соба описания переноса было рассмотрено следующее после P_1 [2-4], нечетное приближение метода сферических гармоник P_3. В плоском случае это приближение приводит к интегральным выражениям, аналогичным решению в приближении P_1. Результаты вычислений показали, что приближение P_3 дает погрешность приблизительно вдвое меньшую, чем приближение P_1. На фиг. 11 воспроизведена вновь фиг. 3 работы [1]. Штрих-пунктир показывает решение в приближении P_3. (В настоящей работе был использован более точный состав плазмы при высоких температурах, чем в [1]. Расчеты на фиг. 11 выполнены со старым составом.) Размерности на фиг. 9 — 11 те же, что и на фиг. 2—5. Цифры в кружках на фигурах означают номер профиля на фиг. 1,

4. Предложенный метод, ввиду его численного характера, применим к любым формам контуров спектральных линий и при произвольном распределении температуры в газе.

Авторы благодарят Л. М. Ветлуцкую за помощь при проведении расчетов.

Поступила 16 VI 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Онуфриев А. Т., Севастьяненко В. Г. Перенос лучистой энергии в спектральных линиях с учетом реабсорбции. ПМТФ, 1966, № 2, стр. 122—125.
2. Дэвисон Б. Теория переноса нейтронов. Атомизд., 1960.
3. Вейнберг А., Вигнер Е. Физическая теория ядерных реакторов. М., 1961.
4. Марчук Г. И. Методы расчета ядерных реакторов. М., 1961.

К ТЕОРИИ СТАЦИОНАРНЫХ РЕЖИМОВ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО И СФЕРИЧЕСКОГО ДИОДОВ

В. А. Сыровой *(Москва)*

Построение теории цилиндрического и сферического диодов при эмиссии, ограниченной пространственным зарядом, начато в [1-3]. В последовавшем за ними цикле работ исследовались различные режимы, которые могут быть реализованы в этих устройствах. Решение получалось либо разложением в ряды, причем параметром разложения служила некоторая функция радиуса, либо численным интегрированием уравнений пучка, а для сферического диода оно было выражено через функции Эйри. В [4,5] представлены рекуррентные соотношения для коэффициентов разложения при любом параметре, по которому оно производится, и для произвольной геометрии. Однако при подходе, имевшем место в перечисленных работах, определение времени пролета частицы вызывало известные трудности. Трудности эти снимаются при введении временного формализма, впервые предложенного в [6] и использованного в [7,8] для рассмотрения цилиндрического и сферического диодов в режиме полного пространственного заряда. Ниже аналогичная задача решена при произвольных условиях эмиссии, причем для коэффициентов рядов выписаны рекуррентные соотношения. Тензорная запись уравнений пучка оставляет свободу в выборе параметра, по которому строится разложение для времени пролета.

§ 1. Радиальное движение зарядов с одним и тем же значением и знаком удельного заряда η в пространстве между коаксиальными цилиндрами или концентрическими сферами описывается системой уравнений, которая в тензорной форме имеет вид

$$v^1 \frac{dv^1}{dx} + \frac{1}{2} \frac{d \ln g_{11}}{dx} (v^1)^2 = g^{11} \frac{d\varphi}{dx}$$

$$\sqrt{g}\, \rho v^1 = J g_{22}(0)\, g_{33}(0), \qquad \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{d}{dx} \left(\sqrt{g}\, g^{11} \frac{d\varphi}{dx} \right) = \rho \tag{1.1}$$

Здесь v^1 — контравариантная компонента скорости, φ — скалярный потенциал, ρ — плотность пространственного заряда, J=const—плотность тока эмиссии. Под g понимается радиальная часть детерминанта метрического тензора g_{ik}, x — некоторая функция радиуса, причем $x = 0$ на эмиттере. Уравнения (1.1) записаны в безразмерных переменных r°, v°, φ°, ρ° (r°, v° — модули радиуса-вектора и вектора скорости)

$$r = ar^\circ, \qquad v = Uv^\circ, \qquad \varphi = -\frac{U^2}{\eta}\varphi^\circ, \qquad \rho = \frac{U^2}{4\pi\eta a^2}\rho^\circ$$

причем символ безразмерной величины опущен; a и U — постоянные, имеющие размерность длины и скорости соответственно. В качестве a удобно выбрать радиус эмиттера. Введение временного формализма

$$\frac{d}{dx} = \frac{1}{v^1} \frac{d}{dt}$$

позволяет свести систему (1.1) к одному уравнению

$$\sqrt{g}\left(x^{\cdot\cdot} + \frac{1}{2}\frac{d\ln g_{11}}{dx}x^{\cdot 2}\right) = (Jt+\varepsilon)b_0^{1/2}c_0^{1/2}, \quad b_0 = g_{22}(0),\ c_0 = g_{33}(0) \tag{1.2}$$

Здесь $\varepsilon = \sqrt{g^{11}}\, d\varphi / dx = \mathrm{const}$ — электрическое поле на эмиттере. Ниже будут выписаны решения уравнения (1.2) для цилиндрического и сферического диодов (в качестве x берется просто радиус) при произвольных условиях эмиссии.

Для цилиндрического диода $x = R - 1$, $g_{11} = 1$, $\sqrt{g} = R$, $b_0 = c_0 = 1$, и (1.2) принимает вид

$$RR^{\cdot\cdot} = Jt + \varepsilon \tag{1.3}$$

Решение (1.3) представим в виде ряда

$$R = \alpha_k t^k \quad (k = 0, 1, \ldots) \tag{1.4}$$

для коэффициентов которого имеют место рекуррентные соотношения

$$\sum_{l=0}^{s}(l+1)(l+2)\alpha_{l+2}\alpha_{s-l} - J\delta_{1s} - \varepsilon\delta_{0s} = 0 \qquad (s = 0, 1, \ldots) \tag{1.5}$$

Здесь $\delta_{as} = 0$ при $a \neq s$ и $\delta_{as} = 1$ при $a = s$. Учитывая, что $R = 1$, $R^{\cdot} = v_0$ при $t = 0$, получаем $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = v_0$, где v_0 — скорость частиц на эмиттере. Выпишем несколько членов разложения (1.4)

$$\begin{aligned} R = {} & 1 + v_0 t + {}^1/_2\, \varepsilon t^2 + {}^1/_6\,(J - \varepsilon v_0)\, t^3 - {}^1/_{12}\,[{}^1/_2\, \varepsilon^2 + v_0\,(J - \varepsilon v_0)]\, t^4 - \\ & - {}^1/_{20}\,[{}^2/_3\, \varepsilon J - {}^7/_6\, \varepsilon^2 v_0 - v^2_0\,(J - \varepsilon v_0)]\, t^5 - \\ & - {}^1/_{30}\,[-{}^7/_{24}\, \varepsilon^3 + {}^{23}/_{12}\, \varepsilon^2 v^2_0 - {}^{19}/_{12}\, \varepsilon J v_0 + {}^1/_6\, J^2 + v_0^3\,(J - \varepsilon v_0)]\, t^6 + \ldots \end{aligned} \tag{1.6}$$

Для сферического диода $x = r - 1$, $g_{11} = 1$, $\sqrt{g} = r^2$, $b_0 = c_0 = 1$, причем $r(t)$ удовлетворяет уравнению

$$r^2 r^{\cdot\cdot} = Jt + \varepsilon \tag{1.7}$$

Решение (1.7) дается рядом

$$r = \beta_k t^k \quad (k = 0, 1, \ldots) \tag{1.8}$$

с коэффициентами, определяемыми из рекуррентных соотношений вида

$$\begin{gathered} \sum_{l=0}^{s}(l+1)(l+2)\beta_{l+2}\gamma_{s-l} - J\delta_{1s} - \varepsilon\delta_{0s} = 0 \quad (s = 0, 1, \ldots) \\ \gamma_{2k} = \beta_k^{\,2} + 2\sum_{l=1}^{k}\beta_{l-1}\beta_{2k-l+1}, \qquad \gamma_{2k+1} = 2\sum_{l=0}^{k}\beta_l\beta_{2k-l+1} \end{gathered} \tag{1.9}$$

Используя (1.9), получаем

$$\begin{aligned} r = {} & 1 + v_0 t + {}^1/_2\, \varepsilon t^2 + {}^1/_6\,(J - 2\varepsilon v_0)\, t^3 - {}^1/_{12}\,[\varepsilon^2 + v_0\,(2J - 3\,\varepsilon v_0)]\, t^4 - \\ & - {}^1/_{20}[{}^4/_3\, \varepsilon J - {}^{11}/_3\, \varepsilon^2 v_0 - v_0^2\,(3J - 4\,\varepsilon v_0)]\, t^5 - \\ & - {}^1/_{30}\,[-{}^{11}/_{12}\, \varepsilon^3 + {}^{17}/_2\, \varepsilon^2 v_0^2 - 5\,\varepsilon J v_0 + {}^1/_3\, J^2 + v_0^3\,(4J - 5\,\varepsilon v_0)]\, t^6 + \ldots \end{aligned} \tag{1.10}$$

Интересно, что формулы (1.6), (1.10) справедливы при произвольных условиях на эмиттирующей поверхности. Их частным случаем являются выражения, приведенные в [7, 8]. Заметим, что (1.6), (1.10) могут быть использованы для определения по заданному времени пролета t соответствующего радиуса. Ниже будет рассмотрена задача о получении зависимости $t = t(x)$ в явном виде.

§ 2. Обращение уравнения (1.2) при помощи соотношения $x^{\cdot\cdot} = -t'' / t'^3$ приводит к следующему результату

$$\sqrt{g}\left(t'' - \frac{1}{2}\frac{d\ln g_{11}}{dx}t'\right) + b_0^{1/2}c_0^{1/2}(Jt+\varepsilon)\,t'^3 = 0 \tag{2.1}$$

При этом оказывается необходимым исследовать три случая: эмиссия в ρ-режиме ($\varepsilon = 0$, $v_0 = 0$), эмиссия в T-режиме ($\varepsilon \neq 0$, $v_0 = 0$), эмиссия с ненулевой начальной скоростью ($v_0 \neq 0$).

Так как решение уравнения (2.1) предполагается искать в виде рядов по $x^{\varkappa}$, представим в аналогичном виде функции $\sqrt{g}$ и $\sqrt{g}\, d \ln g_{11} / dx$, несущие информацию о системе координат, в которой ведется рассмотрение

$$\sqrt{g} = G_k x^k, \qquad \sqrt{g}\, d \ln g_{11} / dx = A_k x^k, \qquad g_{11} = a_k x^k \qquad (k = 0, 1, \ldots) \tag{2.2}$$

При эмиссии в ρ-режиме будем искать решение (2.1) в виде ряда

$$t = x^{1/3} (\tau_k x^k) \qquad (k = 0, 1, \ldots) \tag{2.3}$$

Для определения коэффициентов τ_k получаем

$$\sum_{k=0}^{l} \left[\left(k + \frac{1}{3}\right)\left(k - \frac{2}{3}\right)\tau_k G_{l-k} + \frac{1}{2} b_0^{1/2} c_0^{1/2} J \left(k + \frac{2}{3}\right) \beta_k \gamma_{l-k}\right] -$$

$$- \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{l-1} \left(k + \frac{1}{3}\right) \tau_k A_{l-k-1} = 0 \qquad (l = 0, 1, \ldots)$$

$$\beta_{2s} = \tau_s^2 + 2 \sum_{l=1}^{s} \tau_{l-1} \tau_{2s-l+1}, \qquad \beta_{2s+1} = 2 \sum_{l=0}^{s} \tau_l \tau_{2s-l+1} \tag{2.4}$$

$$\gamma_{2s} = \left[\left(s + \frac{1}{3}\right)\tau_s\right]^2 + 2 \sum_{l=1}^{s} \left(l - \frac{2}{3}\right)\left(2s - l + \frac{4}{3}\right) \tau_{l-1} \tau_{2s-l+1}$$

$$\gamma_{2s+1} = 2 \sum_{l=0}^{s} \left(l + \frac{1}{3}\right)\left(2s - l + \frac{4}{3}\right) \tau_l \tau_{2s-l+1}$$

Заметим, что все коэффициенты с отрицательными индексами, а также сумма от a до b при $b < a$ равны нулю по определению. Используя (2.4), для времени пролета получаем

$$t = \left(\frac{6}{J}\right)^{1/3} s^{1/3} \left[1 + \left(\frac{1}{12} \frac{a_1}{a_0^{3/2}} - \frac{1}{15} T\right) s + \left(\frac{1}{18} \frac{a_2}{a_0^2} - \frac{1}{48} \frac{a_1^2}{a_0^3} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{1}{45} \frac{a_1}{a_0^{3/2}} T + \frac{1}{360} T^2 - \frac{1}{72} T_S'\right) s^2 + \ldots\right], \qquad s = a_0^{1/2} x \tag{2.5}$$

Здесь T — полная кривизна эмиттирующей поверхности, равная сумме главных кривизн, T_S' — ее производная по радиусу, взятая при $x = 0$ (для цилиндра величина $T = -1 / R$ и для сферы $T = -2 / r$).

При эмиссии в T-режиме будем строить разложение по полуцелым степеням x

$$t = \tau_k x^{1/2 k} \qquad (k = 1, 2, \ldots) \tag{2.6}$$

Коэффициенты в (2.6) удовлетворяют рекуррентным соотношениям

$$\sum_{k=1}^{l} k \left(\frac{k}{2} - 1\right) \tau_k G_{1/2(l-k)} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{l-2} k \tau_k A_{1/2(l-k-2)} +$$

$$+ \left[\frac{1}{2} J \sum_{k=2}^{l} k \beta_k \gamma_{l-k+2} + \varepsilon \sum_{k=2}^{l+1} (l - k + 2) \gamma_k \tau_{l-k+2}\right] b_0^{1/2} c_0^{1/2} = 0 \tag{2.7}$$

$$(l = 1, 2, \ldots)$$

$$\beta_{2s} = \tau_s^2 + 2 \sum_{l=1}^{s-1} \tau_l \tau_{2s-l}, \qquad \beta_{2s+1} = 2 \sum_{l=1}^{s} \tau_l \tau_{2s-l+1}$$

$$\gamma_{2s} = \left(\frac{1}{2} s \tau_s\right)^2 + \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{s-1} l (2s - l) \tau_l \tau_{2s-l}, \qquad \gamma_{2s+1} = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{s} l (2s - l + 1) \tau_l \tau_{2s-l+1}$$

Выпишем несколько первых коэффициентов разложения, определенных из этих формул

$$t = \left(\frac{2}{\varepsilon}\right)^{1/2} s^{1/2} - \frac{1}{3}\frac{J}{\varepsilon^2} s + \left(\frac{2}{\varepsilon}\right)^{3/2} \left(\frac{1}{8}\frac{a_1}{a_0^{3/2}} - \frac{1}{12} T + \frac{5}{12}\frac{J^2}{\varepsilon^3}\right) s^{3/2} +$$

$$+ \left(-\frac{1}{12}\frac{a_1}{a_0^{3/2}}\frac{J}{\varepsilon^2} + \frac{1}{30}\frac{J}{\varepsilon^2} T - \frac{7}{27}\frac{J^3}{\varepsilon^5}\right) s^2 + \ldots \tag{2.8}$$

Остается рассмотреть случай отличной от нуля скорости эмиссии, когда решение уравнения (2.1) представляется в виде

$$t = \tau_k x^k \quad (k = 0, 1, \ldots) \tag{2.9}$$

Для коэффициентов τ_k получаем

$$\sum_{k=2}^{l+2} k(k-1)\tau_k G_{l-k+2} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{l+1} k\tau_k A_{l-k+1} +$$

$$+ \left[\frac{1}{2} J \sum_{k=2}^{l+1} k\beta_k \gamma_{l-k+3} + \varepsilon \sum_{k=2}^{l+2} (l-k+3)\gamma_k \tau_{l-k+3}\right] b_0^{1/2} c_0^{1/2} = 0 \tag{2.10}$$

$$(l = 0, 1, \ldots)$$

$$\beta_{2s} = \tau_s^2 + 2\sum_{l=1}^{s-1} \tau_l \tau_{2s-l}, \quad \beta_{2s+1} = 2\sum_{l=1}^{s} \tau_l \tau_{2s-l+1}$$

$$\gamma_{2s} = (s\tau_s)^2 + 2\sum_{l=1}^{s-1} l(2s-l)\tau_l \tau_{2s-l}, \quad \gamma_{2s+1} = 2\sum_{l=1}^{s} l(2s-l+1)\tau_l \tau_{2s-l+1}$$

Используя (2.10), находим

$$t = \frac{1}{v_0} s + \left(\frac{1}{4v_0}\frac{a_1}{a_0^{3/2}} - \frac{1}{2}\frac{\varepsilon}{v_0^3}\right) s^2 + \left(\frac{1}{6v_0}\frac{a^2}{a_0^2} - \frac{1}{24v_0}\frac{a_1^2}{a_0^3} - \frac{1}{4}\frac{\varepsilon}{v_0^3}\frac{a_1}{a_0^{3/2}} -\right.$$

$$\left. - \frac{1}{6}\frac{\varepsilon}{v_0^3} T - \frac{1}{6}\frac{J}{v_0^4} + \frac{1}{2}\frac{\varepsilon^2}{v_0^5}\right) s^3 + \ldots \tag{2.11}$$

В качестве x в формулах (2.5), (2.8), (2.11) могут быть взяты $R - 1$, $\ln R$, $1 - 1/R$ и т. д.

Поступила 15 VIII 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Langmuir I. The Effect of Space Charge and Residual Gases on Thermionic Currents in High Vacuum. Phys. Rev., 1913, vol. 2, No. 5.
2. Langmuir I., Blodgett K. B. Currents Limited by Space Charge Between Coaxial Cylinders. Phys. Rev., 1923, vol. 22, No. 4.
3. Langmuir I., Blodgett K. B. Currents Limited by Space Charge Between Concentric Spheres. Phys. Rev., 1924, vol. 24, No. 1.
4. Кузнецов Ю. Е., Сыровой В. А. О решении уравнений регулярного электростатического пучка при эмиссии с произвольной поверхности. ПМТФ, 1966, № 2.
5. Сыровой В. А. О решении уравнений регулярного пучка при произвольных условиях эмиссии на криволинейной поверхности. ПМТФ, 1966, № 3.
6. Брауде С. Я. Движение электрона в электрическом и магнитном поле с учетом пространственного заряда. Ж. эксперим. и теор. физ., 1935, т. 5, № 7.
7. Gold L. Transit Time and Space-Charge for a Cylindrical Diode. J. Electr. Contr., 1957, vol. 3, No. 6.
8. Gold L. Transit Time and Space-Charge in Spherical Diode. J. Electr. Contr., 1958, vol. 4, No. 4.