

коящуюся среду, как твердый стержень через идеальную невязкую жидкость.

В заключение отметим, что пространственная локализация сдвиговых возмущений в дилатантных жидкостях подобна факту существования фронтных решений типа тепловых волн в теории нелинейной теплопроводности [11]. В обоих случаях обобщенные решения нелинейных параболических уравнений (систем) содержат поверхность слабого разрыва — фронт, на котором константное решение сшивается с переменным. В [12] была установлена связь между решениями типа тепловых волн и существованием особых решений соответствующих дифференциальных уравнений (систем). При рассмотрении задач теории пограничного слоя дилатантных жидкостей эта связь также очевидна.

Поступила 21 XII 1977

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Рейнер М. Реология. М., «Наука», 1965.
2. Van Atta C. W. An example of unsteady laminar mixing in power law fluids.— «A. I. Ch. E. J.», 1966, vol. 12, N 6, p. 1224.
3. Мартинсон Л. К., Павлов К. Б. Сдвиговые течения жидкости со степенным реологическим законом при наличии постоянной поперечной составляющей скорости.— «Изв. АН СССР. МЖГ», 1973, № 4, с. 15.
4. Acrivos A., Shah M. J., Petersen E. E. Momentum and heat transfer in laminar boundary-layer flows of non-newtonian fluids past external surfaces.— «A. I. Ch. E. J.», 1960, vol. 6, N 2, p. 312.
5. Kapur J. N. On the two-dimensional jet of an incompressible pseudo-plastic fluid.— «J. Phys. Soc. Jap.», 1962, vol. 17, N 8, p. 1303.
6. Gutfinger C., Shinnar R. Velocity distributions in two-dimensional laminar liquid-into-liquid jets in power-law fluids.— «A. I. Ch. E. J.», 1964, vol. 10, N 5, p. 631.
7. Lemieux P. F., Unny T. E. The laminar two-dimensional free jet an incompressible pseudoplastic fluid.— «Trans ASME. Ser. E. Appl. Mech.», 1969, vol. 35, N 4.
8. Шульман З. П. Конвективный теплоперенос реологически сложных жидкостей. М., «Энергия», 1975.
9. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., ФМ, 1963.
10. Матвеев Н. М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. М., «Высш. школа», 1967.
11. Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М., «Наука», 1966.
12. Павлов К. Б. Пространственная локализация тепловых возмущений при нагревании сред с объемным поглощением тепла.— ПМТФ, 1973, № 5.

УДК 532.5

### ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ РАВНОВЕСИЯ И УСТОЙЧИВОСТИ КАПЛИ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

В. Р. Орел

(Москва)

Равновесные формы и устойчивость осесимметричных капель подробно исследованы в работах [1—3]. Условиям отрыва капель при их медленном росте посвящены работы [4—6]. В [7] на основании результатов [6] предлагается метод определения коэффициента поверхностного натяжения жидкости по высоте капли в момент ее отрыва.

Ниже рассматривается равновесие и устойчивость осесимметричной капли, сообщающейся с объемом несжимаемой жидкости, ограниченным плоской свободной поверхностью. В отличие от [1—7] при исследовании устойчивости такой системы [8] необходимо учитывать возмущения, изменяющие объем капли. Поэтому класс устойчивых равновесных форм сужается.

1. Пусть некоторый объем  $Q$  несжимаемой жидкости находится в однородном поле массовых сил и ограничен твердыми стенками сосуда  $S$  и свободными поверхностями  $\Sigma$  и  $\Sigma_1$ . Поверхность  $\Sigma_1$  является плоской, а  $\Sigma$  ограничивает некоторую часть объема, выступающую в виде капли на внешнюю поверхность стенок сосуда. Предположим, что поверхность стенок в окрестности контура  $L$  основания капли и характеристики смачиваемости этой части стенок осесимметричны, причем ось симметрии параллельна направлению поля тяжести  $g$ . Считаем, что капля также имеет осесимметричную форму. Радиус контура основания капли обозначим через  $R_0$ , высоту капли через  $H$ . Введем цилиндрическую систему координат  $\{r, z, \theta\}$  с началом в центре основания капли и осью  $Z$ , направленной по оси симметрии внутрь объема  $Q$  (фиг. 1). Координаты  $r$  и  $z$  выбираем безразмерными:  $r = R/R_0$ ,  $z = Z/R_0$ .

Обозначим через  $s$  длину дуги, отсчитываемую от полюса капли вдоль меридиана. Координаты меридиана зададим параметрически

$$r = r(s), \quad z = z(s), \quad 0 \leq s \leq l,$$

где  $l$  — полная длина меридиана капли.

Функции  $r(s)$ ,  $z(s)$  удовлетворяют известной [1] системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$(1.1) \quad \begin{aligned} r''(s) &= -z'(s)q(s, \beta, \eta), \quad z''(s) = r'(s)q(s, \beta, \eta), \\ q(s, \beta, \eta) &= \beta z(s) + \eta - z'(s)/r(s) \end{aligned}$$

и краевым условиям ( $-h$  — ордината полюса капли)

$$(1.2) \quad r(0) = 0, \quad z(0) = -h, \quad r(l) = 1, \quad z(l) = 0.$$

Безразмерные параметры  $\beta$ ,  $\eta$  системы (1.1) имеют вид

$$(1.3) \quad \beta = \rho g R_0^2 / \sigma, \quad \eta = p_0 R_0 / \sigma,$$

где  $\rho$  — плотность жидкости;  $g$  — проекция ускорения силы тяжести  $g$  на ось  $Z$ ;  $\sigma$  — коэффициент поверхностного натяжения капли;  $p_0$  — давление в плоскости основания капли ( $z = 0$ ).

При фиксированных величинах  $h$  и  $\eta$  определение равновесной формы капли сводится к поиску такого значения параметра  $\beta = \beta(h, \eta)$ , при котором соответствующая полученной тройке чисел  $\{h, \eta, \beta\}$  интегральная кривая системы (1.1), выйдя из точки  $(0, -h)$  плоскости  $(r, z)$  и не покидая полуплоскость  $\{z \leq 0\}$ , попадает в точку  $(1, 0)$ . Вычисление параметра  $\beta$  производится каким-либо итерационным методом, на каждом шаге которого система (1.1) численно интегрируется по параметру  $s$  от  $s = 0$  до  $s = l$  такого, что  $z(l) = 0$ . Итерации проводятся до получения (с заданной точностью) равенства  $r(l) = 1$ .

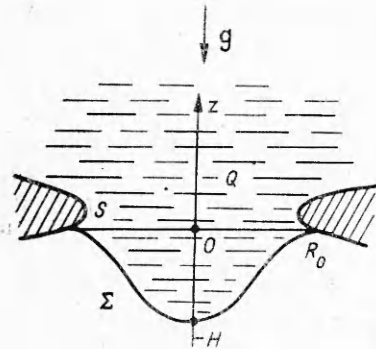
Следует отметить, что граничное условие  $r(0) = 0$  (1.2) создает некоторые затруднения при численном решении уравнений (1.1) вблизи точки  $s = 0$ , поскольку  $r(s)$  входит в функцию  $q(s, \beta, \eta)$  знаменателем. Непосредственным раскрытием указанной неопределенности задачи (1.1), (1.2) находим следующие условия ограниченности решения при  $s = 0$ :

$$(1.4) \quad r'(0) = 1, \quad r''(0) = z'(0) = 0, \quad z''(0) = (\eta - \beta h)/2.$$

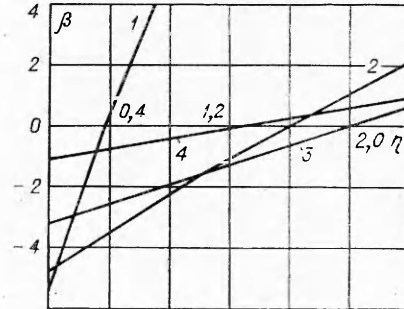
Соотношения (1.4) позволяют делать первый шаг в точке  $s = 0$  при численном интегрировании системы (1.1) методом Рунге — Кутты, не прибегая к степенным разложениям [1].

Заметим также, что для любого значения  $h$  параметры

$$(1.5) \quad \beta = 0, \quad \eta = 4h/(1 + h^2)$$



Фиг. 1



Фиг. 2

отвечают следующему точному решению задачи (1.1), (1.2):

$$(1.6) \quad r(s) = \frac{1+h^2}{2h} \sin \frac{2h}{1+h^2} s,$$

$$z(s) = \frac{1-h^2}{2h} - \frac{1+h^2}{2h} \cos \frac{2h}{1+h^2} s, \quad 0 \leq s \leq \frac{1+h^2}{2h} \arccos \frac{1-h^2}{1+h^2}.$$

В этом можно убедиться прямой подстановкой функций (1.6) с учетом (1.5) в уравнения (1.1) и граничные условия (1.2). Решение (1.6) определяет дугу окружности радиуса  $(1+h^2)/2h$ , являющуюся образующей сферического сегмента, форму которого капля принимает в невискозности.

При заданном  $h > 0$  и значениях  $\eta$ , отличных от (1.5), определение параметра  $\beta$ , отвечающего решению задачи (1.1), (1.2), производится по предложенной выше итерационной схеме. Для ряда фиксированных значений параметра  $h$  с помощью ЭЦВМ были вычислены зависимости  $\beta(h, \eta)$  параметра  $\beta$  от  $\eta$ . На фиг. 2 приведены кривые  $\beta(h, \eta)$  для значений  $h = 0,1; 0,5; 1; 2,5$  (линии 1—4 соответственно). Функции  $\beta(h, \eta)$  с ростом  $\eta$  монотонно возрастают, проходя через нуль, согласно (1.5) при  $\eta = 4h/(1+h^2)$ . В области  $0 < \eta < 2$  зависимости  $\beta = \beta(h, \eta)$  при любом фиксированном  $h$  близки к линейным. Линией  $\beta = \beta(0, \eta)$ , отвечающей  $h = 0$ , очевидно, является ось  $\beta$ , так как при любом  $\beta$  и  $\eta = 0$  необходимые условия (1.1) равновесия плоской поверхности  $\{z \equiv 0\}$  выполнены тождественно.

Поведение интегральных кривых уравнений типа (1.1) и соответствующие формы капель подробно изучены и проиллюстрированы в работах [1—3]. Не приводя форм меридианов капель, которые вполне аналогичны рассмотренным в [1—3], отметим, что при данном выборе безразмерных единиц для любого  $h > 0$  капля с меньшим  $\eta$  целиком содержится внутри капли с большим значением параметра  $\eta$ .

2. Для определения устойчивости данной равновесной формы капли воспользуемся подходом работы [8]. Предположим, что стенки  $S$  сосуда в окрестности контура  $L_1$  свободной поверхности  $\Sigma_1$  вертикальны, а соответствующий краевой угол равен  $90^\circ$ , т. е. поверхность  $\Sigma_1$  является плоской. Пусть  $(x, y)$  — декартовы координаты в плоскости  $\Sigma_1$ . Тогда задача (1.6) работы [8] относительно возмущения  $u(x, y)$  поверхности  $\Sigma_1$  примет вид

$$(2.1) \quad -\sigma_1 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = \lambda \bar{u}(x, y), \quad (x, y) \in \Sigma_1, \quad \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{L_1} = 0,$$

где  $\sigma_1$  — коэффициент поверхностного натяжения на  $\Sigma_1$ ;  $\mathbf{n}$  — нормаль к контуру  $L_1$  в плоскости  $\Sigma_1$ .

Очевидно, что функция  $u_0(x, y) \equiv 1$  является решением задачи (2.1), отвечающим собственному значению  $\lambda_0 = 0$ . Из самосопряженности оператора задачи (2.1) следует [9], что остальные собственные функции  $u_k(x, y)$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) этой задачи удовлетворяют условию

$$(2.2) \quad \int_{\Sigma_1} u_0 u_k d\Sigma_1 = \int_{\Sigma_1} u_k d\Sigma_1 = 0.$$

Но, согласно [9], оператор задачи (2.1) с изопериметрическим ограничением (2.2) положительно определен. Следовательно,  $\lambda_0 = 0$  является наименьшим собственным значением задачи (2.1).

Обозначим через  $\kappa_1, \kappa_2, \dots$  упорядоченную последовательность собственных значений задачи (3.3) работы [8] на поверхности капли для случая осесимметричных ( $n = 0$ ) возмущений  $u(s)$

$$(2.3) \quad -u''(s) - r'(s)u'(s)/r(s) + \tau(s)u(s) = \lambda u(s), \quad 0 < s < l, \\ u'(0) = 0, \quad \chi u(l) + u'(l) = 0,$$

где  $\tau(s)$  имеет вид [1]

$$(2.4) \quad \tau(s) = \beta r'(s) - [z'(s)/r(s)]^2 - r''(s)^2 - r''(s)^2,$$

$r(s), z(s)$  — решение задачи (1.1), (1.2), а параметр  $\chi$  определяется условиями смачиваемости контура капли [1, 2].

Пусть  $w_1$  — объем первой собственной функции задачи (2.3). Пользуясь уравнением (2.5) работы [8] при  $w_1 \neq 0$  или же случаем Б [8] при  $w_1 = 0$  и учитывая, что наименьшее собственное значение задачи (2.1) равно нулю, можно показать, что знак минимума второй вариации потенциальной энергии системы  $\{\Sigma, \Sigma_1\}$  совпадает со знаком первого собственного значения  $\kappa_1$  задачи (2.3). Отметим, что поскольку задача (2.3) для осесимметричных возмущений поверхности  $\Sigma$  не имеет изопериметрического ограничения, из неравенства (8.19) работы [2] следует, что неосесимметричные возмущения можно не рассматривать. Поэтому ответ на вопрос об устойчивости капли дается только знаком первого собственного числа  $\kappa_1$  задачи (2.3).

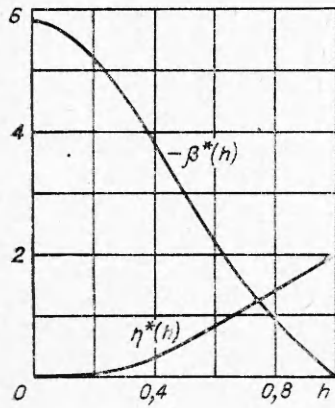
Рассмотрим случай, когда жидкость абсолютно смачивает поверхность стенок  $S$  вплоть до контура капли  $L$ . Тогда краевое условие задачи (2.3) в точке  $s = l$  примет вид

$$(2.5) \quad u(l) = 0.$$

В случае же задачи (2.3) с ограничением (2.5) для решения вопроса об устойчивости данной равновесной формы нет необходимости вычислять первое собственное значение  $\kappa_1$  задачи (2.3). Достаточно проинтегрировать дифференциальное уравнение задачи (2.3) при  $\lambda = 0$  с начальными условиями

$$u(0) = 1, \quad u'(0) = 0.$$

Тогда, если  $u(s) > 0$  при всех  $0 < s \leq l$ , равновесная форма устойчива, если же найдется точка  $s^* \in (0, l)$  такая, что  $u(s^*) = 0$ , то данная равновесная форма неустойчива. Граница устойчивости достигается, если  $u(s) > 0$ ,  $0 < s < l$ , а  $u(l) = 0$ . Эти утверждения следуют из теоремы сравнения [10] для решений линейных дифференциальных уравнений второго порядка.



Фиг. 3

С использованием указанного критерия устойчивости были исследованы равновесные формы капель при отрицательных числах Бонда  $\beta$  (1.3). При различных значениях  $h$  проведены соответствующие расчеты вдоль рассмотренных в п. 1 кривых  $\beta(h, \eta)$ . На фиг. 3 представлены кривые  $\beta^*(h)$  и  $\eta^*(h)$ , определяющие границу устойчивости капель высоты  $h (= \text{const})$ . Именно при  $\beta < \beta^*(h)$  равновесные формы капель данной высоты  $h$  неустойчивы, а при  $\beta > \beta^*(h)$ ,  $h \in (0, 1)$  — устойчивы. Причем при  $h > 1$  нет устойчивых форм равновесия с отрицательными числами  $\beta$ . Из монотонности кривых  $\beta(h, \eta)$  (см. фиг. 2) следуют аналогичные утверждения об устойчивости для  $\eta < \eta^*(h)$  или  $\eta > \eta^*(h)$  соответственно.

Заметим также, что  $\beta^*(0) = -\xi_1^2$ , где  $\xi_1$  — первый корень функции Бесселя  $J_0(\xi)$  [10]. Это можно показать с помощью предельного перехода  $r' \rightarrow 1$ ,  $r''$ ,  $z'$ ,  $z'' \rightarrow 0$  в выражении (2.4) и уравнении (2.3).

Проведенные расчеты позволяют сформулировать критерий устойчивости системы равновесных поверхностей  $\{\Sigma, \Sigma_1\}$  и для случая  $\beta = \text{const}$ . Зафиксируем некоторое число  $\beta_0 \in (-\xi_1^2, 0)$  и положим  $\eta_0 = \eta^*(h_0)$ , где  $h_0$  — корень уравнения  $\beta^*(h) = \beta_0$ . Тогда при данном значении числа Бонда  $\beta_0$  любая равновесная форма капли с безразмерным давлением  $\eta$  в основании устойчива при  $\eta < \eta_0$  и неустойчива при  $\eta > \eta_0$ . Одновременно высота капли  $h$  удовлетворяет неравенствам  $h < h_0$  и  $h > h_0$  соответственно.

Подчеркнем, что, как показано выше, при переходе через критические значения система  $\{\Sigma, \Sigma_1\}$  теряет устойчивость строго осесимметричным образом. Поэтому вопрос о возможности перехода капли в какую-либо близкую неосесимметричную форму равновесия, рассматриваемый в работах [1, 4] при исследовании эволюции изолированной капли, в данном случае не возникает. Следовательно, потеря устойчивости при условии  $\beta = \text{const}$  сопровождается отрывом части капли, так как при  $\eta > \eta_0$  устойчивых осесимметричных форм нет.

3. В качестве примера применения полученных условий устойчивости рассмотрим одну возможную схему метода измерения коэффициента поверхностного натяжения. Пусть при некотором давлении  $p$  на срезе основания капли объем  $Q$  (п. 1), ограниченный свободными поверхностями  $\Sigma$  и  $\Sigma_1$  (см. фиг. 1), находится в состоянии устойчивого равновесия. Давление  $p$  можно измерить достаточно точно, так как оно определяется расстоянием между основанием капли и плоской поверхностью  $\Sigma_1$ . Если приспособление, на котором фиксирован контур капли, квазистатически смещать вертикально вниз, то давление  $p$  в основании капли будет расти. Считаем, что площадь поверхности  $\Sigma_1$  и объем жидкости в сосуде под ней существенно превышают площадь основания капли и ее объем. Тогда после достижения некоторого критического давления  $p_0$  часть капли оторвется, но уровень поверхности  $\Sigma_1$  практически не изменится, и поэтому давление отрыва  $p_0$  также может быть измерено с необходимой точностью.

Описываемый опыт производится при фиксированном значении параметра  $\beta_0$ . Используя выражения (1.3), образуем новый безразмерный параметр

$$(3.1) \quad \alpha = \beta_0/\eta_0 = \rho g R_0/p_0.$$

Параметр  $\alpha$  (3.1) не зависит от коэффициента поверхностного натяжения  $\sigma$  и вычисляется непосредственно из результатов эксперимента. Поскольку (п. 2)  $\beta_0 = \beta^*(h_0)$ ,  $\eta_0 = \eta^*(h_0)$ , из фиг. 3 следует, что параметр  $\alpha (< 0)$  монотонно растет на отрезке  $0 < h \leq 1$ . Поэтому вместо зависимостей  $\beta^*(h)$ ,  $\eta^*(h)$  можно построить функции  $\beta^*(\alpha)$ ,  $\eta^*(\alpha)$ ,  $-\infty < \alpha < 0$ , также определяющие границу устойчивости. Тогда, имея графические или табличные зависимости  $\eta^*(\alpha)$ , можно с помощью (1.3), (3.1) найти коэффициент  $\sigma$

$$\sigma = p_0 R_0 / \eta^*(\alpha).$$

В таблице даны величины  $\eta$ ,  $h$ , отвечающие некоторым значениям параметров  $|\alpha|$  и  $|\alpha|^{-1}$ .

$\gamma$	$\alpha = -\gamma$		$\alpha^{-1} = -\gamma$		$\gamma$	$\alpha = -\gamma$		$\alpha^{-1} = -\gamma$	
	$\eta$	$h$	$\eta$	$h$		$\eta$	$h$	$\eta$	$h$
0,05	1,91748	0,97450	0,21476	0,33524	0,55	1,49774	0,81792	1,01298	0,65188
0,10	1,85316	0,95255	0,36460	0,42362	0,60	1,46901	0,80704	1,05280	0,66411
0,15	1,79851	0,93285	0,48322	0,47830	0,65	1,44160	0,79675	1,08921	0,67546
0,20	1,75011	0,91482	0,58234	0,51675	0,70	1,41531	0,78698	1,12265	0,68606
0,25	1,70618	0,89814	0,66769	0,54622	0,75	1,39004	0,77768	1,15347	0,69598
0,30	1,66571	0,88259	0,74244	0,57017	0,80	1,36572	0,76883	1,18196	0,70529
0,35	1,62804	0,86804	0,80872	0,59051	0,85	1,34235	0,76042	1,20830	0,71402
0,40	1,59275	0,85440	0,86790	0,60830	0,90	1,31976	0,75237	1,23286	0,72228
0,45	1,55937	0,84152	0,92113	0,62420	0,95	1,29807	0,74473	1,25569	0,73005
0,50	1,52778	0,82939	0,96929	0,63865	1,00	1,27703	0,73740	1,27703	0,73740

Отметим, что в работе [7] описана методика и приводится ряд результатов определения коэффициента поверхностного натяжения с помощью подхода, основанного на условиях устойчивости осесимметричной капли несжимаемой жидкости, полученных в работе [6]. Условия устойчивости [6] найдены в точной постановке и эквивалентны условиям устойчивости изолированной осесимметричной капли, выведенным в [1, 2]. В методе [7] необходимо измерять высоту капли в момент, непосредственно предшествующий ее отрыву при квазистатическом выдавливании из отверстия известного радиуса.

В [7] приводится также довольно обширный список работ, связанных с измерением коэффициента поверхностного натяжения статическими методами. Преимуществами своего подхода по сравнению с ранее предложенными авторы [7] считают, в частности, следующие: использование точных условий устойчивости, связывающих параметры установки с измеряемой в опыте высотой капли и искомым коэффициентом; возможность измерения данным методом коэффициента  $\sigma$  на границе раздела двух жидкостей; возможность измерения  $\sigma$  для жидкости при высокой температуре, когда замер высоты капли можно произвести теми же оптическими методами, но с большего расстояния.

Рассмотренная выше схема эксперимента, основанная на условиях устойчивости, полученных в п. 2 в точной постановке, обладает той же областью применимости, что и методика [7]. Отметим лишь дополнительно, что измерение критического давления в предложенной схеме в принципе может быть проведено более надежно, чем измерение высоты капли в момент, предшествующий отрыву.

Автор выражает благодарность Ф. Л. Черноусько за внимание к работе.

Поступила 27 XII 1977

## ЛИТЕРАТУРА

1. Гидромеханика невесомости. М., «Наука», 1976.
  2. Беляева М. А., Слобожанин Л. А., Тюпцов А. Д. Гидростатика в слабых силовых полях.— В кн.: Введение в динамику тела с жидкостью в условиях невесомости. М., изд. ВЦ АН СССР, 1968.
  3. Pitts E. The stability of pendent liquid drops. Pt. 2. Axial symmetry.— *J. Fluid Mech.*, 1974, vol. 63, N 3, p. 483.
  4. Слобожанин Л. А., Тюпцов А. Д. Эволюция и отрыв капель при их медленном росте.— ПМТФ, 1975, № 1.
  5. Буевич Ю. А., Бутков В. В. О механизме образования пузыря при истечении газа в жидкость из круглого отверстия.— *«Теор. основы химич. технологии»*, 1971, т. 5, № 1.
  6. Pitts E. The stability of drop hanging from a tube.— *J. Inst. Mathem. Applic.*, 1976, vol. 17, p. 387—397.
  7. Levin P. F., Pitts E., Terry G. C. New method for measuring surface tension from the height of a pendent drop.— *J. Chem. Soc. Faraday I*, 1976, vol. 72, p. 1519.
  8. Орел В. Р. Об устойчивости несжимаемой жидкости, подверженной действию сил поверхностного натяжения. Случай двусвязной равновесной поверхности.— ПМТФ, 1974, № 6.
  9. Михлин С. Г. Вариационные методы в математической физике. М., «Наука», 1970.
  10. Трикоми Ф. Дифференциальные уравнения. М., ИЛ, 1962.
-