

$$\rho - 1 - k > 0 \text{ или } \alpha < 1 - \beta^2(k - 1)/2,$$

также совпадают с условиями устойчивости по моменту того же порядка решения уравнения (4).

В заключение следует отметить, что с помощью уравнений (5), (10) и при соответствующем выборе граничных условий может быть решена задача об определении вероятности выхода случайного процесса $s(t)$ за границы заданной области.

Модель упругого стержня, расположенного в сплошной вязкой среде, является упрощенной моделью вязкоупругого стержня, материал которого обладает ограниченной вязкостью. Поэтому полученные выше результаты, по-видимому, качественно будут совпадать с аналогичными результатами для указанного стержня, сжатого нагрузкой, являющейся стационарным процессом типа «белого» шума.

Поступила 22 V 1980

ЛИТЕРАТУРА

1. Потанов В. Д. Устойчивость вязкоупругих стержней и оболочек при действии нагрузок, меняющихся во времени. — Механика композитных материалов, 1979, № 3.
2. Миллиончиков М. Д. К теории однородной изотропной турбулентности. — ДАН СССР, 1941, т. 32, № 9.
3. Болотин В. В. Случайные колебания упругих систем. М.: Наука, 1979.
4. Болотин В. В., Москвин В. Г. О параметрических резонансах в стохастических системах. — Изв. АН СССР. МТТ, 1972, № 4.
5. Свешников А. А. Прикладные методы теории случайных функций. М.: Наука, 1968.
6. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972.
7. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. М.: Гостехиздат, 1950.
8. Хасьминский Р. З. Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. М.: Наука, 1969.

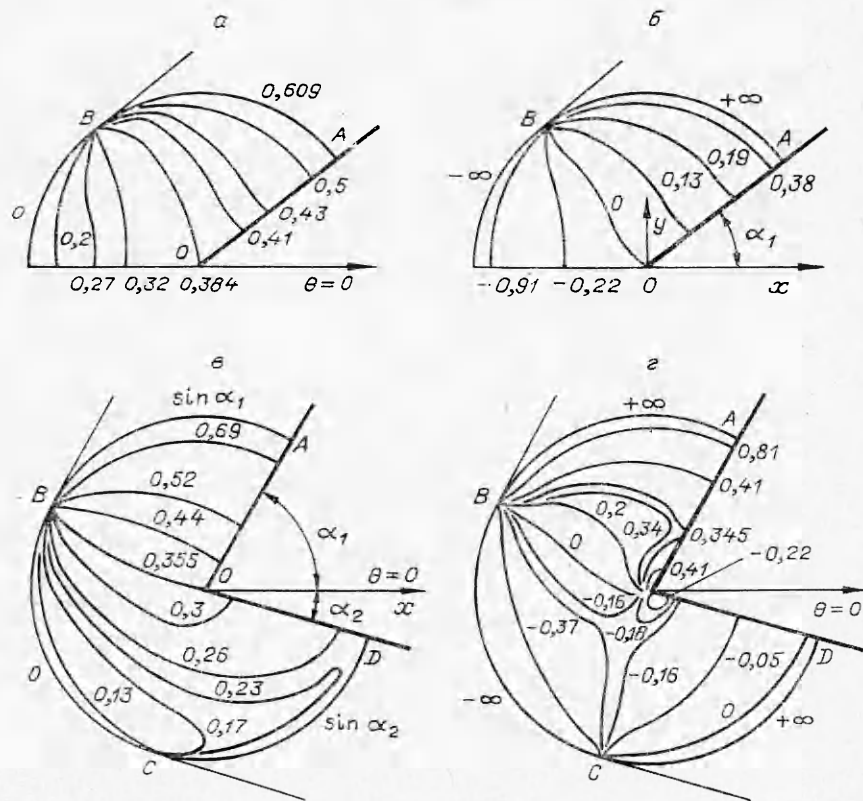
УДК 533.6.011

К ЗАДАЧЕ О ВНЕЗАПНОМ ВДВИГАНИИ КЛИНА

В. В. Титаренко
(Саратов)

Рассматривается задача о внезапном вдвигании в покоящуюся среду клина с постоянной скоростью. Некоторые случаи задачи исследованы в линейном приближении в [1—4]. В [4] построены также нелинейные решения, справедливые в окрестности волновой границы области возмущений. Ниже для симметричного и несимметричного случаев движения клина с малой скоростью построены нелинейные решения в окрестности его носика. Показано сильное качественное отличие полей изобар, вычисленных по линейной и нелинейной теориям. В несимметричном случае найдено, что в разложения акустики и в разложения, справедливые в окрестности волновой границы, необходимо вставить дополнительные члены, указаны их порядок и вид. Обнаружен режим вдвигания с образованием висячей ударной волны, рассчитана ее интенсивность. Проведен также линейный и нелинейный анализ всевозможных случаев вдвигания вогнутого угла.

1. Рассмотрим внезапное вдвигание бесконечного клина произвольного угла раствора $2\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ (фиг. 1) в покоящийся идеальный газ с малой постоянной скоростью $w_0 = a_0 M_0$ (a_0 — скорость звука в газе,



Ф и г. 1

$M_0 \ll 1$). Введем полярную систему автомодельных координат r, θ , начало которой совпадает с носиком клина, ось $\theta = 0$ противоположна направлению движения клина, и безразмерные относительное избыточное давление P и потенциал скорости f :

$$(1.1) \quad r \cos \theta = x/(a_0 t), \quad r \sin \theta = y/(a_0 t), \quad p = p_0(1 + \gamma P), \\ \Phi = a_0^2 t f(r, \theta).$$

Здесь t — время; p — давление; Φ — размерный потенциал скорости.

Задача отыскания f, P в области возмущений $OABCD$ (фиг. 1) и положения ее границы (постановка приведена, например, в [4]) сложна.

Примем в качестве малого параметра задачи ε число Маха клина M_0 и представим f, P в виде асимптотических рядов по ε

$$(1.2) \quad f = \varepsilon f^{(1)} + \varepsilon^2 f^{(2)} + O(\varepsilon^3), \quad P = \varepsilon P^{(1)} + \varepsilon^2 P^{(2)} + O(\varepsilon^3).$$

Линейное решение для $P^{(1)}$ имеет вид [4]

$$(1.3) \quad P^{(1)} = \sin \alpha_1 \cdot I\{\sigma^\lambda, \lambda(\theta - \alpha_1), -\lambda\pi/2\} + \\ + \sin \alpha_2 \cdot I\{\sigma^\lambda, \lambda(\theta - \alpha_1), \lambda(3\pi/2 - \alpha_1 - \alpha_2)\}, \\ \lambda = \pi/(2\pi - \alpha_1 - \alpha_2), \quad \sigma = [1 - (1 - r)^{1/2}]r; \\ (1.4) \quad I\{a, b, c\} = (1/\pi) \arctg \{(1 - a^2) \sin c / [2a \cos b - \\ - (1 + a^2) \cos c]\}.$$

Значения арктангенсов в (1.4) берутся в интервале $(0, \pi)$.

Вычисленные по (1.3) поля изобар $P^{(1)} = \text{const}$ и изолиний градиента $P_r^{(1)} = \text{const}$ для углов $\alpha_1 = \alpha_2 = 37,5^\circ$ и $\alpha_1 = 60^\circ$, $\alpha_2 = 15^\circ$ приведены на фиг. 1, $a-s$ (числа рядом с линиями указывают значения const). Фиг. 1 наглядно демонстрирует качественное различие полей P , P_r в симметричном и несимметричном случаях и указывает на явные дефекты линейной теории в окрестности волновой границы $ABCD$ области возмущений, а в несимметричном случае — и в окрестности носика клина.

2. Исследуем течение вблизи носика клина. Рассмотрим сначала симметричный случай. Устремляя $r \rightarrow 0$, из линейного решения (1.3) при $\alpha_1 = \alpha_2$ получим

$$(2.1) \quad P^{(1)} = \pi_{1*} + v_1 r^{2\lambda} \cos 2\omega_1 + v_2 r^{4\lambda} \cos 4\omega_1 + o(r^{4\lambda}),$$

где $\pi_{1*} = \lambda(\sin \alpha_1 + \sin \alpha_2)/2$;
 $\lambda = \pi/(2\pi - \alpha_1 - \alpha_2)$; $\omega_1 = \lambda(\theta - \alpha_1)$; $\pi v_1 = 2^{1-2\lambda} \sin \alpha_1 \sin \lambda\pi$;
 $\pi v_2 = 2^{-4\lambda} \sin \alpha_1 \sin 2\lambda\pi$.

Используя (2.1) в получаемых по методу малого параметра уравнениях для вторых членов разложений (1.2) при $r \rightarrow 0$, найдем разложения P , f при $r \rightarrow 0$

$$(2.2) \quad P = \pi_* + \varepsilon\{v_1 r^{2\lambda} \cos 2\omega_1 + v_2 r^{4\lambda} \cos 4\omega_1 + o(r^{4\lambda})\} + \varepsilon^2\{g_{21} r^{4\lambda-2} +$$

$$+ g_{22} r^{6\lambda-2} + o(r^{6\lambda-2})\} + O(\varepsilon^3), \quad g_{21} = -2[\lambda v_1/(2\lambda - 1)]^2,$$

$$g_{22} = -8\lambda^2 v_1 v_2 \cos 2\omega_1 / [(2\lambda - 1)(4\lambda - 1)],$$

$$f = \varepsilon\{v_1 r^{2\lambda} \cos 2\omega_1 / (2\lambda - 1) + v_2 r^{4\lambda} \cos 4\omega_1 / (4\lambda - 1) +$$

$$+ o(r^{4\lambda})\} + \varepsilon^2\{g_2 r^{4\lambda} + o(r^{4\lambda})\} + O(\varepsilon^3),$$

$$\pi_* = \varepsilon \pi_{1*} + \varepsilon^2 \pi_{1*}^2 / 2 + O(\varepsilon^3), \quad g_2 = A \cos 4\omega_1 + v_1^2 / [2(1 - 2\lambda)], \quad A = \text{const}.$$

Согласно (2.2), разложение для P нерегулярно [5] при $r \leq r_c$, где $r_c \sim \varepsilon^{1/(2-2\lambda)}$. Внутренние [5] переменные и разложения в окрестности носика клина, являющегося точкой торможения (согласно (2.2) скорость частиц $f_r^2 + r^{-2} f_\theta^2 = 0$ при $r = 0$), введем согласно (2.2)

$$(2.3) \quad r = \varepsilon^{1/(2-2\lambda)} s, \quad f = \varepsilon^{1/(1-\lambda)} \chi_1(s, \theta) + \varepsilon^{\lambda_1} \chi_2(s, \theta) + \dots,$$

$$P = \pi_* + \varepsilon^{1/(1-\lambda)} \Delta_1(s, \theta) + \varepsilon^{\lambda_1} \Delta_2(s, \theta) + \dots, \quad \lambda_1 = (1 + \lambda)/(1 - \lambda).$$

Подставляя (2.3) в точные уравнения задачи, получим, что в первых двух приближениях параметры в окрестности $r = 0$ определяются из решений уравнений движения несжимаемой жидкости

$$(2.4) \quad \nabla^2 \chi_1 = \chi_{1ss} + \chi_{1s}/s + \chi_{1\theta\theta}/s^2 = 0, \quad \Delta_1 = s\chi_{1s} - \chi_1 -$$

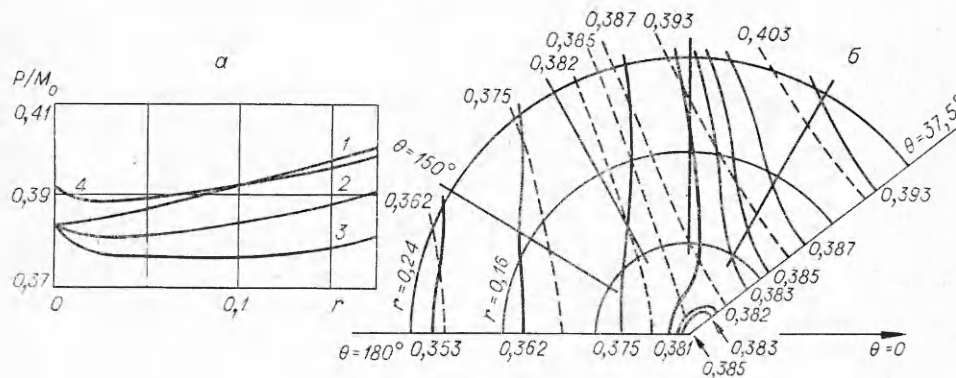
$$- (\chi_{1s}^2 + \chi_{1\theta}^2/s^2)/2;$$

$$(2.5) \quad \nabla^2 \chi_2 = 0, \quad \Delta_2 = s\chi_{2s} - \chi_2 - \chi_{1s}\chi_{2s} - \chi_{1\theta}\chi_{2\theta}/s^2.$$

Краевые задачи для определения χ_1 , χ_2 включают уравнения (2.4), (2.5), условия на поверхности клина и линии симметрии

$$(2.6) \quad \chi_{1\theta} = \chi_{2\theta} = 0 \text{ при } \theta = \alpha_1, \theta = \pi, 0 \leq s \leq s_0, s_0 \rightarrow \infty$$

и условие сращивания с решениями акустики (1.2), (2.2), справедливыми вдали от носика при $s \rightarrow \infty$. Последние получаются приравнованием внешнего разложения f порядка $O(\varepsilon^3)$ внутреннего разложения f (2.3) порядка $O(\varepsilon^{\lambda_1})$ (сокращенно $(f_i^{\varepsilon^{\lambda_1}})_c$) и внутреннего разложения f порядка $O(\varepsilon^{\lambda_1})$ внешнего разложения f (2.2) порядка $O(\varepsilon^2)$ (сокращенно



Фиг. 2

$(f_0^{\varepsilon^2})_i^{\varepsilon^{-1}}$. При этом из (2.2), (2.3) имеем

$$(f_0^{\varepsilon^2})_i^{\varepsilon^{-1}} = \varepsilon^{1/(1-\lambda)} v_1 s^{2\lambda} \cos 2\omega_1 / (2\lambda - 1) + \varepsilon^{\lambda} v_2 s^{4\lambda} \cos 4\omega_1 / (4\lambda - 1).$$

Общие решения для χ_1, χ_2 можно получить методом разделения переменных, и они приведены в [6]. Решения краевых задач для χ_1, χ_2 получим, удовлетворяя общими решениями из [6] условиям (2.6) и условиям сращивания. Окончательные ответы удобно записать, введя плоскость комплексного переменного и комплексные потенциалы:

$$(2.7) \quad z = se^{i\theta}, \quad W_1(z) = \chi_1(s, \theta) + i\psi_1(s, \theta), \quad W_2(z) = \chi_2(s, \theta) + i\psi_2(s, \theta)$$

(ψ_1, ψ_2 — функции тока). Тогда они примут вид

$$(2.8) \quad W_1 = v_1 (ze^{-i\alpha_1})^{2\lambda} / (2\lambda - 1), \quad \Delta_1 = v_1 s^{2\lambda} \cos 2\omega_1 + g_{21} s^{4\lambda-2};$$

$$(2.9) \quad W_2 = v_2 (ze^{-i\alpha_1})^{4\lambda} / (4\lambda - 1), \quad \Delta_2 = v_2 s^{4\lambda} \cos 4\omega_1 + g_{22} s^{6\lambda-2}.$$

Расчеты по формулам (2.3), (2.8), (2.9) приведены на фиг. 2. На фиг. 2, а представлено распределение давления $P^{(1)}$ по поверхности вдвигаемого в воздух клина с углами $\alpha_1 = \alpha_2 = 37,5^\circ$. По линейной теории (кривая 1) давление в носике минимально. По нелинейной теории (кривые 2—4 соответствуют одночленному при $M_0 = 0,1$, одночленному при $M_0 = 0,2$, двучленному при $M_0 = 0,1$ внутренним решениям) на поверхности клина имеются 2 точки минимума P , расположенные симметрично на небольшом удалении от носика, в котором имеется локальный максимум P . Нелинейное поле изобар $P^{(1)} = \text{const}$, вычисленное при $\varepsilon = M_0 = 0,1$ по одночленному внутреннему решению (сплошные кривые на фиг. 2, б), принципиально отличается от поля, предсказываемого линейной теорией (фиг. 1, а и штриховые кривые на фиг. 2, б).

3. В случае несимметричного движения клина из (1.3) при $r \rightarrow 0$ получим

$$(3.1) \quad P^{(1)} = \pi_{1*} + \mu_1 r^\lambda \cos \omega_1 + \mu_2 r^{2\lambda} \cos 2\omega_1 + o(r^{2\lambda}),$$

$$\text{где} \quad \pi\mu_1 = -2^{1-\lambda} (\sin \alpha_2 - \sin \alpha_1) \sin (\lambda\pi/2);$$

$$\pi\mu_2 = 2^{-2\lambda} (\sin \alpha_1 + \sin \alpha_2) \sin \lambda\pi.$$

Используя (3.1) в уравнениях для $f^{(2)}, P^{(2)}$ при $r \rightarrow 0$, найдем разложения f, P при $r \rightarrow 0$

$$(3.2) \quad P = \pi_* + \varepsilon \{ \mu_1 r^\lambda \cos \omega_1 + \mu_2 r^{2\lambda} \cos 2\omega_1 + o(r^{2\lambda}) \} + \varepsilon^2 \{ h_{21} r^{2\lambda-2} + h_{22} r^{3\lambda-2} + o(r^{3\lambda-2}) \} + O(\varepsilon^3), \quad 2h_{21} = -[\lambda\mu_1/(\lambda-1)]^2, \quad h_{22} = -2\lambda^2\mu_1\mu_2 \cos \omega_1/[(\lambda-1)]$$

$$-1)(2\lambda - 1)], f = \varepsilon \{ \mu_1 r^\lambda \cos \omega_1 / (\lambda - 1) + \mu_2 r^{2\lambda} \cos 2\omega_1 / (2\lambda - 1) + \\ + o(r^{2\lambda}) \} + \varepsilon^2 \{ h_2 r^{2\lambda} + o(r^{2\lambda}) \} + O(\varepsilon^3), h_2 = A_1 \cos 2\omega_1 + \\ + \mu_1^2 / [2(1 - \lambda)], A_1 = \text{const.}$$

Согласно (3.2), разложение для P нерегулярно при $r \leq r_H$, где $r_H \sim \sim \varepsilon^{1/(2-\lambda)}$. Внутренние переменные и разложения в окрестности $r = 0$ введем согласно (3.2):

$$(3.3) \quad r = \varepsilon^{1/(2-\lambda)} s, f = \varepsilon^{2/(2-\lambda)} \chi_1(s, \theta) + \varepsilon^{\lambda_2} \chi_2(s, \theta) + \dots, \\ P = \pi_* + \varepsilon^{2/(2-\lambda)} \Delta_1(s, \theta) + \varepsilon^{\lambda_2} \Delta_2(s, \theta) + \dots, \lambda_2 = (2 + \lambda)/(2 - \lambda).$$

Подставляя (3.3) в точные уравнения, получим внутренние уравнения (2.4), (2.5).

Область непригодности разложений акустики в несимметричном случае значительно больше, чем в симметричном. Согласно (3.2), P_r и скорость частиц неограниченно возрастают при $r \rightarrow 0$, что указывает на перетекание частиц газа с одной грани клина на другую (с верхней на нижнюю на фиг. 1, з). Но, как известно [7, 8], такой процесс должен сопровождаться образованием вихря, который как бы сглаживает острую кромку, обеспечивая конечную скорость частиц.

Построение вихревого течения в окрестности носика можно выполнить при предположениях [8—11]: 1) течение невязкое; 2) завихренность сосредоточена в вихревой пелене — поверхности тангенциального разрыва скорости, начинающейся в носике и закручивающейся в некоторую спираль (форма спирали неизвестна, течение вне пелены потенциально)*.

В этом случае комплексный потенциал течения можно представить в виде $W_1 = W_{11} + W_{12}$, где W_{11} — потенциал безотрывного обтекания носика потоком несжимаемой жидкости, W_{12} — потенциал пелены. Аналогично $\Delta_1 = \Delta_{11} + \Delta_{12}$.

Выражения для W_{11} , W_{12} найдем известным [7, 8] методом:

$$(3.4) \quad W_{11} = b_1 (ze^{-i\alpha_1})^\lambda, W_{12} = b_2 (ze^{-i\alpha_1})^{2\lambda}, b_1, b_2 = \text{const.}$$

Произвольные постоянные b_1 , b_2 определим впоследствии в процессе сращивания с акустическим решением.

Перейдем к нахождению W_{12} . Пусть $z_N = s_N e^{i\varphi_N}$ определяет положение некоторой точки пелены. Введем вместо физической циркуляции $C(r, \theta, t)$ в силу автомодельности безразмерную циркуляцию $\kappa(s, \theta) = C/(a_0^2 t)$. Комплексный потенциал точечного вихря, расположенного в точке z_N и имеющего интенсивность κ_N , можно получить, конформно отображая область течения на верхнюю полуплоскость, используя известное [10] решение для точечного вихря и учитывая присутствие стенки:

$$(3.5) \quad W_N = i\kappa_N/(2\pi) \text{Ln} \{ (z^\lambda - z_N^\lambda) / (z^\lambda - e^{2i\alpha_1 \lambda} \overline{z_N^\lambda}) \}.$$

Здесь и далее черта сверху обозначает комплексно-сопряженную величину.

Обозначая длину дуги пелены, отсчитываемую от носика клина, через l , получим W_{12} суперпозицией точечных вихрей (3.5):

$$(3.6) \quad W_{12} = i/(2\pi) \int_0^l \text{Ln} \{ (z^\lambda - z_l^\lambda) / (z^\lambda - e^{2i\alpha_1 \lambda} \overline{z_l^\lambda}) \} d\kappa_l.$$

Потенциал скорости пелены $\chi_{12} = \text{Re} \{ W_{12} \}$, давление Δ_{12} находится из второго уравнения (2.4).

* Возможностью вторичного (и т. д.) отрыва потока, вызываемого основным вихрем, пренебрегаем.

Очевидно, что нахождение κ_l и $z_l = s_l \exp(i\theta_l)$ должно проводиться при определенных условиях, а именно: условия Кутта — Жуковского конечности скорости в носике клина, условия отсутствия силового воздействия на пелену (равенство давлений и нормальных к пелене составляющих скорости частиц по разные стороны пелены) и условия на поверхности клина, формулируемых для суммарных потенциала скорости W_1 и давления Δ_1 .

Решение этой сложной задачи может быть получено численно (обзор различных методов дан в [11]).

Нас в данном случае интересует другой, ранее не затрагивавшийся вопрос о согласовании вихревого течения с течением вдали от носика клина.

Предельный процесс $\varepsilon \rightarrow 0$ при фиксированной внутренней переменной s означает, согласно (3.3), что $r \rightarrow 0$. Следовательно, согласно (1.2), (3.2), (3.3),

$$(3.7) \quad \left(f_o^{\varepsilon^2}\right)_i^{\varepsilon^{\lambda_2}} = \varepsilon^{2/(2-\lambda)} \mu_1 s^\lambda \cos \omega_1 / (\lambda - 1) + \varepsilon^{\lambda_2} \mu_2 s^{2\lambda} \cos 2\omega_1 / (2\lambda - 1).$$

Предельный процесс $\varepsilon \rightarrow 0$ при фиксированной внешней переменной s означает, согласно (3.3), что $r \rightarrow 0$. Тогда, согласно (3.3), (3.4) и (3.6) при $z \rightarrow \infty$,

$$(3.8) \quad \left(f_i^{\varepsilon^{\lambda_2}}\right)_o^{\varepsilon^2} = \varepsilon^{2/(2-\lambda)} [b_1 s^\lambda \cos \omega_1 + (T/s^\lambda) \cos \omega_1] + \varepsilon^{\lambda_2} b_2 s^{2\lambda} \cos 2\omega_1;$$

$$(3.9) \quad T = (1/\pi) \int_0^l s_l^\lambda \sin \omega_{1l} d\kappa_l, \quad \omega_{1l} = \lambda(\theta_l - \alpha_1).$$

Приравнявая внешний (3.7) и внутренний (3.8) пределы, получим

$$(3.10) \quad b_1 = \mu_1 / (\lambda - 1), \quad b_2 = \mu_2 / (2\lambda - 1).$$

При этом в (3.8) остался несращенный член, являющийся асимптотической вихревой пелены. Поэтому во внешние разложения (1.2) необходимо вставить дополнительные члены, учитывающие вихревой характер течения в окрестности носика клина. Разложения акустики (1.2), согласно (3.8), (3.7), (3.3), должны иметь вид

$$(3.11) \quad f = \varepsilon f^{(1)} + \varepsilon^{\lambda_2} f^* + \varepsilon^2 f^{(2)} + o(\varepsilon^2, \varepsilon^{\lambda_2}),$$

$$P = \varepsilon P^{(1)} + \varepsilon^{\lambda_2} P^* + \varepsilon^2 P^{(2)} + o(\varepsilon^2, \varepsilon^{\lambda_2}).$$

Уравнения для f^* , P^* совпадают по виду с уравнениями для $f^{(1)}$, $P^{(1)}$:

$$(3.12) \quad (1 - r^2) f_{rr}^* + r^{-1} f_r^* + r^{-2} f_{\theta\theta}^* = 0, \quad P^* = r f_r^* - f^*.$$

Исключая f^* из системы уравнений (3.12) и применяя преобразование Буземана — Чаплыгина $\sigma = [1 - (1 - r^2)^{1/2}]/r$, $\theta = \theta$, получим для P^* уравнение Лапласа. Применяя далее конформные отображения, сведем краевую задачу для определения P^* к задаче Дирихле в плоскости $\sigma_2 = \sigma^\lambda$, $\theta_2 = \lambda(\theta - \alpha_1)$ для полукольца $\varepsilon_1 \leq \sigma_2 \leq 1$, $0 \leq \theta_2 \leq \pi$, $\varepsilon_1 \rightarrow 0$. Очевидно, что $P^* = 0$ при $0 \leq \theta_2 \leq \pi$, $\sigma_2 = 1$; $P_\theta^* = 0$ при $\varepsilon_1 \leq \sigma_2 \leq 1$, $\theta_2 = 0$, $\theta_2 = \pi$. При $\sigma_2 = \varepsilon_1$, $0 \leq \theta_2 \leq \pi$, согласно (3.8), (3.3), (3.12), $P^* = -(\lambda + 1)T \cos \omega_1 / (\varepsilon_1^{2\lambda})$.

Решение этой краевой задачи имеет вид

$$(3.13) \quad P^* = (\lambda + 1)2^{-\lambda} T (\sigma^\lambda - \sigma^{-\lambda}) \cos \omega_1.$$

Потенциал f^* находится по (3.12).

4. Построим приближенную модель вихревого течения, позволяющую получить простые аналитические формулы, чтобы оценить влияние вихря на поле течения.

Заменим вихревую пелену единственным точечным вихрем (3.5), где κ_N , s_N , θ_N неизвестны. Такая модель использовалась при исследовании других задач, например, в [12, 8, 13]. В этом случае необходимо соединить точку N и носик клина прямолинейным разрезом и наложить на систему разрез — изолированный вихрь силу Жуковского так, чтобы результирующая сила на систему равнялась нулю [8, 12, 13]. С учетом автомодельности это дает

$$(4.1) \quad V_{z_N} = 2\bar{z}_N.$$

С другой стороны, $V_{z_N} = dW_1/dz$ при $z = z_N$, где $W_1 = W_{11} + W_{12}$. Согласно (3.5), $dW_{12}/dz = dW_N/dz$ имеет в точке $z = z_N$ простой полюс. По определению [10], скорость частицы в особой точке определяется как правильная часть dW_1/dz в этой точке. Следовательно,

$$V_{z_N} = \lim_{z \rightarrow z_N} \{dW_1/dz - i\kappa_N/[2\pi(z - z_N)]\}.$$

Раскрывая последний предел по правилу Лопиталя, получим

$$(4.2) \quad V_{z_N} = \lambda b_1 e^{-i\alpha_1 \lambda} z_N^{\lambda-1} + i\kappa_N [(\lambda-1)/(2z_N) - \lambda z_N^{\lambda-1} \left| \left(z_N^\lambda - e^{2i\alpha_1 \lambda} \bar{z}_N^\lambda \right) \right|] / (2\pi).$$

Разделяя действительную и мнимую части выражения, получающего-ся приравнованием (4.1) и (4.2), найдем

$$(4.3) \quad s_N = \left(-\frac{\lambda}{2} \mu_1 \cos \omega_{1N} \right)^{1/(2-\lambda)}, \quad \kappa_N = 8\pi s_N^2 \operatorname{tg} \omega_{1N} / (1-\lambda),$$

$$\text{где } \omega_{1N} = \lambda(\theta_N - \alpha_1).$$

Последнее неизвестное θ найдем из условия Кутта — Жуковского, требуя ограниченности dW_1/dz при $z \rightarrow 0$:

$$(4.4) \quad \theta_N = \alpha_1 + c \text{ при } \alpha_1 < \alpha_2, \quad \theta_N = 2\pi - \alpha_2 - c \\ \text{при } \alpha_1 > \alpha_2, \text{ где } c = \frac{1}{\lambda} \arcsin \frac{1}{\sqrt{\lambda}}.$$

Потенциал скорости вихревого течения, согласно (3.5), имеет вид

$$(4.5) \quad \chi_{12} = -\frac{\kappa_N}{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{s_N^{2\lambda} \sin 2\omega_{1N} - 2s_N^\lambda \bar{s}_N^\lambda \sin \omega_{1N} \cos \omega_1}{s_N^{2\lambda} - 2s_N^\lambda \bar{s}_N^\lambda \cos \omega_1 \cos \omega_{1N} + s_N^{2\lambda} \cos 2\omega_{1N}}.$$

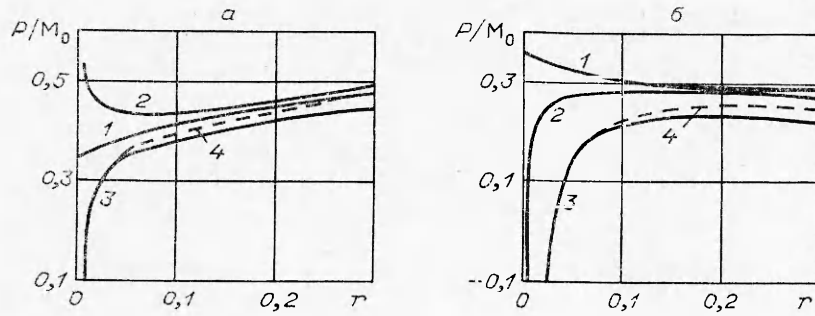
Давление Δ_{12} найдем, подставляя (4.5) в (2.4).

Расчеты по формулам (3.3)–(3.5), (3.10), (4.3)–(4.5), представленные на фиг. 3, качественно иллюстрируют влияние образования вихря на распределение давления вблизи носика клина на грани OA (фиг. 3, a) и на грани OD (фиг. 3, b). Кривые 1–4 на фиг. 3 вычислены соответственно по линейному, по двучленному внешнему, учитывающему вихреобразование ($\lambda < 2/3$), по одночленному внутреннему при $M_0 = 0,1$ и по одночленному составному при $M_0 = 0,1$ решениям. Наблюдается принципиальное отличие линейного и нелинейного распределений.

Отметим, что величина T , определенная в (3.9) и входящая в дополнительный член акустического разложения (3.11) (см. (3.13)), в случае модели точечного вихря принимает значение T_N

$$(4.6) \quad T_N = (\kappa_N/\pi) s_N^\lambda \sin \omega_{1N}.$$

Отметим также, что соотношение для определения κ_l , s_l , θ_l , следующее из условия Кутта — Жуковского для W_1 с W_{11} , W_{12} , определенными в (3.4), (3.6), имеет вид $\mu_1 = (\lambda-1) \int_0^l s_l^\lambda \sin \omega_{1l} d\kappa_l$. Оно переходит в (4.4) при замене пелены точечным вихрем.



Ф и г. 3

5. В несимметричном случае, когда вдвигание сопровождается возникновением вихря, из (3.11) следует, что необходимо внести дополнения в проведенный в [4] процесс построения нелинейных решений в окрестности волновой границы $ABCD$ (см. фиг. 1).

Проиллюстрируем это на примере фронта ударной волны BC , распространяющегося по покоящейся среде. Разложения (3.11) в окрестности BC при $r \rightarrow 1$, $|\theta - \theta_B| \geq (1-r)^{1/2}$, $|\theta - \theta_C| \gg (1-r)^{1/2}$ примут вид

$$(5.1) \quad P = \varepsilon \{d_1 \rho^{1/2} + O(\rho^{3/2})\} + \varepsilon^{\lambda_2} \{Q_* \rho^{1/2} + O(\rho^{3/2})\} + \varepsilon^2 \{(\gamma + 1) d_1^2 / 2 + O(\rho^{1/2})\} + o(\varepsilon^2, \varepsilon^{\lambda_2}),$$

$$f = \varepsilon \{-2d_1 \rho^{3/2} / 3 + O(\rho^{5/2})\} + \varepsilon^{\lambda_2} \{-2Q_* \rho^{3/2} / 3 + O(\rho^{5/2})\} + \varepsilon^2 \{-(\gamma + 1) d_1^2 \rho / 2 + O(\rho^{3/2})\} + o(\varepsilon^2, \varepsilon^{\lambda_2}),$$

$$\rho = 1 - r,$$

$$Q_* = -2^{3/2-\lambda} \lambda (\lambda + 1) T \cos \omega_1, \quad d_1(\theta) = \lambda \left\{ \sin \alpha_1 \left[\operatorname{ctg} \frac{\lambda}{2} \left(\theta - \frac{\pi}{2} - \alpha_1 \right) - \operatorname{ctg} \frac{\lambda}{2} \left(\theta + \frac{\pi}{2} - \alpha_1 \right) \right] + \sin \alpha_2 \left[\operatorname{ctg} \frac{\lambda}{2} \left(\theta + \frac{3\pi}{2} - 2\alpha_1 - \alpha_2 \right) - \operatorname{ctg} \frac{\lambda}{2} \left(\theta - \frac{3\pi}{2} + \alpha_2 \right) \right] \right\} / (\pi \sqrt{2}).$$

Внутренние переменные вблизи BC введем согласно (5.1):

$$(5.2) \quad r = 1 - \varepsilon^2 d_1^2 \delta, \quad P = 2\varepsilon^2 d_1^2 \{ \Pi_4(\delta, \theta) + \varepsilon^{\lambda_2-1} \Pi^*(\delta, \theta) + \varepsilon \Pi_5(\delta, \theta) + \dots \} / (\gamma + 1),$$

$$f = -2\varepsilon^4 d_1^4 \{ G_4(\delta, \theta) + \varepsilon^{\lambda_2-1} G^*(\delta, \theta) + \varepsilon G_5(\delta, \theta) + \dots \} / (\gamma + 1).$$

Решения уравнений для Π_4 , G_4 приведены в [4]:

$$(5.3) \quad \Pi_4 = (1 + bH) / c_1, \quad G_4 = \delta / c_1 + 2Hb^3 / (3c_1^2) + c_2, \quad b = (1 + \delta c_1)^{1/2}.$$

Уравнения для Π^* , G^* и их решения имеют вид

$$(5.4) \quad \Pi^* = G_\delta^*, \quad 2(\Pi_4 + \delta) \Pi_\delta^* + (2\Pi_{4\delta} - 1) \Pi^* = 0;$$

$$(5.5) \quad \Pi^* = ek_3(1 + Hb)^2 / b, \quad G^* = 2k_3 eH(1 + Hb)^3 / (3c_1) + k_4, \quad e = \exp(1).$$

Здесь c_1 , c_2 , k_3 , k_4 — произвольные функции θ , $H = \pm 1$.

Уравнения для Π_5 , G_5 совпадают по виду с уравнениями (5.4).

Сращивая разложения (3.11) и (5.2) на уровне

$$(P_o^{\varepsilon^{\lambda_2}})_i^{\varepsilon^{\lambda_2+1}} = (F_i^{\varepsilon^{\lambda_2+1}})_o^{\varepsilon^{\lambda_2}}, \quad (f_o^{\varepsilon^{\lambda_2}})_i^{\varepsilon^{\lambda_2+3}} = (f_i^{\varepsilon^{\lambda_2+3}})_o^{\varepsilon^{\lambda_2}},$$

получим

$$(5.6) \quad c_1 = 4 / (\gamma + 1)^2, \quad H = \operatorname{sign}(d_1), \quad k_3 e = \operatorname{sign}(d_1) Q_* / (c_1 d_1).$$

Оставшиеся во внутренних решениях (5.3), (5.5) произвольные функции и постоянные найдем при удовлетворении граничных условий на фронте ударной волны

$$(5.7) \quad \delta = \delta_* = \delta_0 + \varepsilon^{\lambda_2-1} \delta^* + \varepsilon \delta_1 + \dots$$

Используя (5.2), (5.7) в точных условиях, получим

$$(5.8) \quad \Pi_4(\delta_0) = -2\delta_0, \quad G_4(\delta_0) = 0;$$

$$(5.9) \quad \delta^* \Pi_{4\delta}(\delta_0) + \Pi^*(\delta_0) = -2\delta^*, \quad d_1 \delta^{*'} \Pi_4(\delta_0) + 4d_1' [\delta^* \Pi_4(\delta_0) + G^*(\delta_0)] = 0$$

(штрих означает производную по θ).

Удовлетворяя (5.8), найдем c_2 , δ_0 , удовлетворяя (5.9), найдем k_4 , δ^* (это можно сделать лишь при $H = 1$, т. е. при $d_1 > 0$):

$$(5.10) \quad c_2 = 2/(3c_1^2), \quad \delta_0 = -3/(4c_1), \quad \delta^* = -3k_3 e/2, \\ k_4 = 9d_1(k_3 e)' / (16c_1 d_1'), \quad H = 1.$$

Можно увидеть, что формулы для старших членов разложений (5.2), (5.7) совпадают с полученными в [4]. Формулы (5.5), (5.6), (5.10) для следующих членов разложений (5.2), (5.7) позволяют оценить влияние вихреобразования на параметры течения вблизи BC .

Учет вихреобразования в решениях, справедливых вблизи фронтов линий слабого разрыва AB и CD производится аналогично. При этом в (5.5), (5.6) $c_2 = k_4 = 0$, $H = \text{sign}(d_1) = -1$.

Отметим, что краевая задача для окрестности тройной точки B , сформулированная в [4], не изменится, если учесть вихреобразование, так как из (5.5), (5.6) имеем $\Pi^* \sim d_1 |\theta - \theta_B|$ при $|\theta - \theta_B| \rightarrow 0$, и что, согласно (5.2)–(5.7), (5.10), внутренние разложения (5.2) регулярны.

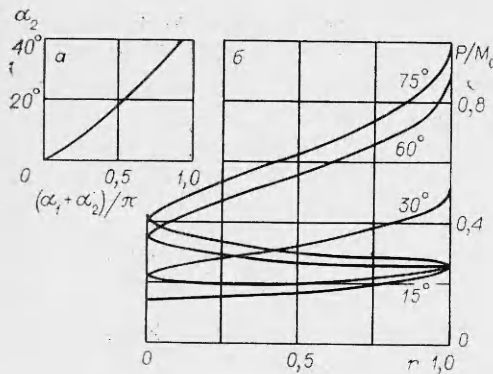
6. В дополнение к результатам работы [4] отметим интересный с физической точки зрения факт: несимметричное вдвигание клина с малой скоростью при некоторых значениях углов α_1 , α_2 сопровождается возникновением висячей ударной волны, отходящей от грани клина, образующей с осью Ox меньший угол (грань OD на фиг. 1, δ).

Для его доказательства рассмотрим величину $H = \text{sign}(d_1)$, полагая для определенности $\alpha_1 \geq \alpha_2$. Согласно п. 5, необходимо доказать, что в точке D и некоторой ее окрестности $H = 1$. Анализ d_1 из (5.1) показывает, что в точке D при $\theta = \theta_D = 2\pi - \alpha_2$ величина $H = \text{sign}[\sin \alpha_1 \times \sin^2(\lambda\pi/4) - \sin \alpha_2 \cos^2(\lambda\pi/4)]$. Таким образом, вблизи грани OD возникает висячая ударная волна DG (G — некоторая точка на фронте DC , в которой ударная волна вырождается в линию слабого разрыва), если исходные данные задачи α_1 , α_2 принадлежат области $A(\alpha_1, \alpha_2)$, определяемой соотношением $\sin \alpha_1 \sin^2(\lambda\pi/4) > \sin \alpha_2 \cos^2(\lambda\pi/4)$. В плоскости $(\alpha_1 + \alpha_2)/\pi$, α_2 область A лежит ниже кривой, изображенной на фиг. 4, a (отметим, что при $\alpha_1 = \alpha_2$ $H = -1$ для $\theta_C < \theta \leq \theta_D$ и фронт CD всегда целиком является линией слабого разрыва).

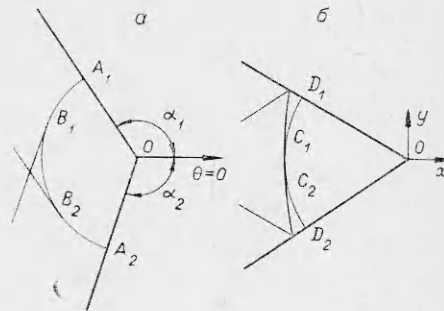
Положение и интенсивность ударной волны DG и параметры за ней могут быть определены по известным формулам [4]. Отметим, что максимум интенсивности волны достигается в точке D .

Интересно, что с изменением α_1 при фиксированном α_2 наблюдается качественное изменение эпюры давления вдоль грани OD . Это иллюстрирует фиг. 4, b , где представлены расчеты давления P/M_0 вдоль граней OA , OD (соответственно верхние и нижние части кривых), выполненные для $\alpha_2 = 15^\circ$ и $\alpha_1 = 15; 30; 60; 75^\circ$. В случае, когда давление вдоль OD монотонно падает ($\alpha_1 = 75^\circ$), имеем, согласно фиг. 4, a , режим с образованием висячей ударной волны DG .

7. В заключение рассмотрим не исследованный в [1–4] случай вдвигания с малой скоростью ($M_0 \ll 1$) вогнутого угла раствора $2\alpha =$



Фиг. 4



Фиг. 5

$= \alpha_1 + \alpha_2 (2\alpha > \pi, \alpha_1 \geq \alpha_2, \alpha_1 < \pi)$. В этом случае (фиг. 5) происходит отражение плоских ударных волн друг от друга и, если $4\alpha > 3\pi$, от граней угла. Характер интерференции, т. е. количество отражений фронтов друг от друга и от граней, и величина параметров в областях кусочно-постоянных значений P зависят от M_0 , 2α и соотношения между α_1 , α_2 и определяются последовательно решением задач о столкновении плоских ударных волн разной интенсивности и об отражении ударной волны от стенки [14].

Можно заметить, что с ростом α растет количество отражений, при этом в окрестности волновой границы области возмущений поочередно реализуется одна из ситуаций, изображенных на фиг. 5, а, б. В линейном приближении интервалы изменения 2α , соответствующие различным картинам интерференции, определяются соотношением

$$(7.1) \quad (1 + 2n)\pi/(1 + n) < 2\alpha < (3 + 2n)\pi/(2 + n), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Для $n = 0, 2, 4, \dots$ ($n \sim$ количеству отражений ударной волны от граней) в окрестности волновой границы реализуется ситуация, изображенная на фиг. 5, а, а давление в области возмущений в симметричном и несимметричном случаях (буквы с, н в нижнем индексе) определяется по формулам

$$(7.2) \quad P_c^{(1)} = \sin \alpha_1 (1 + n + I_1), \quad P_n^{(1)} = (1 + n/2) \sin \alpha_1 + (n/2) \sin \alpha_2 + I_2, \\ n = 0, 2, 4, \dots, \\ I_1 = I_3 - I_4, \quad I_2 = I_3 \sin \alpha_2 - I_4 \sin \alpha_1, \quad I_3 = I\{\sigma^\lambda, \lambda(\theta - \alpha_1), \pi - \lambda\pi/2\}, \\ I_4 = I\{\sigma^\lambda, \lambda(\theta - \alpha_1), \lambda\pi/2\}$$

(функция I определена соотношением (1.4)).

Для $n = 1, 3, 5, \dots$ ($(n + 1)/2 \sim$ количеству отражений ударных волн друг от друга) ситуация в окрестности волновой границы изображена на фиг. 5, б, а давление в области возмущений определяется по формулам

$$(7.3) \quad P_c^{(1)} = \sin \alpha_1 (2 + n + I_1), \quad P_n^{(1)} = [(n + 3) \sin \alpha_1 + (n + 1) \sin \alpha_2]/2 + \\ + I_2, \quad n = 1, 3, 5, \dots$$

Интересно, что при вдвигании вогнутого угла не наблюдается значительного увеличения давления в области возмущений в случае, когда $\alpha_1 + \alpha_2 \rightarrow 2\pi$, т. е. когда возрастает число отражений слабых ударных волн друг от друга и от граней угла. В самом деле, из (7.1)–(7.3) можно установить, что при $\alpha_1 + \alpha_2 \rightarrow 2\pi$ (n велико) в линейном приближении $P \rightarrow \pi M_0/2$. Для сравнения заметим, что при вдвигании выпуклого угла с малой скоростью, согласно [4], в области возмущений $P \leq M_0$.

Установим нелинейные особенности задачи в случае небольших значений n . Согласно (7.2), (7.3), при $r \rightarrow 1$ вне окрестностей тройных точек B_k , C_k ($k = 1, 2$)

$$P(1) = P(1)(1, \theta) + Q\rho^{1/2} + O(\rho^{3/2}), \quad \rho = 1 - r,$$

$$Q = 2\lambda \sin(\lambda\pi/2) \{ \sin \alpha_2 / [\cos \lambda(\theta - \alpha_1) + \cos(\lambda\pi/2)] - \sin \alpha_1 / [\cos \lambda(\theta - \alpha_1) - \cos(\lambda\pi/2)] \}.$$

Анализируя знак Q в зависимости от θ , заключаем, что на фиг. 5 фронты $A_k B_k$, $C_1 C_2$ являются слабыми ударными волнами, а фронты $B_1 B_2$, $C_k D_k$ — линиями слабого разрыва. Их положение и параметры в областях больших градиентов за ними, а также параметры в окрестностях тройных точек B_k , C_k могут быть определены по формулам из [4].

Поступила 25 I 1980

ЛИТЕРАТУРА

1. Sakurai A. The flow due to impulsive motion of a wedge and its similarity to the diffraction of shock wave.— J. Phys. Soc. Japan, 1955, vol. 10, N 3.
2. Strang W. J. A physical theory of supersonic aerofoils in unsteady flow.— Proc. Roy. Soc. London, 1948, vol. A195, N 1041.
3. Тузакаев Р. Я. Нестационарная задача о внезапном движении клина и конуса с до- и сверхзвуковой скоростями.— Учен. зап. ЦАГИ, 1973, т. 4, № 1.
4. Титаренко В. В. Нелинейный анализ течения, инициируемого внезапным движением клина.— ПМТФ, 1976, № 3.
5. Ван-Дайк М. Методы возмущений в механике жидкости. М.: Мир, 1967.
6. Рауз Х. Механика жидкости. М.: Стройиздат, 1967.
7. Прандтль Л., Титъенс Л. Гидро- и аэромеханика. Т. 1. М.: ОНТИ, 1933.
8. Бэтчелор Дж. Введение в динамику жидкости. М.: Мир, 1973.
9. Никольский А. А. О «второй» форме движения идеальной жидкости около обтекаемого тела (исследование отрывных вихревых потоков).— ДАН СССР, 1957, т. 116, № 2.
10. Седов Л. И. Механика сплошной среды. Т. 2. М.: Наука, 1973.
11. Белоцерковский С. М., Нипт М. И. Отрывное и безотрывное обтекание тонких крыльев идеальной жидкостью. М.: Наука, 1978.
12. Cheng H. K. Remarks on nonlinear lift and vortex separation.— J. Aeron. Sci., 1954, 21, N 3.
13. Судаков Г. Г. Расчет отрывного течения около тонкого треугольного крыла малого удлинения.— Учен. зап. ЦАГИ, 1974, т. 5, № 2.
14. Арутюнян Г. М., Карчевский Л. В. Отраженные ударные волны. М.: Машиностроение, 1973.

УДК 624.07 : 534.1

АВТОМОДЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ДИНАМИЧЕСКОГО ИЗГИБА БЕСКОНЕЧНЫХ НЕЛИНЕЙНО-УПРУГИХ БАЛОК

В. П. Ястребов
(Ленинград)

Получение точных решений задач динамического изгиба балок, материал которых не подчиняется закону Гука, связано с большими математическими трудностями. При решении подобных задач используются приближенные методы. Например, в работе [1] динамический изгиб бесконечных нелинейно-упругих балок исследуется с помощью разложения решения в ряды на переменном интервале. Согласно [2, 3], при решении задач балка заменяется по длине цепочкой жестких участков, соединенных между собой шарнирами, в которых