УДК 517.9

КОНВЕКТИВНЫЕ ДВИЖЕНИЯ В ПОРИСТОМ КОЛЬЦЕВОМ СЕКТОРЕ

А. В. Трофимова, В. Г. Цибулин

Южный федеральный университет, 344090 Ростов-на-Дону
E-mail: tsybulin@math.rsu.ru

Исследуется гравитационная фильтрационная конвекция несжимаемой жидкости в кольцевых секторах. С использованием уравнений в полярных координатах и конечно-разностной схемы, сохраняющей косимметрию исходной задачи, изучены ответвление и развитие семейств конвективных режимов. Для трапециевидных и полукольцевых областей проанализировано возникновение неустойчивости на семействе стационарных состояний.

Ключевые слова: фильтрационная конвекция, конечно-разностная схема, семейство стационарных режимов, косимметрия.

Введение. Актуальность исследования конвекции в пористых средах обусловлена различными научными и техническими приложениями в геофизике и энергетике, например при разработке систем изоляции, хранения ядерных и других отходов [1, 2]. В основном естественная конвекция рассматривается для ограниченных областей, имеющих форму параллелепипеда или прямоугольника, в случае плоских и осесимметричных задач. В то же время формы реальных областей отличаются большим разнообразием, например, изоляционные каналы и коллекторы солнечной энергии [3] могут иметь форму кольцевого сектора.

При изучении фильтрационной конвекции несжимаемой жидкости в цилиндре [4] обнаружено ответвление однопараметрического семейства стационарных конвективных режимов от состояния механического равновесия. Это явление было объяснено с помощью теории косимметрии [5, 6] и исследовалось в натурных [7] и численных экспериментах [8–10]. При косимметрии спектр устойчивости стационарных решений может меняться, в отличие от спектра в случае групповой инвариантности. Групповые свойства уравнений для различных моделей конвекции изучены в работе [11], в которой построены новые классы точных решений уравнений термодиффузионного движения.

Аналитическое исследование плоской задачи конвекции Дарси позволило получить асимптотику семейства стационарных режимов и изучить их устойчивость вблизи бифуркации рождения [5, 6]. Исследование косимметричных семейств стационарных режимов при больших надкритичностях возможно только с помощью численных методов. Расчеты в случае сильной неединственности решений — вычисления однопараметрических семейств стационарных движений конвекции Дарси в бесконечном цилиндре с сечением в виде прямоугольника — выполнены на основе метода Галеркина [8], метода сеток [9] и спектрально-разностного метода [10].

Работа выполнена в рамках аналитической ведомственной целевой программы “Развитие научного потенциала высшей школы” № 2.1.1/6095 и при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 11-01-00708-а).

В данной работе изучаются семейства стационарных конвективных режимов в непрямоугольных областях, заполненных пористой средой, развивается метод конечных разностей, применяемый при решении системы уравнений для температуры и функции тока, записанных в полярных координатах. В численном эксперименте рассчитаны семейства стационарных режимов для полукольца и трапециевидной области, подогреваемых снизу. Проанализировано развитие конвективных движений с увеличением числа Рэлея, изучено возникновение на семействе неустойчивых режимов.

1. Постановка задачи. Рассматривается плоская задача фильтрационной конвекции в пористом кольцевом секторе, подогреваемом снизу [2]. Система уравнений в полярных координатах и безразмерных переменных имеет вид

$$\partial_t T = \Delta T - J(T,\psi), \qquad J(T,\psi) = \frac{1}{r}\left[\partial_r(T\,\partial_\varphi\psi) - \partial_\varphi\,(T\,\partial_r\psi)\right]; \tag{1}$$

$$0 = \Delta\psi - \lambda G(T), \qquad G(T) = \frac{1}{r}\left[\partial_\varphi\,(\cos\varphi T) + \partial_r\,(r\sin\varphi T)\right]. \tag{2}$$

Здесь $\Delta = \partial_r^2 + r^{-1}\,\partial_r + r^{-2}\,\partial_\varphi^2$; t — время; r, φ — полярные координаты; T — температура; ψ — функция тока. Фильтрационное число Рэлея определяется формулой $\lambda = g\beta l^2\delta T/(k\chi)$, где g — ускорение свободного падения; β — температурный коэффициент линейного расширения; $k = \nu/K$ — отношение вязкости жидкости к проницаемости; l — масштаб длины; χ — температуропроводность; δT — градиент температуры по высоте.

Задача рассматривается в области $D = [R_1, R_2]\times[\Phi_1,\Phi_2]$, на границе которой распределение температуры задается линейным по высоте профилем:

$$T\big|_{\partial D} = T^0(r,\varphi) \equiv T_1 - \frac{R_2 + r\cos\varphi}{R_1}\,(T_1 - T_2), \qquad (r,\varphi)\in\partial D. \tag{3}$$

Здесь T_1, T_2 — значения температуры в точках (R_2,π) и (R_1,π) соответственно.

Для функции тока принимается следующее краевое условие:

$$\psi\big|_{\partial D} = 0. \tag{4}$$

Система (1)–(4) имеет стационарное решение

$$\psi = 0, \qquad T = T^0(r,\varphi),$$

которое представляет собой механическое равновесие.

С помощью замены $T = T^0 + \theta$ из (1)–(4) получается начально-краевая задача для величины отклонения температуры θ и функции тока ψ:

$$\partial_t\theta = \Delta\theta + G(\psi) - J(\theta,\psi) \equiv F_1(\theta,\psi); \tag{5}$$

$$0 = \Delta\psi - \lambda G(\theta) \equiv F_2(\theta,\psi); \tag{6}$$

$$\theta\big|_{\partial D} = 0, \qquad \psi\big|_{\partial D} = 0; \tag{7}$$

$$\theta|_{t=0} = \theta^0(r,\varphi). \tag{8}$$

Начальное условие задается только для температуры, так как функция тока определяется по θ из (6), (7).

Для задачи (5)–(7) выполняется интегральное тождество

$$\int\limits_D \left[F_1(\theta,\psi)\psi - F_2(\theta,\psi)\theta\right] r\,dr\,d\varphi = 0, \tag{9}$$

справедливость которого устанавливается непосредственно интегрированием по частям с использованием формулы Грина и с учетом краевых условий. Таким образом, косимметрией системы (5)–(7) является вектор-функция $L = (\psi, -\theta)$, что означает возможность появления однопараметрического семейства решений [5].

Равновесие $\theta = \psi = 0$ для системы (5)–(8) имеет место при всех значениях параметра λ. В [6] показано, что в случае плоской задачи конвекции Дарси первое критическое значение λ_{cr} двукратно для произвольной односвязной области и при переходе параметра λ через λ_{cr} от состояния покоя ответвляется семейство стационарных режимов с переменным спектром.

Следует отметить, что в случае области, симметричной относительно вертикальной оси ($\Phi_2 = 2\pi - \Phi_1$), задача (5)–(7) инвариантна относительно преобразования дискретной симметрии:

$$R^\varphi\colon \{\varphi, \theta, \psi\} \mapsto \{2\pi - \varphi, \theta, -\psi\}. \tag{10}$$

2. Численный метод. При численном решении задачи (5)–(8) используется метод конечных разностей. Вводятся равномерные сетки по координатам r и φ: $r_i = R_1 + ih_r$, $\varphi_j = \Phi_1 + jh_\varphi$, где $i = 1, \dots, n$; $h_r = (R_2 - R_1)/(n+1)$; $j = 1, \dots, m$; $h_\varphi = (\Phi_2 - \Phi_1)/(m+1)$. Температура и функция тока определяются в узлах (r_i, φ_j), при вычислении конвективного члена $J(\theta, \psi)$ используются узлы смещенных сеток: $r_{i-1/2} = R_1 + (i - 1/2)h_r$, $\varphi_{j-1/2} = \Phi_1 + (j - 1/2)h_\varphi$, где $i = 1, \dots, n+1$; $j = 1, \dots, m+1$.

На двухточечных шаблонах вводятся разностные операторы первых производных и операторы вычисления среднего для целых и полуцелых индексов i и j:

$$\begin{aligned} (\delta_1\theta)_{i-1/2,j} &= \frac{\theta_{i,j} - \theta_{i-1,j}}{h_r}, \qquad (\delta_2\theta)_{i,j-1/2} = \frac{\theta_{i,j} - \theta_{i,j-1}}{h_\varphi}, \\ (\delta_0^1\theta)_{i-1/2,j} &= \frac{\theta_{i,j} + \theta_{i-1,j}}{2}, \qquad (\delta_0^2\theta)_{i,j-1/2} = \frac{\theta_{i,j} + \theta_{i,j-1}}{2}. \end{aligned} \tag{11}$$

С помощью этих операторов задаются операторы на четырехточечном шаблоне, разностные операторы первых производных на трехточечных шаблонах и дискретный аналог лапласиана:

$$\begin{gathered} (d_0\theta)_{i,j} = (\delta_0^1\delta_0^2\theta)_{i,j}, \qquad (d_1\theta)_{i,j} = (\delta_0^2\delta_1\theta)_{i,j}, \qquad (d_2\theta)_{i,j} = (\delta_0^1\delta_2\theta)_{i,j}, \\ (D_1\theta)_{i,j} = (\delta_0^1\delta_1\theta)_{i,j}, \qquad (D_2\theta)_{i,j} = (\delta_0^2\delta_2\theta)_{i,j}, \\ \Delta_h\theta_{i,j} = \Big(\frac{1}{r}\,\delta_1(r\delta_1\theta) + \frac{1}{r^2}\,\delta_2\delta_2\theta\Big)_{i,j}. \end{gathered} \tag{12}$$

При численном исследовании косимметричных задач, характеризующихся сильной неединственностью решений, необходимо, чтобы разностная схема сохраняла косимметрию и дискретные симметрии исходной задачи. При аппроксимации конвективных членов в уравнении (5) применяется формула, полученная в [12] и записанная в полярных координатах:

$$J(\theta, \psi)\big|_{(r_i,\varphi_j)} \approx J_{i,j}(\theta, \psi) = \alpha J^{(1)}_{i,j} + (1 - \alpha)J^{(2)}_{i,j}. \tag{13}$$

Здесь

$$J^{(1)}_{i,j} = \frac{1}{r_i}\,[D_1(\theta D_2\psi) - D_2(\theta D_1\psi)]_{i,j}, \qquad J^{(2)}_{i,j} = \frac{1}{r_i}\,[d_1(d_0\theta d_2\psi) - d_2(d_0\theta d_1\psi)]_{i,j}.$$

Для аппроксимации силы всплытия $G_{i,j}(\theta)$ используется формула, сохраняющая косимметрию системы разностных уравнений [13]:

$$G(\theta)\big|_{(r_i,\varphi_j)} \approx G_{i,j}(\theta) = \beta G^{(1)}_{i,j} + (1 - \beta)G^{(2)}_{i,j}. \tag{14}$$

Здесь

$$G^{(1)}_{i,j} = \frac{1}{r_i}\,(\cos\varphi\, D_2\theta + r\sin\varphi\, D_1\theta)_{i,j}, \qquad G^{(2)}_{i,j} = \frac{1}{r_i}\,(D_2(\cos\varphi\,\theta) + D_1(r\sin\varphi\,\theta))_{i,j}.$$

Параметры α и β в формулах (13), (14) выбирались из условия выполнения разностного аналога тождества (9). При $\alpha = 1/3$, $\beta = 1/2$ конечно-разностная схема системы (5)–(8) сохраняет косимметрию и дискретную симметрию (10) исходной задачи.

С использованием операторов (11)–(14) записываются аппроксимации уравнений (5), (6) для внутренних узлов

$$\partial_t \theta_{i,j} = \Delta_h \theta_{i,j} + G_{i,j}(\psi) - J_{i,j}(\theta, \psi); \tag{15}$$

$$0 = \Delta_h \psi_{i,j} - \lambda G_{i,j}(\theta). \tag{16}$$

Дискретные аналоги краевых условий задаются формулами

$$\begin{aligned} &\theta_{0,j} = 0, \quad \theta_{n+1,j} = 0, \quad \psi_{0,j} = 0, \quad \psi_{n+1,j} = 0, \qquad j = 0, \dots, m+1, \\ &\theta_{i,0} = 0, \quad \theta_{i,m+1} = 0, \quad \psi_{i,0} = 0, \quad \psi_{i,m+1} = 0, \qquad i = 0, \dots, n+1. \end{aligned} \tag{17}$$

Полученная в результате дискретизации система обыкновенных дифференциальных уравнений (15)–(17) может быть записана в векторной форме

$$\dot{\Theta} = A\Theta + B\Psi - F(\Theta, \Psi); \tag{18}$$

$$0 = A\Psi - \lambda B\Theta. \tag{19}$$

Здесь для узловых значений температуры и функции тока введены векторы

$$\Theta = (\theta_{11}, \theta_{12}, \dots, \theta_{ij}, \theta_{i,j+1}, \dots, \theta_{nm}), \qquad \Psi = (\psi_{11}, \psi_{12}, \dots, \psi_{ij}, \psi_{i,j+1}, \dots, \psi_{nm}).$$

Порядок следования членов в уравнениях (18), (19) соответствует использованному в (15), (16). Ленточная матрица A аппроксимирует оператор Лапласа, матрица B аппроксимирует оператор G. Конвективное слагаемое в уравнении (15) аппроксимируется членом $F(\Theta, \Psi)$.

Выразив вектор Ψ в (19) через Θ и подставив в (18), получаем систему уравнений относительно температуры с начальным условием (8):

$$\dot{\Theta} = A\Theta + \lambda B A^{-1} B\Theta - F(\Theta, \lambda\, A^{-1} B\Theta); \tag{20}$$

$$\Theta\big|_{t=0} = \Theta^0 = (\theta^0(r_1, \varphi_1), \dots, \theta^0(r_n, \varphi_m)). \tag{21}$$

Критические значения фильтрационного числа Рэлея λ_{cr} находятся из обобщенной спектральной задачи, получаемой из (20):

$$A\Theta = -\lambda B A^{-1} B\Theta.$$

Расчеты конвективных режимов проводились в среде MATLAB. Для решения задачи Коши (20), (21) используется метод Рунге — Кутты четвертого порядка. При вычислении семейства стационарных режимов применяется алгоритм [8, 9]. Для каждого стационарного решения матрица линеаризации находится численно, а ее ядро определяется методом SVD-разложения. Спектр устойчивости σ для стационарных решений Θ_* находится из линеаризованной системы, следующей из (20):

$$\sigma W = [A + \lambda B A^{-1} B - F_\Theta(\Theta_*, \lambda A^{-1} B\Theta_*) - \lambda F_\Psi(\Theta_*, \lambda A^{-1} B\Theta_*) A^{-1} B] W.$$

Для уточнения положения равновесия в окрестности семейства применяется метод Ньютона, прогнозное значение для следующей точки на семействе вычисляется с помощью экстраполяционного метода Адамса.

3. Анализ конвективных режимов. В данной работе представлены результаты расчета конвективных режимов в задаче (5)–(8) для узкой трапециевидной области и полукольца. В обоих случаях состояние покоя $\theta = \psi = 0$ глобально-устойчиво при малых

Таблица 1

Критические значения числа Рэлея для трапециевидной области D_1

Размеры сетки	λ_{cr}	λ_*
8×12	108,9	297,0
12×18	106,1	299,1
16×24	105,1	299,6
24×36	104,4	—
Аналитическое решение (22)	103,5	—

градиентах температуры (параметр Рэлея $\lambda < \lambda_{cr}$). При превышении критического значения обнаружено возникновение непрерывного семейства стационарных конвективных режимов, наследующего устойчивость равновесия $\theta = \psi = 0$. В спектре каждого состояния равновесия содержится нулевое значение, что соответствует нейтральному направлению вдоль семейства.

Вычислительный эксперимент состоял в нахождении семейств конвективных режимов и продолжении их по параметру Рэлея до возникновения неустойчивости. В расчетах определялись функция тока, распределение температуры, спектр устойчивости режимов и числа Нуссельта, соответствующие тепловым потокам через внешнюю границу и срединную азимутальную линию:

$$\mathrm{Nu}_h = \int\limits_{\Phi_1}^{\Phi_2} \frac{\partial\theta}{\partial r}\, r\Big|_{r=R_2} d\varphi, \qquad \mathrm{Nu}_v = \int\limits_{R_1}^{R_2} \frac{1}{r}\, \frac{\partial\theta}{\partial\varphi}\Big|_{\varphi=\varphi^*} dr, \qquad \varphi^* = \frac{\Phi_1 + \Phi_2}{2}.$$

3.1. *Решение задачи в узкой трапециевидной области.* Вычисления семейств конвективных режимов в трапециевидной области $D_1 = [R_1, R_2] \times [\Phi_1, \Phi_2]$, $R_1 = 1$, $R_2 = 2$, $\Phi_1 = 11\pi/12$, $\Phi_2 = 2\pi - \Phi_1$ проводились на различных сетках. В табл. 1 представлены результаты расчета критических чисел Рэлея λ_{cr}, при которых состояние механического равновесия теряет устойчивость, и значения числа Рэлея λ_*, при которых стационарные режимы на семействе теряют устойчивость впервые. В последней строке табл. 1 приведено критическое значение для прямоугольника [2], определяемое по формуле

$$\lambda_{cr} = 4\pi^2\Big(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\Big), \qquad a = R_2 - R_1, \qquad b = \frac{R_1 + R_2}{2}\,(\Phi_2 - \Phi_1). \tag{22}$$

Из табл. 1 следует, что дискретизация с числом внутренних узлов $n \times m = 16 \times 24$ позволяет определить значения λ_{cr} и λ_* с большой точностью. В среднем для получения семейства при каждом значении λ требовался расчет от 100 до 200 режимов.

Для трапециевидной области D_1 семейство равновесий ответвляется при $\lambda_{cr} \approx 105$. С увеличением параметра Рэлея λ возрастает радиальный тепловой поток и меняется форма семейства. Эволюция семейств с устойчивыми стационарными режимами представлена на рис. 1,*а*. При $\lambda > 300$ на семействе появляются участки с неустойчивыми состояниями (рис. 1,*б*).

На рис. 2 приведены функции тока, распределения температуры и спектры устойчивости для нескольких стационарных режимов семейства, рассчитанного при $\lambda = 200$. Семейство составляют в основном стационарные режимы движения в виде двух конвективных валов, касающихся границ $r = R_1$ и $r = R_2$ (режимы *1* и *3*), либо с валом, идущим из нижнего правого (левого) угла в верхний левый (правый) угол (режимы *2, 4*). На рис. 2,*б* приведены распределения температуры. Отметим, что имеющаяся в задаче симметрия R^φ проявляется в том, что семейства содержат режимы, переходящие друг в

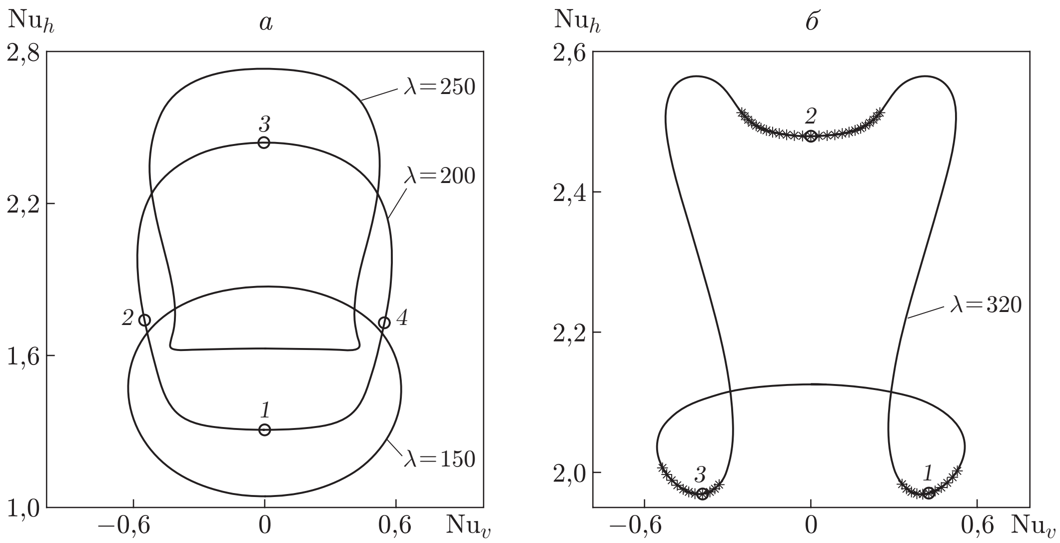

Рис. 1. Эволюция семейств стационарных режимов с увеличением параметра Рэлея λ в трапециевидной области:

а — семейства с устойчивыми стационарными режимами; *б* — семейство, содержащее участки с неустойчивыми состояниями (отмечены звездочками)

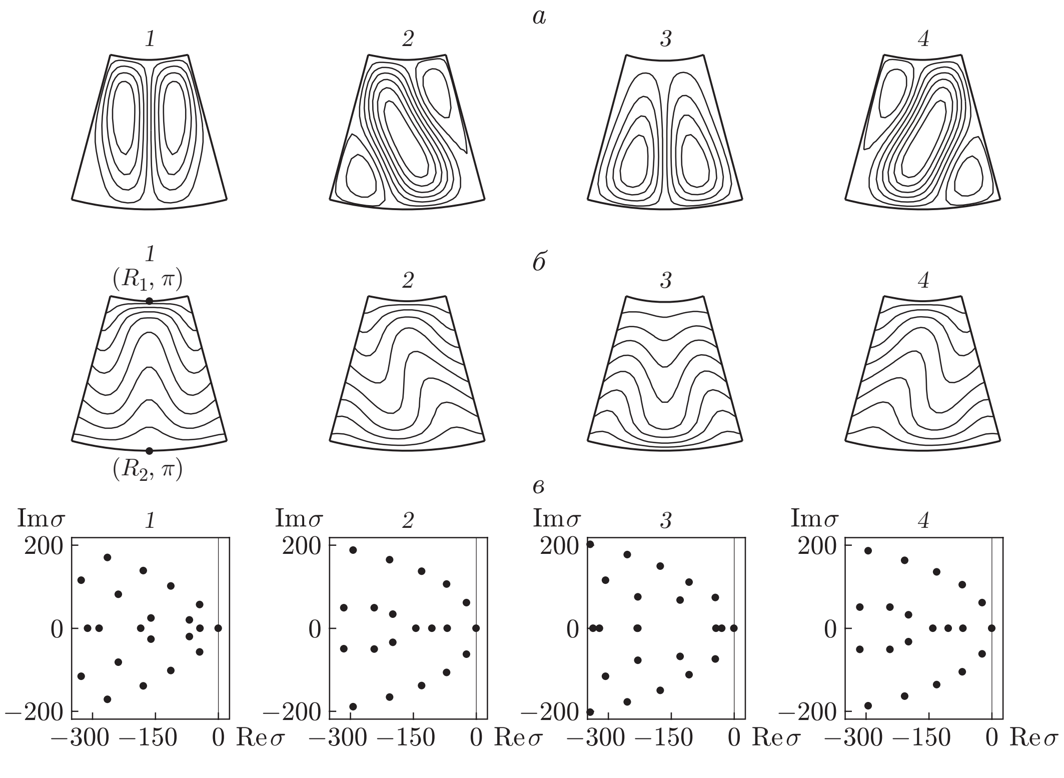

Рис. 2. Функции тока (*а*), распределения температуры (*б*) и спектры устойчивости (*в*) режимов семейства с $\lambda = 200$ в трапециевидной области:

1–4 — режимы, отмеченные на рис. 1,*а*

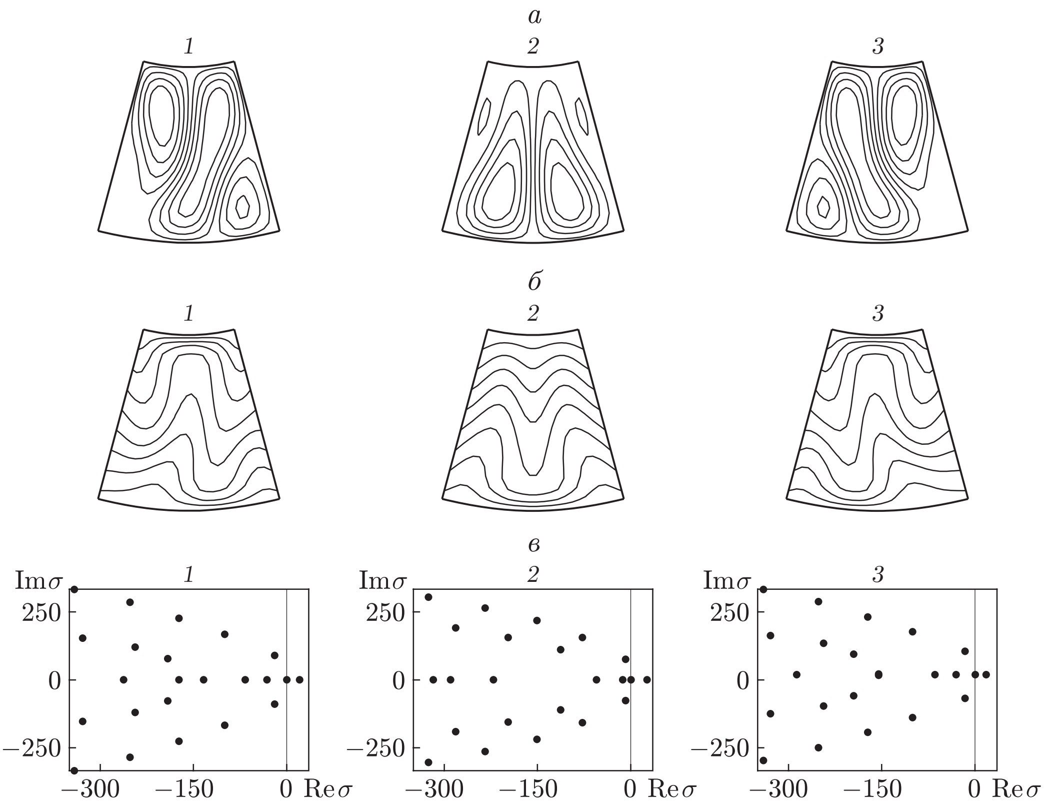

Рис. 3. Функции тока (*а*), распределения температуры (*б*) и спектр устойчивости (*в*) неустойчивых режимов семейства с $\lambda = 320$ в трапециевидной области: *1–3* — режимы, отмеченные на рис. 1,*б*

друга при действии преобразования дискретной симметрии (10). На рис. 2,*в* представлены значения спектра устойчивости в окрестности мнимой оси. Наличие в спектре практически нулевого значения ($\sigma_* \approx 10^{-7}$) свидетельствует о принадлежности этих конвективных структур однопараметрическому семейству стационарных состояний. Видно, что характер распределения спектральных величин σ меняется от режима к режиму. Неустойчивость на семействе конвективных режимов возникает быстрее для структур с симметричным расположением валов (режим *3*).

На рис. 3 представлены функции тока, распределение температуры и спектр устойчивости для неустойчивых режимов семейства при $\lambda = 320$. В этом случае семейство составляют режимы с четырьмя симметрично расположенными валами либо конвективные структуры с одним основным валом. Присутствие положительного собственного числа (рис. 3,*в*) свидетельствует о неустойчивости режима, а наличие нулевого значения в каждом из них — о принадлежности этих конвективных структур однопараметрическому семейству.

3.2. *Семейство конвективных режимов в полукольце.* Результаты вычислений конвективных режимов для полукольца $D_2 = [1, 2] \times [\pi/2, 3\pi/2]$ на различных сетках представлены в табл. 2 и на рис. 4–6. В табл. 2 приведены критические числа λ_{cr}, при которых состояние механического равновесия теряет устойчивость, и значения числа Рэлея λ_*, при которых стационарные режимы на семействе теряют устойчивость впервые.

Анализ расчета критических значений показал, что для последующего вычислительного эксперимента достаточно использовать сетку размером 16×48 внутренних узлов.

Таблица 2

Критические значения числа Рэлея для полукольца D_2

Размеры сетки	λ_{cr}	λ_*
8×24	43,9	103,0
12×36	42,3	100,5
16×48	41,7	97,0
20×60	41,4	—

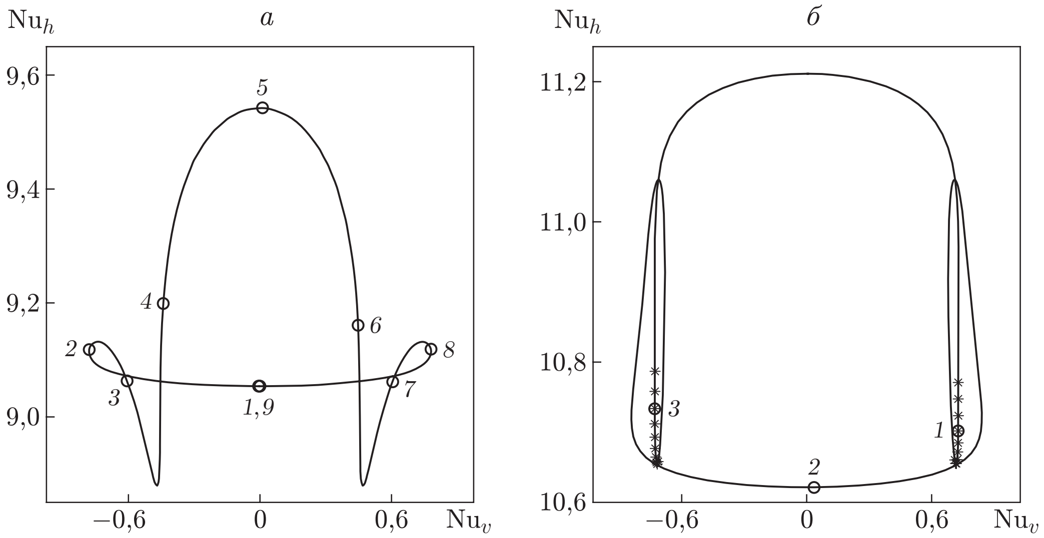

Рис. 4. Семейства стационарных конвективных режимов для полукольца: *а* — $\lambda = 80$, *б* — $\lambda = 110$; звездочки — неустойчивые состояния семейства

Дополнительные сравнения с результатами расчетов на сетке размером 24×72 не выявили существенных различий.

Для полукольца D_2 семейство стационарных конвективных режимов ответвляется при $\lambda_{cr} \approx 42$, а при $\lambda > 97$ на семействе появляются участки с неустойчивыми состояниями. На рис. 4 представлены семейства при $\lambda = 80$, 110.

В случае широкого кольцевого сектора разнообразие конвективных структур значительно больше, чем в случае трапециевидной области. На рис. 5 представлены функции тока для различных конвективных режимов, принадлежащих семейству, при $\lambda = 80$. В зависимости от начальных данных могут реализовываться режимы с числом валов от двух до шести. Вследствие симметрии задачи R^{φ}-семейства содержат режимы, переходящие друг в друга при действии дискретной симметрии (парные режимы *1* и *9*, *2* и *8*, *3* и *7*, *4* и *6*).

Функции тока, распределение температуры и спектр устойчивости для некоторых режимов семейства, рассчитанного при $\lambda = 110$, представлены на рис. 6. Из анализа спектра устойчивости σ следует, что неустойчивыми являются режимы *1* и *3*. Наличие нулевого значения в каждом из этих режимов указывает на принадлежность данных конвективных структур однопараметрическому семейству, а присутствие положительного собственного числа — на неустойчивость решения. Видно, что характер распределения спектральных значений σ меняется от режима к режиму.

Заключение. Предложен метод расчета и приведены результаты вычислений режимов фильтрационной конвекции в кольцевых секторах, подогреваемых снизу. Для

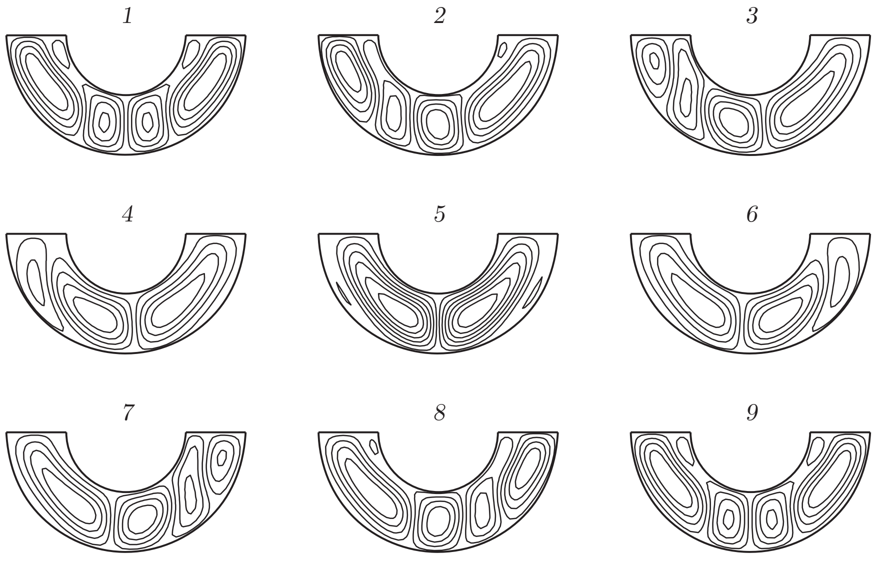

Рис. 5. Функции тока стационарных режимов семейства с $\lambda = 80$ для полукольца:
1–9 — номера режимов, отмеченных на рис. 4,*а*

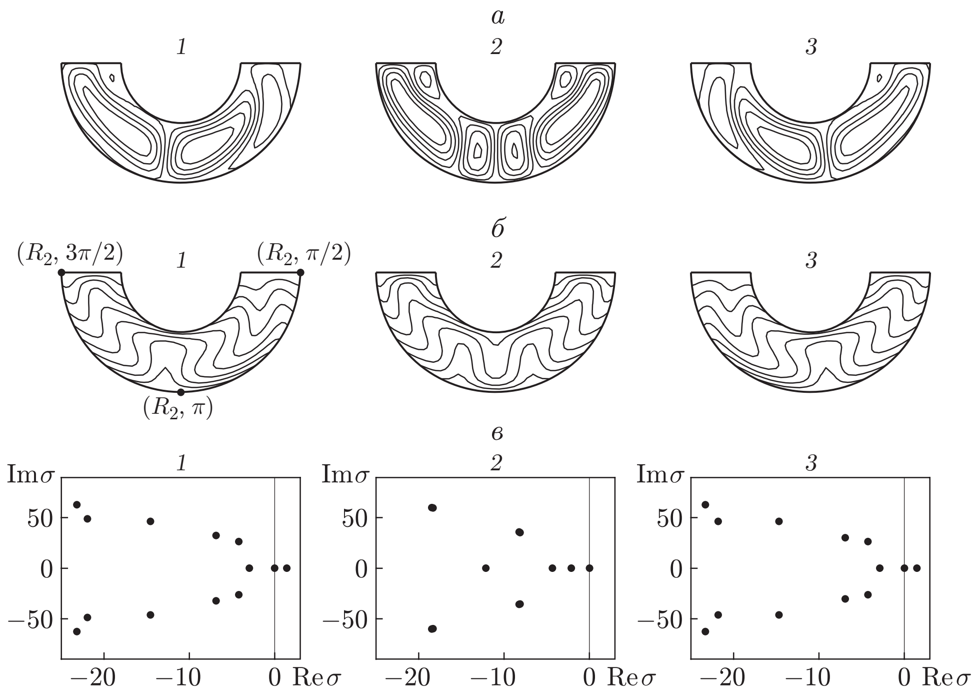

Рис. 6. Функции тока (*а*), распределения температуры (*б*) и спектр устойчивости (*в*) стационарных режимов семейства с $\lambda = 110$ для полукольца:
1–3 — номера режимов, отмеченных на рис. 4,*б*

трапециевидной области и полукольца обнаружено ответвление семейств стационарных движений с переменным спектром устойчивости. Изучена эволюция данных семейств с ростом числа Рэлея вплоть до возникновения на них неустойчивых режимов вследствие монотонной неустойчивости. В исследованных диапазонах чисел Рэлея не обнаружены колебательная неустойчивость на семействе и бифуркации косимметричных семейств стационарных состояний [14]. Не выявлены также сложные конвективные движения, имеющие место в задаче для пористых цилиндров [15].

Развитый метод может быть применен при изучении сценариев конвективных переходов и проведении вычислительного эксперимента при больших надкритичностях.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Гершуни Г. З.** Устойчивость конвективных течений / Г. З. Гершуни, Е. М. Жуховицкий, А. А. Непомнящий. М.: Наука, 1989.
2. **Nield D. A.** Convection in porous media. 3rd ed. / D. A. Nield, A. Bejan. N. Y.: Springer-Verlag, 2006.
3. **Baytas A. C., Pop I.** Natural convection in a trapezoidal enclosure filled with a porous medium // Intern. J. Engng Sci. 2001. N 39. P. 125–134.
4. **Любимов Д. В.** О конвективных движениях в пористой среде, подогреваемой снизу // ПМТФ. 1975. № 2. С. 131–137.
5. **Юдович В. И.** Косимметрия, вырождение решений операторных уравнений, возникновение фильтрационной конвекции // Мат. заметки. 1991. Т. 49, вып. 5. С. 142–148.
6. **Yudovich V. I.** Secondary cycle of equilibria in a system with cosymmetry, its creation by bifurcation and impossibility of symmetric treatment of it // Chaos. 1995. V. 5, N 2. P. 402–411.
7. **Глухов А. Ф., Путин Г. Ф.** Экспериментальное исследование конвективных структур в насыщенной жидкостью пористой среде вблизи порога неустойчивости механического равновесия // Гидродинамика: Сб. науч. тр. Пермь: Перм. гос. ун-т, 1999. Вып. 12. С. 104–120.
8. **Говорухин В. Н.** Численное исследование потери устойчивости вторичными стационарными режимами в задаче плоской кнвекции Дарси // Докл. АН. 1998. Т. 363, № 6. С. 772–774.
9. **Karasözen B., Tsybulin V. G.** Finite-difference approximation and cosymmetry conservation in filtration convection problem // Phys. Lett. A. 1999. V. 262, N 4. P. 321–329.
10. **Кантур О. Ю., Цибулин В. Г.** Расчет семейств стационарных режимов фильтрационной конвекции в узком контейнере // ПМТФ. 2003. Т. 44, № 2. С. 92–100.
11. **Андреев В. К.** Современные математические модели конвекции / В. К. Андреев, Ю. А. Гапоненко, О. Н. Гончарова, В. В. Пухначев. М.: Физматлит, 2008.
12. **Arakawa A.** Computational design for long-term numerical integration of the equations of fluid motion: two-dimensional incompressible flow // J. Comput. Phys. 1966. V. 1. P. 119–143.
13. **Трофимова А. В., Цибулин В. Г.** Расчет конвективных режимов в пористой трапециевидной области // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естеств. науки. 2009. С. 211–215. Спецвыпуск.
14. **Куракин Л. Г., Юдович В. И.** Бифуркации при монотонной потере устойчивости равновесия косимметричной динамической системы // Докл. АН. 2000. Т. 372, № 1. С. 29–33.
15. **Бессонов О. А., Брайловская В. А.** Пространственная модель тепловой конвекции в зазоре между горизонтальными коаксиальными цилиндрами с анизотропным пористым заполнением // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2001. № 1. С. 145–155.

Поступила в редакцию 8/II 2010 г.,
в окончательном варианте — 5/V 2010 г.