

В заключение отметим, что оценку максимальных амплитуд окружных деформаций (с погрешностью, идущей в запас) можно получить из расчета по линейной модели гидроупругости. Амплитуды деформаций наиболее нагруженного внутреннего слоя с достаточной для практических целей точностью дает приближенная модель системы как тела с одной степенью свободы.

Авторы благодарят Ш. У. Галиева и А. Ф. Демчука за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Демчук А. Ф. Металлические взрывные камеры. Новосибирск: Ин-т гидродинамики СО АН СССР, 1968.
2. Демчук А. Ф. Один метод расчета взрывных камер. — ПМТФ, 1968, № 5.
3. Иванов А. Г., Новиков С. А., Спирин В. А. Исследование поведения замкнутых стальных оболочек при взрыве внутри них зарядов взрывчатого вещества. — ПМТФ, 1968, № 6.
4. Адищев В. В., Корнев В. М. К расчету оболочек взрывных камер. — ФГВ, 1979, т. 15, № 6.
5. Корнев В. М., Адищев В. В. и др. Экспериментальное исследование и анализ колебаний оболочки взрывной камеры. — ФГВ, 1979, т. 15, № 6.
6. Бузуков А. А. Особенности поведения стенок взрывных камер под действием импульсной нагрузки. — ФГВ, 1976, т. 12, № 4.
7. Бузуков А. А. Нагрузки, возникающие при взрывах в воздушнонаполненной взрывной камере. — ФГВ, 1980, т. 16, № 5.
8. Cenerini R., Curioni S., Holtbecker H. et al. Experimental analysis of composed structure subject to a dynamic load. — In: Proc. of the First Int. Conf. Struct. Mech. React. Technol. Berlin, 1971, v. 3.
9. Пинчукова Н. И. Динамика двух коаксиальных цилиндрических оболочек с жидким наполнителем. Новосибирск: ИГД СО АН СССР, 1982 (деп. в ВИНТИ, № 4677-82 ДЕП).
10. Степаненко М. В. Об одном методе расчета нестационарных импульсных процессов деформаций в упругих конструкциях. — ФТПРПИ, 1976, № 2.
11. Пинчукова Н. И., Степаненко М. В. Действие акустической волны давления на оболочки вращения. Новосибирск: ИГД СО АН СССР, 1982 (деп. в ВИНТИ, № 2287-82 ДЕП).

Поступила 7/XII 1984 г.

УДК 539.375

ОБ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОМ СОСТОЯНИИ КЛИНА ПРИ ПРЕДЕЛЬНОМ СОПРОТИВЛЕНИИ СДВИГУ И ОТРЫВУ

И. Т. АРТЕМЬЕВ, Д. Д. ИВЛЕВ

(Чебоксары)

Рассматривается равновесие остроугольного клина в условиях плоской деформации под действием равномерно распределенной нагрузки q , приложенной по нормали к одной из его граней (рис. 1), при наличии пределов прочности $k > 0$, $d > 0$ на сдвиг и отрыв [1] таких, что касательные и нормальные компоненты напряжения удовлетворяют условиям $\tau_{\max} \leq k$, $\sigma_{\max} \leq d$. Область, в которой максимальные компоненты напряжения не достигли этих пределов, будем считать упругой.

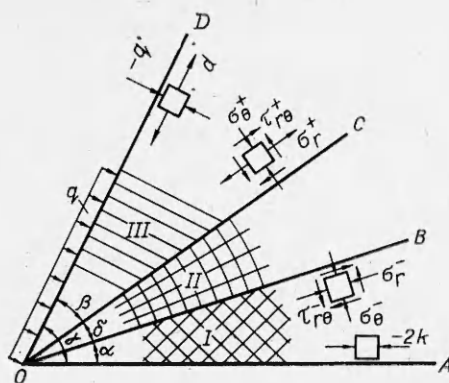
В отличие от упругопластического клина (при предельном сопротивлении только сдвигу [2]) в данном случае размеры зон предельных состояний зависят не только от величины, но и от направления нагрузки ($q > 0$, $q < 0$). В работе определяются интервалы нагрузки q , соответствующие различным качественным состояниям клина.

1. В общем случае клин разделен на три зоны I—III (рис. 1), в которых имеют место соответственно сдвиговое, упругое и отрывное состояния. Уравнения для напряжений в зоне I принадлежат к гиперболическому типу и имеют два ортогональных семейства прямолинейных характеристик, наклоненных к свободной грани под углом $\pi/4$, а в зоне III уравнения принадлежат к параболическому типу и имеют одно семейство характеристик, ортогональных главному напряжению [1]. В зонах I и III осуществляется равномерное напряженное состояние и границы с зоной II прямолинейны.

Принимем компонентам тензора напряжений в зонах I и III верхние индексы минус и плюс соответственно. Главные напряжения здесь имеют определенные значения:

$$\sigma_1^- = 0, \quad \sigma_2^- = -2k, \quad \sigma_1^+ = d, \quad \sigma_2^+ = -q.$$

Напряженные состояния в зонах I и III интерпретируются диаграммами Мора на рис. 2. Очевидно, на прямых OB и OC , разделяющих три зоны и составляющих углы



Р и с. 1

α и β с гранями клина (см. рис. 1), нормальные и касательные компоненты тензора напряжений могут быть определены через главные. В полярных координатах r, θ имеем

$$(1.1) \quad \sigma_{\theta}^-, \sigma_r^- = k(\pm \cos 2\alpha - 1), \quad \tau_{r\theta}^- = k \sin 2\alpha,$$

$$\sigma_{\theta}^+, \sigma_r^+ = p + \rho \cos 2\beta, \quad \tau_{r\theta}^+ = \rho \sin 2\beta,$$

где $p = (1/2)(d - q)$, $\rho = (1/2)(d + q)$ — координата центра и радиус круга Мора на рис. 2, б.

В упругой зоне II, следуя [3], компоненты напряжения представим в виде

$$(1.2) \quad \sigma_r, \sigma_{\theta} = A - 2D\theta \pm (B \sin 2\theta + C \cos 2\theta), \quad \tau_{r\theta} = D + B \cos 2\theta - C \sin 2\theta.$$

Условимся угол θ отсчитывать так, что на границе OB $\theta = 0$, а на OC $\theta = \gamma - \alpha - \beta = \delta$. Тогда из условия непрерывности напряжений на линиях $\theta = 0$ и $\theta = \delta$ из (1.1) и (1.2) следует система шести уравнений:

$$p \pm \rho \cos 2\beta = A - 2D\delta \pm (B \sin 2\delta + C \cos 2\delta),$$

$$k(\pm \cos 2\alpha - 1) = A \pm C, \quad k \sin 2\alpha = D + B,$$

$$\rho \sin 2\beta = D + B \cos 2\delta - C \sin 2\delta.$$

Четыре из них используем для исключения произвольных констант

$$A = -k, \quad C = -k \cos 2\alpha, \quad D = -(k + p)/2\delta,$$

$$B = (\rho \cos 2\beta + k \cos 2\alpha \cos 2\delta)/\sin 2\delta.$$

Остальные два уравнения приводятся к виду

$$(1.3) \quad k \cos 2(\gamma - \beta) + \rho \cos 2\beta = g(2\delta)^{-1} \sin 2\delta,$$

$$\rho \cos 2(\gamma - \alpha) + k \cos 2\alpha = g(2\delta)^{-1} \sin 2\delta,$$

где $g = k + p$.

Введем обозначение $\chi = \beta - \alpha$. Вычитая почленно уравнения (1.3), найдем

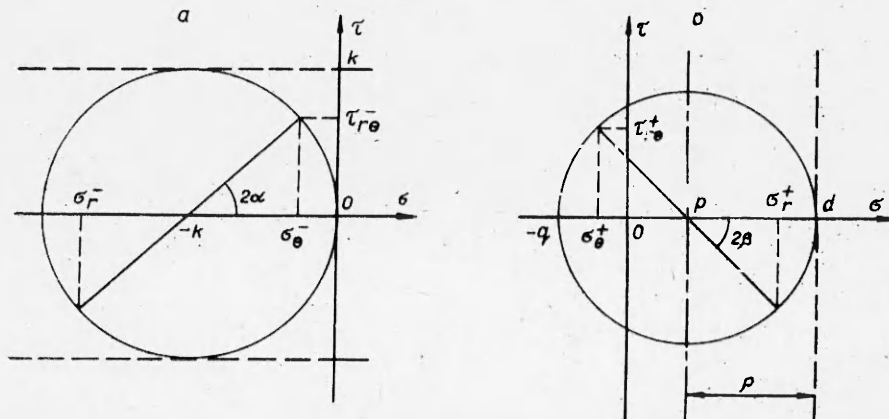
$$(1.4) \quad \chi = \arctg \left(\frac{k - \rho \operatorname{tg} \gamma}{k + \rho} \right).$$

Угловые размеры зон отрыва и сдвига определяются из геометрического условия $\gamma = \alpha + \beta + \delta$ с учетом (1.4):

$$\alpha = (1/2)(\gamma - \delta - \chi), \quad \beta = (1/2)(\gamma - \delta + \chi).$$

Для окончательного решения рассматриваемой задачи о равновесии упругопластического клина при предельном сопротивлении сдвигу и отрыву осталось из (1.3) выразить функцию $\delta(q)$, конкретный вид которой зависит от интервала, в котором находится внешняя нагрузка q .

2. Очевидно, существует интервал нагрузки $0 < q < q_1$, при которой клин полностью находится в упругом состоянии. При этом $\alpha = \beta = 0$, $\delta = \gamma$, напряжение на



Р и с. 2

нагруженной грани $\sigma_r = l$ не достигло предела сопротивления отрыву, а на свободной грани $\sigma_r = -2\kappa$ не достигло предела сопротивления сдвигу, т. е. $0 < l < d$, $0 < \kappa < k$. Кроме того, $\rho = (1/2)(l + q)$, $p = (1/2)(l - q)$. С учетом этих условий из (1.3) найдем

$$\rho = \kappa = (1/2)q(1 - \gamma \operatorname{ctg} \gamma)^{-1}, \quad l = q(\gamma^{-1} \operatorname{tg} \gamma - 1)^{-1}.$$

Если с возрастанием нагрузки q параметры ρ и κ достигнут предела k , то на обеих гранях одновременно возникнет условие пластичности. При более высоких нагрузках в этом случае образуются две пластические зоны, примыкающие к граням клина и имеющие одинаковые размеры. Такое предельное состояние подробно исследовано в [2].

Однако если напряжение l достигнет предела d раньше, чем ρ достигнет значения k , то на нагруженной грани клина возникает условие отрыва

$$q = q_1 = d(\gamma^{-1} \operatorname{tg} \gamma - 1), \quad \rho = (1/2)(d + q_1) < k.$$

Последнее условие выразим в форме ограничения для предела прочности на отрыв, при котором возникает рассматриваемое состояние сопротивления клина отрыву:

$$d < 2k\gamma \operatorname{ctg} \gamma.$$

Отсюда видно, что $d \leq 0$ при $\gamma \geq \pi/2$, т. е. константа d теряет смысл предела прочности на отрыв для тупоугольного клина. Зона предельного сопротивления отрыву возникает только в остроугольном клине.

В интервале нагрузок $q_1 < q < q_2$ в клине имеет место зона предельного сопротивления отрыву, прилегающая к нагруженной грани OD , а в остальной части — упругое состояние. Напряжение на свободной грани OA $\sigma_r = -2\kappa$ не достигло предела, соответствующего состоянию пластичности $\sigma_r = -2k$. Поэтому из уравнений (1.3), подставив вместо k параметр κ и $\alpha = 0$, $\beta = \gamma - \delta$, найдем

$$(2.1) \quad \begin{aligned} \kappa &= \rho(\operatorname{ctg} \delta \sin 2\gamma - \cos 2\gamma), \\ \rho &= d[1 + \cos 2\gamma + (\delta \sin^2 \delta - \operatorname{ctg} \delta) \sin 2\gamma]^{-1}. \end{aligned}$$

Так как $q = 2\rho - d$, то последнее уравнение выражает зависимость между размером упругой зоны δ и нагрузкой q в рассматриваемом интервале. При нагрузке $q = q_2$ на свободной грани возникает условие пластичности $\kappa = k$. При этом $\alpha = 0$, $\beta = \gamma - \delta$ и уравнения (1.3) после исключения δ приводятся к следующему:

$$\frac{\rho \sin 2\gamma}{k - \rho \cos 2\gamma} = \operatorname{tg} \frac{(k + d - \rho) \rho \sin 2\gamma}{k^2 + \rho^2 + 2k\rho \cos 2\gamma}.$$

Значение ρ , удовлетворяющее последнему уравнению, позволяет найти нагрузку $q_2 = 2\rho - d$. При нагрузке в интервале $q_2 < q < q_3$ имеют место зона предельного сопротивления сдвигу, примыкающая к свободной грани клина, и зона предельного сопротивления отрыву, примыкающая к нагруженной грани (см. рис. 1). Они разделены упругой зоной, которая уменьшается с увеличением q и сомкнется при определенной нагрузке $q = q_3$. Зоны I и III станут примыкающими друг к другу, т. е. $\delta = 0$, $\alpha + \beta = \gamma$, и из уравнений (1.3) получим условие

$$(2.2) \quad k \cos 2\alpha + \rho \cos 2\beta = k + p.$$

Исходя из (1.2), для общего случая $\delta \neq 0$ можно составить разности соответствующих компонент напряжений

$$\begin{aligned} [\tau_{r\theta}] &= (k \cos 2\alpha - \rho \cos 2\beta) \operatorname{tg} \delta, \\ [\sigma_r], [\sigma_\theta] &= (k + p) \pm (k \cos 2\alpha + \rho \cos 2\beta). \end{aligned}$$

В предельном случае $\delta \rightarrow 0$ касательная компонента напряжения остается непрерывной, так как разность $[\tau_{r\theta}]$ стремится к нулю. Согласно (2.2), нормальная компонента σ_θ сохраняет непрерывность $[\sigma_\theta] = 0$, но напряжение σ_r терпит разрыв $[\sigma_r] = 2(k + p)$.

Таким образом, в предельном случае нагружения $q = q_3$ упругая зона II вырождается в линию разрыва напряжений. Это состояние равновесия клина исследовано в [4]. В частности, из условий непрерывности двух компонент напряжения $[\sigma_\theta] = 0$ и $[\tau_{r\theta}] = 0$ найдено значение

$$q_3 = d(d/2k + \cos^2 \gamma)^{-1} \sin^2 \gamma.$$

Исключив параметры α и β из (1.3) непосредственно, получим зависимость между размером упругой зоны и нагрузкой в интервале $q_2 < q < q_3$:

$$(2.3) \quad \delta^{-1} \sin \delta = (1 - dk^{-1} - \rho k^{-1})^{-1} \sqrt{1 - \rho^2 k^{-2} + 2\rho k^{-1} \cos 2\gamma}.$$

Графическая интерпретация зависимости $\delta(q)$ на основе (2.1) и (2.3) приведена на рис. 3 для различных клиньев при одинаковых пределах сопротивления d , k сдвигу и отрыву. Точкам A, B и C соответствуют происходящие при нагрузках q_1 , q_2 ,

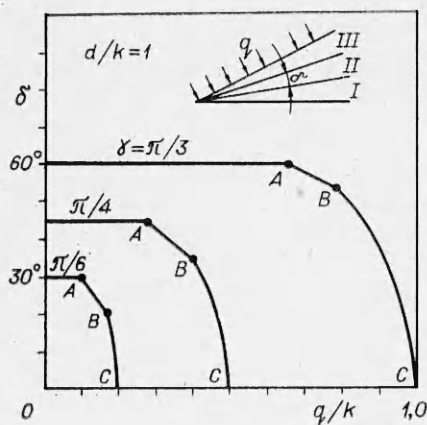


Рис. 3

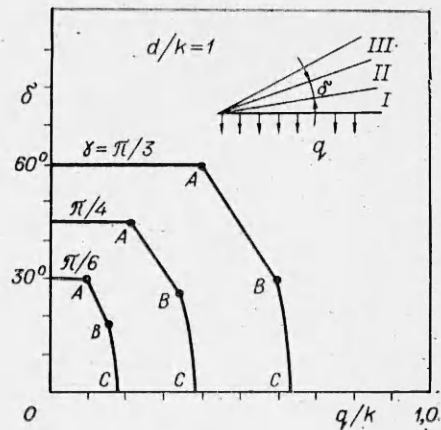


Рис. 4

q_3 переходы количественных изменений напряжений в качественные изменения состояния предельного сопротивления клина.

3. Зоны отрыва, упругости и сдвига возникают также при равномерно распределенной нагрузке, приложенной по внешней нормали к грани OA (растяжение). На прямых OB и OC компоненты тензора напряжений будут выражаться следующим образом:

$$\sigma_{\theta}^{-}, \sigma_r^{-} = q - k(1 + \cos 2\alpha), \quad \tau_{r\theta}^{-} = k \sin 2\alpha,$$

$$\sigma_{\theta}^{+}, \sigma_r^{+} = (1/2)d(1 \pm \cos 2\beta), \quad \tau_{r\theta}^{+} = (1/2)d \sin 2\beta.$$

В упругой зоне II компоненты напряжения представляются в виде (1.2). Как и в п. 2, из шести условий сопряжения на линиях $\theta = 0$ и $\theta = \delta$ найдем четыре константы:

$$A = q - k, \quad C = -k \cos 2\alpha, \quad D = -g_1/2\delta,$$

$$B = (\rho_1 \cos 2\beta + k \cos 2\alpha \cos 2\delta)/\sin 2\delta,$$

$$\rho_1 = d/2, \quad g_1 = \rho_1 + k - q,$$

получим два уравнения (1.3), в которых ρ и g следует заменить соответственно на ρ_1 и g_1 .

Константы q_1, q_2, q_3 , имеющие прежний смысл (п. 2), находятся в виде

$$q_1 = d(1 - \gamma \operatorname{ctg} \gamma),$$

$$q_2 = (1/2)d + k - \frac{(d^2 + 4k^2 + 4dk \cos 2\gamma)(\gamma - \chi_1)}{2d \sin 2\gamma},$$

$$q_3 = (1/2)d + k - (1/2) \sqrt{d^2 + 4k^2 + 4dk \cos 2\gamma},$$

где χ_1 определяется как χ в (1.4) при $\rho = \rho_1$.

Очевидно, и здесь наличие трех зон отрыва, упругости и сдвига имеется лишь для остроугольного клина. Действительно, при $\gamma \geq \pi/2$ $q_1 \geq d$, т. е. условие отрыва в тупоугольном клине возникает не только на грани OD зоны III , но и на грани OA зоны I , где отрыв происходит по OA . Поэтому при $\gamma \geq \pi/2$ рассмотрение зоны I как сдвиговой здесь неприемлемо.

В интервалах $q_1 < q < q_2$ и $q_2 < q < q_3$ зависимость между размером упругой зоны δ и нагрузкой q дается соответственно формулами

$$q = d \left[\sin^2 \gamma - \frac{\sin 2\gamma (2\delta - \sin 2\delta)}{4 \sin^2 \delta} \right],$$

$$q = k + \frac{1}{2}d - \frac{\delta \sqrt{d^2 + 4k^2 + 4dk \cos 2\gamma}}{2 \sin \delta}.$$

Графическая интерпретация этих зависимостей представлена на рис. 4. Качественно она повторяет зависимости на рис. 3, но процессы, соответствующие точкам A, B, C , наступают в последнем случае при меньших нагрузках q_1, q_2, q_3 . В обоих случаях с приближением к точке C незначительное изменение нагрузки q ведет к резкому изменению зоны упругости δ .

ЛИТЕРАТУРА

1. Ивлев Д. Д. К теории разрушения твердых тел. — ПММ, 1959, т. 23, вып. 3.
2. Шапиро Г. С. Упругопластическое равновесие клина и разрывные решения в теории пластичности. — ПММ, 1952, т. 16, вып. 2.
3. Тимошенко С. П., Гудьер Дж. Теория упругости/Под ред. Г. С. Шапиро. 2-е изд. М.: Наука, 1979.
4. Артемьев И. Т., Ивлев Д. Д. К теории предельного состояния хрупких тел с разрывными решениями. — МТТ, 1984, № 1.

Поступила 21/IX 1984 г.

УДК 539.4+620.1

ПОВЕДЕНИЕ ТЕЛ ВРАЩЕНИЯ ПРИ ДИНАМИЧЕСКОМ КОНТАКТЕ С ЖЕСТКОЙ СТЕНКОЙ

А. Н. БОГОМОЛОВ, В. А. ГОРЕЛЬСКИЙ, С. А. ЗЕЛЕПУГИН,
И. Е. ХОРЕВ

(Томск)

Изучение динамического взаимодействия деформируемых тел с жесткими стенками началось основополагающей работой Тейлора [1], в которой установлена связь динамического предела текучести с остаточной длиной рассматриваемого тела вращения в виде цилиндра.

В данной работе экспериментально и теоретически исследованы деформирование и разрушение цилиндров при взаимодействии их с жесткими стенками в широком диапазоне начальных условий.

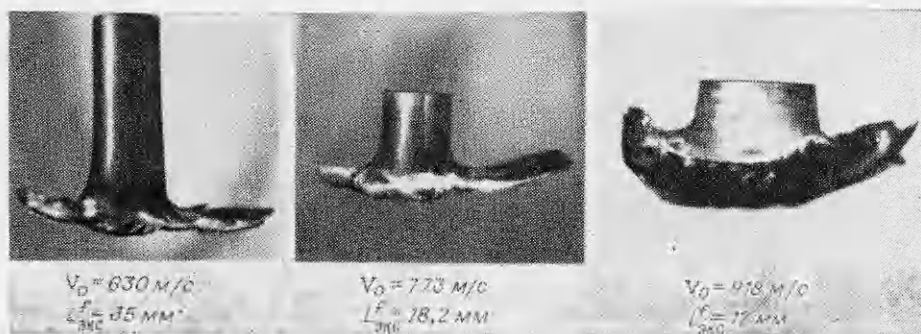
1. Метание цилиндров в экспериментах осуществлялось с помощью гладкоствольной пороховой баллистической установки. Образцы деформированных цилиндров из стали ШХ-15 в состоянии поставки, провзаимодействовавших с жесткой стенкой, приведены на рис. 1.

Полученные экспериментальные данные остаточных длин образцов и построенные на их основе характерные зависимости представлены на рис. 2, где точки 1 — медь, 2 — сталь 3, 3 — сталь 40, 4 — сталь ШХ-15. С целью оценки влияния податливости жесткой стенки (высокопрочной массивной плиты из закаленной стали HRC ~ 54—57) на конечные результаты проведены эксперименты по соосному удару двух идентичных цилиндров. Случай соосного удара реализует условия взаимодействия деформируемого тела с идеальной недеформируемой стенкой, и на рис. 2 ему соответствуют точки 5 и 6 (для меди и стали 3). Данные экспериментов по жесткой стенке и соосное соударение дают очень близкие результаты (в пределах 3—5%) для рассмотренных скоростей удара. Но случай удара о жесткую стенку в силу его простой реализации в экспериментах более предпочтителен для исследования пластичных материалов, включая различные стали. На рис. 2 для сравнения даны результаты экспериментов по жесткой стенке для меди и стали 1090 (точки 7 и 8), описанные в [2].

Рассчитанные по полученным экспериментальным данным значения динамического предела текучести для различных материалов представлены на рис. 3. Для расчетов использовано приведенное в [2] эмпирическое соотношение

$$L_{\text{ост}}^f/L_0 = 0,88 \exp \left(-\rho_0 V_0^2 / 2\sigma_s^D \right) + 0,12,$$

где L_0 — начальная длина цилиндра; ρ_0 — его плотность; V_0 — скорость удара; $L_{\text{ост}}^f$ — известная из эксперимента остаточная длина цилиндра; σ_s^D — искомый динамический предел текучести. Полученные зависимости динамических пределов текучести от ско-



Р и с. 1