найти в обзорной работе [6]. Если взять плоскость k_m, k_n , то число $N(\alpha_{mn}^2)$ определится как отношение площади области на плоскости k_m, k_n , внутри которой показатель экспоненты α_{mn} меньше, чем заданный α_{mn*} , к площади одной ячейки $\Delta k_m \Delta k_n$. Таким образом, получаем

$$(6) \quad N(\alpha_{mn}^2) = R_1 R_2 2^{-1} \pi^{-2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} r^2(\theta) d\theta,$$

где θ_1, θ_2 — углы наклона радиуса вектора, касательного к области. В асимптотическом случае ($\varepsilon \rightarrow 0$) рассматриваемая область будет ограничена осями координат k_m, k_n и кривой $r(\theta)$, а углы θ_1, θ_2 примут значения $\theta_1 = 0, \theta_2 = \pi/2$.

Наличие или отсутствие точек сгущения у функции $N(\alpha_{mn}^2)$ установим, исследуя производную $dN(\alpha_{mn}^2)/d\alpha_{mn}^2$. Подставляя r^2 из (5) в (6) и дифференцируя по α_{mn}^2 , для плотности собственных движений получим

$$(7) \quad \frac{dN(\alpha_{mn}^2)}{d\alpha_{mn}^2} = \frac{R_1 R_2}{4\pi^2 \varepsilon [(1-\chi)^2 - \lambda^2 (1-v)^2/4\varepsilon^2]^{1/2}} \times \\ \times \int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{d\xi}{[(C_1 - \xi)(\xi + C_2)(1 - \xi)\xi]^{1/2}};$$

$$(8) \quad \xi_{1,2} = \frac{\lambda^2 v (1-v)/4\varepsilon^2 - \chi (1-\chi)}{(1-\chi)^2 - \lambda^2 (1-v)^2/4\varepsilon^2} \pm \left\{ \left[\frac{\chi (1-\chi) - \lambda^2 v (1-v)/4\varepsilon^2}{\lambda^2 (1-v)^2/4\varepsilon^2 - (1-\chi)^2} \right]^2 - \right. \\ \left. - \frac{\lambda^2 v^2/4\varepsilon^2 - \chi^2 - \alpha_{mn}^2}{\lambda^2 (1-v)^2/4\varepsilon^2 - (1-\chi)^2} \right\}^{1/2}, \\ \xi_1 = C_1, \quad \xi_2 = -C_2, \quad \xi = \sin^2 \theta.$$

В выражение (7) входит эллиптический интеграл первого рода I

$$I = \int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{d\xi}{[(C_1 - \xi)(\xi + C_2)(1 - \xi)\xi]^{1/2}}.$$

Найдем значения ξ , являющиеся полюсами интеграла I и определяющие точки сгущения.

Пусть $0 \leq \chi \leq v$, если $\chi > v$, то оси x и y необходимо поменять местами. Тогда будем иметь рассмотренный случай. При таких χ, v возможно следующее расположение корней C_1, C_2 : а) $C_1 > 1; C_2 > 0$; б) $1 > C_1; C_2 > 0$; в) $C_1 > 1; 0 > C_2$; г) $1 > C_1; 0 > C_2$.

Рассмотрим первый случай $C_1 > 1$, $C_2 > 0$. Подстановкой $\sin^2 \varphi = (C_2 + 1)\xi / (\xi + C_2)$ интеграл I приводится к форме Лежандра

$$I_1 = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{[C_1(C_2 + 1) - (C_1 + C_2) \sin^2 \varphi]^{1/2}}.$$

Его полюсами будут точки $C_1 = 0$, $C_2 = -1$.

Во втором случае $1 > C_1$, $C_2 > 0$ подстановкой $\sin^2 \varphi = (C_1 + C_2)\xi / C_1 \times (\xi + C_2)$ интеграл приводится к форме Лежандра

$$I_2 = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{[(C_1 + C_2) - C_1(1 + C_2) \sin^2 \varphi]^{1/2}}.$$

Полюсами будут точки $C_1 = 1$, $C_2 = 0$. Два остальных случая $C_1 > 1$, $0 > C_2$ и $1 > C_1$, $0 > C_2$ приводят соответственно к интегралам I_1 и I_2 с помощью подстановок $\sin^2 \varphi = (\xi + C_2)/(1 + C_2)\xi$, $\sin^2 \varphi = C_1(\xi + C_2)/(C_1 + C_2)\xi$.

Найдены четыре полюса интеграла I : $C_1 = 0$ или $C_2 = -1$; $C_1 = 1$ или $C_2 = 0$. С учетом (8) $\xi = 0$, $\xi = 1$. Подставляя эти значения ξ в показатель α_{mn}^2 , получим две точки сгущения $\alpha_{mn}^2 = \alpha_1$ при $\xi = 0$ и $\alpha_{mn}^2 = \alpha_2$ при $\xi = 1$.

Если оба корня C_1 , C_2 попадают в любую из четырех рассмотренных выше областей, то имеем одну точку сгущения $\xi = 0$ или $\xi = 1$. Этому случаю соответствуют кривые 2, 3 (фиг. 1). Но может оказаться, что оба корня попадают на границу соседних областей, например $C_2 = 0$, $C_1 = 1$. Тогда существуют две точки сгущения $\xi = 0$, $\xi = 1$ (кривая 1, фиг. 1). Если один из корней попадает внутрь области, а другой — на границу, то существуют также две точки сгущения (фиг. 1, кривая 1), которые могут и совпадать (фиг. 1, кривые 2, 3).

Численные эксперименты [7] показали, что функция плотности собственных движений при динамическом нагружении оболочек — достаточно сложная функция. Выше аналитически исследованы особенности этой функции.

Следуя [1], среди движений α_{mn}^2 выделим определяющие α_{mn*}^2 , для которых коэффициент в экспоненте достигает наибольшего значения. Для нахождения α_{mn*}^2 имеем систему

$$\partial \alpha_{mn}^2 / \partial r = 0, \quad \partial \alpha_{mn}^2 / \partial \xi = 0,$$

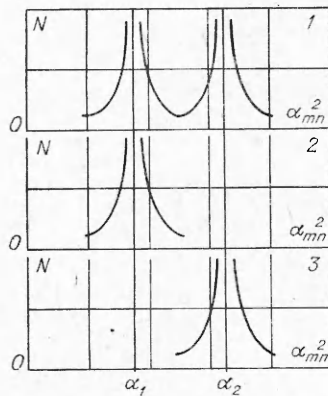
откуда

$$(9) \quad \alpha_{mn*}^2 = 2^{-1} \lambda [v + \xi(1 - v)] r^2 - [\chi + \xi(1 - \chi)]^2;$$

$$\lambda^2 = [\chi + \xi(1 - \chi)](1 - \chi) / [v + \xi(1 - v)](1 - v);$$

$$r^2 = 2^{-1} \varepsilon^{-2} \lambda [v + \xi(1 - v)].$$

Выражения (9) дают определяющие движения. При $\xi = 0$, $\xi = 1$ плотность определяющих движений стремится к бесконечности, в этом случае экспоненте с максимальным показателем соответствует множество движений.



Фиг. 1

Исследуем влияние точек сгущения на характер движения при потере устойчивости. Положение точек сгущения (фиг. 1) определяется геометрией оболочек и видом их нагружения. Поэтому дальнейшее рассмотрение основано на анализе задач о выпучивании оболочек с заданной геометрией и с заданным типом нагружения.

В случае нагружения цилиндрической оболочки $\chi=0$ постоянной интенсивной нагрузкой в осевом направлении $v=0$ из (5) при $\xi=0$, $\xi=1$ имеем две точки сгущения α_1 и α_2 . Причем $\alpha_2 > 0 > \alpha_1$. Следовательно, $\alpha_1 < 0$ нужно отбросить, так как изучаются только движения с показателем $\alpha_{mn}^2 > 0$. Этой задаче соответствует кривая 3 на фиг. 1. Подставляя $\chi=v=0$ и $\xi=1$ в (9), получим

$$\alpha_{mn}^2 = \alpha_2 = 4^{-1}\varepsilon^{-2} - 1.$$

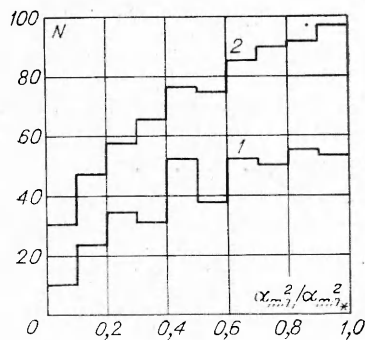
Итак, определяющие движения попадают на точку сгущения, т. е. при $\varepsilon \rightarrow 0$ в малой окрестности определяющих движений имеется бесконечное множество движений с почти совпадающими показателями экспоненты.

В задаче нагружения сферы гидростатическим давлением при $\chi=v=1$ (этой задаче соответствует кривая 3 на фиг. 1) имеем аналогичный результат: определяющие движения попадают на точку сгущения.

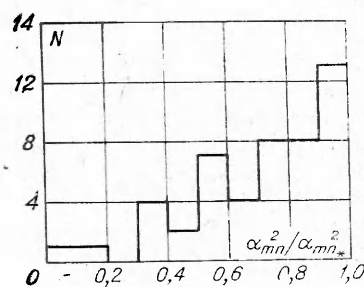
Случаю нагружения цилиндра поперечным давлением $\chi=0$, $v > 1$ соответствует кривая 1 на фиг. 1. Из (9) имеем

$$\alpha_{mn}^2 = \alpha_2 = \lambda^2 4^{-1}\varepsilon^{-2} - 1, \quad \lambda^2 > 1.$$

Определяющие движения также попадают на точку сгущения. Существование точек сгущения для двух первых задач было показано в [3]. В данной работе построена функция плотности собственных движений в общем случае динамического нагружения произвольной оболочки. Оказалось, что эта функция имеет две точки сгущения. Были найдены определяющие движения и исследовалось влияние на них плотности собственных движений. В [1] указана возможность замены системы с бесконечным числом степеней свободы системой с одной степенью свободы, для которой показатель в экспоненте максимален. Если процесс потери устойчивости изучается на конечном интервале, такая замена не всегда возможна. В случае попадания определяющих движений на точку сгущения необходимо учесть плотность собственных движений [3].



Фиг. 2



Фиг. 3

Ранее была построена функция плотности собственных движений, имеющая две точки сгущения. На фиг. 2 приведены результаты расчетов, подтверждающие существование областей сгущения в задачах о нагружении цилиндрической оболочки осевой силой и поперечным давлением. Вычисления проводились по формуле (5) при заданных значениях параметров R/h , L/R и перегрузок λ . Из полученных значений α_{mn}^2 выбирались только положительные $\alpha_{mn}^2 > 0$ и определялось максимальное α_{mn*}^2 . Кривые фиг. 2, 3 строились следующим образом: интервал α_{mn}^2 от 0 до α_{mn*}^2 разбивался на десять равных частей, подсчитывалось число движений α_{mn}^2 , попадающих в такой промежуток, и наносилось на фигуру. В результате получилась ступенчатая функция.

Задача о нагружении цилиндра осевой силой (см. фиг. 2) считалась при следующих значениях параметров: кривая 1 — $h/R=1/50$, $L/R=2$, $\alpha_{mn*}^2=4,888$, $\lambda=0,0605$; кривая 2 — $h/R=1/100$, $L/R=2$, $\alpha_{mn*}^2=4,894$, $\lambda=0,0302$. В случае цилиндра при поперечном давлении (фиг. 3) выбраны такие значения параметров: $h/R=1/400$, $L/R=2$, $\alpha_{mn*}^2=0,188$, $\lambda=0,0029$.

Решение (2) в виде ряда по синусам не является полным для замкнутой оболочки, необходимо еще учесть решение в виде ряда по косинусу, тогда число движений, попадающих в заданный интервал, удвоится.

Из фиг. 2 видно, что с уменьшением тонкостенности плотность собственных движений возрастает. Система с бесконечным числом степеней свободы (2) хорошо аппроксимируется системой с большим числом степеней свободы: при практических расчетах надо удерживать большое число членов ряда (2), которое в этом случае определяется тонкостенностью оболочки и типом нагружения.

Задача о нагружении цилиндрической оболочки поперечным давлением теоретически дает совпадение определяющих движений с точкой сгущения, но в исследуемом диапазоне перегрузок для заданной тонкостенности порядка $h/R \geq 1/400$ плотность движений незначительна (фиг. 3). В этом случае бесконечный ряд (2) может быть аппроксимирован конечным рядом с несколькими членами или даже с одним членом.

Поступила 24 I 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. Лаврентьев М. А., Ишлинский А. Ю. Динамические формы потери устойчивости упругих систем.—«Докл. АН СССР», 1949, т. 64, № 6.
2. Вольмир А. С. Устойчивость деформируемых систем. М., Физматгиз, 1967.
3. Корнев В. М. Развитие динамических форм потери устойчивости упругих систем при интенсивном нагружении на конечном отрезке времени.— ПМТФ, 1972, № 4.
4. Корнев В. М. О формах потери устойчивости упругих оболочек при интенсивном нагружении.—«Изв. АН СССР. МТТ», 1969, № 2.
5. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. Т. 2. М.—Л., Гостехиздат, 1951.
6. Болотин В. В. Теория распределения собственных частот упругих тел и ее применение к задачам случайных колебаний.— ПМ, 1972, т. 8, вып. 4.
7. Anderson D. L., Lindberg H. E. Dynamic Pulse Buckling of Cylindrical Shells under Transient Lateral Pressures.—«AIAA Journal», 1968, vol. 6, N 4.