

ЛИТЕРАТУРА

1. Вулис Л. А., Кашкаров В. П. Теория струй вязкой жидкости. М., Наука, 1965.
2. Коул Дж. Методы возмущений в прикладной математике. М., Мир, 1972.

УДК 532.556.2 : 532.135

ТЕЧЕНИЕ НЕНЬЮТОНОВСКОЙ ЖИДКОСТИ В КАНАЛЕ
С КАВЕРНОЙ БОЛЬШОЙ ДЛИНЫ

Г. И. Бурдэ, Е. П. Ильясов, Ю. И. Терентьев,
Г. З. Файнбург
(Пермь)

Задача о течении жидкости в канале с каверной представляет интерес для многочисленных приложений. Различным вариантам этой задачи для случая ньютоновской жидкости посвящено значительное число работ (см. обзор [1]). Однако в литературе практически отсутствуют работы, рассматривающие аналогичные течения неньютоновских жидкостей [2, 3].

Между тем задача о течении вязкопластической жидкости в зазоре с углублением представляет интерес для практики нефтяного бурения, поскольку моделирует в известной степени процесс цементирования скважин с кавернами в стенках.

1. В качестве модели неньютоновской жидкости была выбрана квазипластическая жидкость Уильямсона [4], в которой эффективная вязкость η задается выражением $\eta = \eta_\infty + \tau_0/(b + I)$, где η_∞ — динамическая ньютоновская вязкость при бесконечно больших скоростях сдвига; τ_0 — некоторый аналог предельного напряжения сдвига жидкости Бингама; b — параметр модели Уильямсона; I — корень квадратный из второго инварианта тензора скоростей деформации. При $b = 0$ модель описывает вязкопластическую жидкость Бингама; случаю ньютоновской жидкости соответствует $\tau_0 = 0$.

Безразмерные уравнения, определяющие плоское стационарное течение, запишем через функцию тока ψ и завихренность Ω :

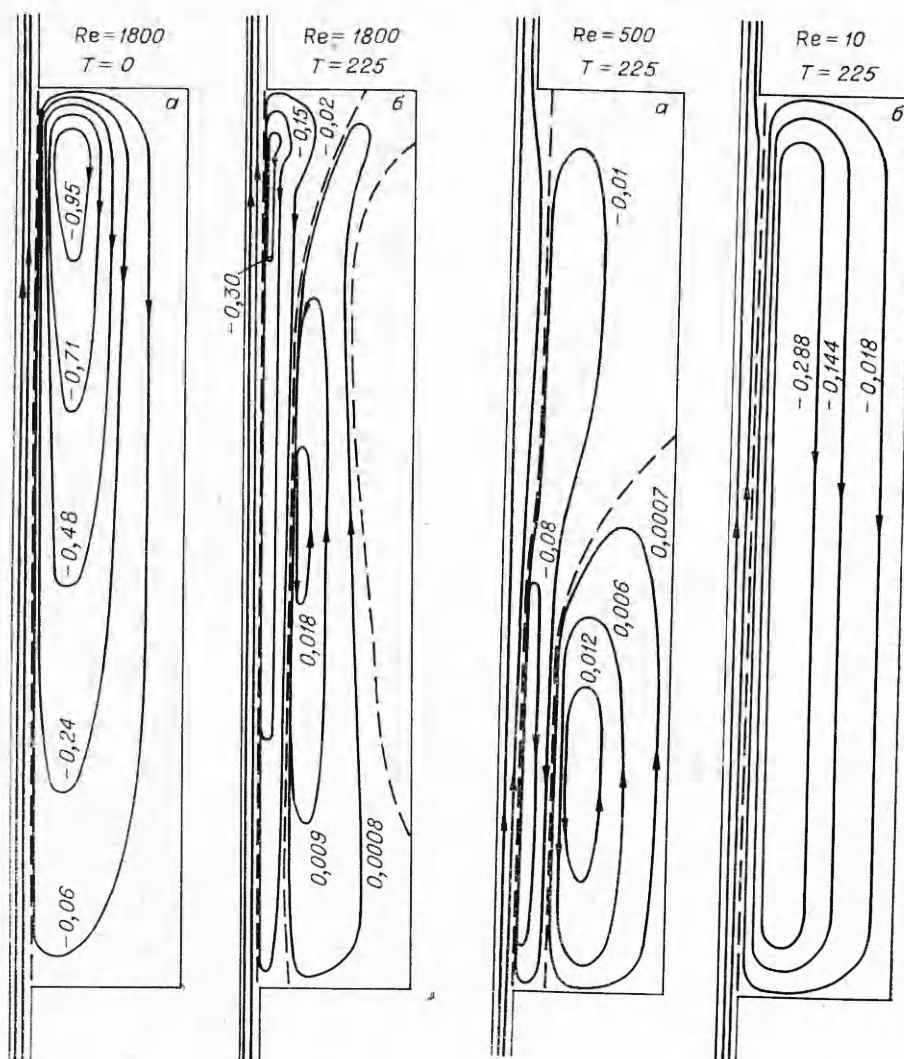
$$\operatorname{Re} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \Omega}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \Omega}{\partial x} \right) + \Delta (\psi \Omega) - \Omega \Delta \psi = 4 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} + \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right),$$

$$(1.1) \quad \Delta \psi = -\Omega,$$

$$\psi = 1 + T \left\{ B + \operatorname{Re} \left[4 \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right)^2 \right]^{1/2} \right\}.$$

В качестве единиц измерения длины и скорости выбраны полуширина канала d и средняя скорость U , определяемая по расходу; $\nu = \eta/\eta_\infty$ — безразмерная эффективная вязкость. Уравнения (1.1) содержат три критерия подобия: $\operatorname{Re} = U \rho d / \eta_\infty$ — число Рейнольдса, $T = \tau_0 \rho d^2 / \eta_\infty^2$ — аналог числа Хедстрема для жидкости Бингама, $B = b \rho d^2 / \eta_\infty$ — безразмерный параметр модели Уильямсона.

Форму расчетной области можно видеть на фиг. 1, 2. В качестве граничных условий во входном и выходном сечениях, расположенных на достаточном удалении от каверны, используется точное решение уравнений (1.1), соответствующее плоскопараллельному течению [5]. Остальные границы считаются твердыми, условия для ψ и Ω на них ставятся обычным образом.



Ф и г. 1

Ф и г. 2

Для решения уравнений использовалась разностная схема с аппроксимацией первых производных от завихренности в (1.1) односторонними разностями, ориентированными «против потока», и центрально-разностной аппроксимацией остальных производных. Система разностных уравнений решалась итерационным методом Либмана с последовательной нижней релаксацией.

2. Рассмотрим некоторые результаты расчетов. Наибольший интерес представляют течения в длинных и глубоких кавернах, часто встречающихся в естественных условиях. Поэтому все приводящиеся ниже карты линий тока относятся к каверне с безразмерными глубиной $H = 20$ и длиной $L = 120$.

Картина течения ньютоновской жидкости показана на фиг. 1, а ($Re = 1800$). Просматривается струя, образующаяся при внезапном расширении сечения канала и натекающая на заднюю стенку каверны, а также зона обратного более медленного течения вблизи твердых границ каверны. Центр вихревого движения сильно смещен к задней стенке, ко-

торая преграждает путь струе, заставляя присоединенные массы резко отклоняться в каверну. Как показали расчеты, такая структура течения сохраняется и для квадратных каверн, что качественно хорошо согласуется с экспериментальными данными (см., например, [6]).

Характер движения неньютоновской жидкости существенным образом определяется неоднородностью пространственного распределения эффективной вязкости, зависящей от градиентов скорости и параметров B , T , Re .

Параметр B выбирался так, чтобы рассматриваемая жидкость была близка по своим свойствам к жидкости Бингама. Обычно полагалось $B = 0,01T$; как показали проверочные расчеты, дальнейшее уменьшение B практически не изменяет структуры течения.

При увеличении числа Хедстрема T от нуля до значения $T = 225$ при постоянном $Re = 1800$ (фиг. 1, а, б) наряду с возникновением вторичного вихря и застойной зоны у дна каверны наблюдается уменьшение доли объема каверны, занимаемой основным вихрем. Появление застойной зоны у дна каверны связано, по-видимому, с большой ее глубиной. Расчеты, проведенные для каверны с $H = 9$ и $L = 60$ (т. е. при H/L , близком к $20/120$), обнаруживают сходные структуры течения, но без застойной зоны.

Уменьшение числа Рейнольдса при постоянном и достаточно большом значении параметра $T = 225$ может приводить к существенной смене режима течения — именно этот переход отражен на фиг. 1, б, 2, а. Центр основного вихря смещается к переднему краю выемки, интенсивность его при этом сильно падает, у заднего края каверны образуется практически застойная зона, и наряду с этим наблюдается некоторое затекание основного сквозного потока в каверну на глубины порядка ширины канала.

На фиг. 2, б представлен режим ползущего течения, наблюдающийся при малых Re и больших T . Дальнейшее уменьшение Re приводит, с одной стороны, к увеличению вязкости, а с другой стороны, к уменьшению вклада инерционных членов в уравнение движения. При очень малых Re наблюдается значительное затекание потока в средней части каверны — этот режим подробно рассматривался в [5].

Заметим, что анализ расчетных данных показывает, что влияние увеличения T при постоянном числе Рейнольдса Re на структуру течения сходно до некоторой степени с влиянием уменьшения Re при постоянном T .

Кратко упомянем о результатах, относящихся к кавернам других размеров. Например, серия расчетов, проводившихся для выемок различной глубины (от $H = 4$ до $H = 32$) при длине $L = 120$, показала, что в режиме течения, изображенном на фиг. 2, а ($Re = 1800$, $T = 225$), абсолютная глубина затекания у заднего края каверны несколько увеличивается при уменьшении H . При $H = 4$ сквозной поток доходит у заднего края до «дна» каверны.

В квадратных кавернах изменения в структуре течения не столь заметны, как в длинных кавернах. Центр основного вихря здесь всегда находится у заднего края выемки, а ниже наблюдается (в зависимости от глубины каверны) движение с одним или несколькими вихрями.

Поступила 9 VII 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. Горин А. В. Обзор моделей расчета течения несжимаемой жидкости в квадратной каверне. — В кн.: Градиентные и отрывные течения. Новосибирск, 1976.
2. Riha P., Lhota E. Two-dimensional flow of non-Newtonian fluid in a channel with rectangular cavities. — Acta techn. ČSAV, 1972, vol. 17, N 4.

3. Бахтияров С. И. Экспериментальное исследование динамики вытеснения жидкости из каверны. — В кн.: Теплофизика и физическая гидродинамика. Новосибирск, 1978.
4. Cramer S. D., Marchelle J. M. Numerical evaluation of models describing non-Newtonian behavior. — A. I. Ch. E. J., 1968, vol. 14, N 6.
5. Бурдэ Г. И., Ильясов Е. П., Терентьев Ю. Н., Файнбург Г. З. Численное исследование движения неньютоновской жидкости в канале с углублением. — В кн.: Гидродинамика. Вып. 9. Пермь, 1976.
6. Богатырев В. Я. и др. Экспериментальное исследование течения в траншее. — ПМТФ, 1976, № 2.

УДК 532.529

РЕОЛОГИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ СОСТОЯНИЯ СЛАБОКОНЦЕНТРИРОВАННЫХ СУСПЕНЗИЙ ДЕФОРМИРУЕМЫХ ЭЛЛИпсоИДАЛЬНЫХ ЧАСТИЦ

Куак Ван Донг, Ю. И. Шмаков

(Киев)

В [1] с позиций структурно-континуального подхода [2, 3] получены реологические уравнения состояния разбавленных суспензий деформируемых эллипсоидальных частиц, обладающих внутренней упругостью и вязкостью, с дисперсионной средой, являющейся ньютоновской жидкостью.

В данной работе эти результаты обобщаются на большие концентрации. Учет влияния гидродинамического взаимодействия взвешенных частиц на реологическое поведение суспензии проводится с помощью подхода Симха [4].

Как и в [1], будем моделировать взвешенные частицы эллипсоидом, обладающим внутренней линейной упругостью и линейной вязкостью (тело Фойгта), меняющим в процессе взаимодействия с дисперсионной средой свои размеры, но сохраняющим свой объем и остающимся по форме эллипсоидом вращения. Для установления реологических уравнений состояния рассматриваемых суспензий с помощью структурно-континуального подхода необходимо определить возмущения, вносимые в неоднородное течение дисперсионной среды взвешенной частицей, при этом для учета гидродинамического взаимодействия взвешенных частиц граничные условия «на бесконечности» в соответствии с [4] должны быть снесены на поверхность экранирующей частицу сферы с центром, совпадающим с центром частицы, и радиусом $R = (ab^2/\Phi)^{1/3}$, где $2a$ и b — длина оси вращения и экваториальный радиус частицы соответственно; Φ — объемная концентрация взвешенных частиц.

Решение настоящей гидродинамической задачи в приближении Стокса будем искать методом последовательных приближений [5]. В качестве первого приближения примем решение, полученное в [1] для случая, когда частица обтекается неограниченным потоком дисперсионной среды, но граничные условия «на бесконечности» снесены на поверхность сферы, радиус которой значительно превышает эффективный радиус частицы. В подвижной системе координат x_i с началом в центре частицы и осями, совпадающими по направлению с направлениями главных осей эллипсоидальной частицы, это решение имеет вид

$$(1) \quad \begin{aligned} u_i = u_{0i} + \frac{\partial}{\partial x_i} (D_j \chi_j) - \varepsilon_{ijk} K_j \frac{\partial \chi_j}{\partial x_k} + c_{jk} x_j \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x_i \partial x_k} - \\ - c_{ij} \frac{\partial \Omega}{\partial x_j} - \frac{4}{3R^3} (c_{ki} - c_{ik}) x_k + \frac{4x_i \Psi}{R^5} + \frac{5(R^2 - r^2)}{R^5} \frac{\partial \Psi}{\partial x_i}, \\ p = p_0 + 2\mu c_{ij} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x_i \partial x_j}, \end{aligned}$$