ПМТФ, № 4, 1972

УДК 532.5

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ НЕСТАЦИОНАРНОЙ КРУГЛОЙ СТРУИ ИДЕАЛЬНОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

В. К. Андреев

(Новосибирск)

Исследуется устойчивость неустановившегося течения в цилиндре идеальной несжимаемой жидкости со свободной границей. В зависимости от параметров задачи имеется 20 различных случаев поведения малых возмущений. В частности, круглая струя без учета поверхностного натяжения устойчива по отношению к осесимметричным возмущениям, но введение капиллярных сил приводит к сильной неустойчивости.

В работе [1] рассматривалась устойчивость нестационарного течения в полосе идеальной несжимаемой жидкости с линейным полем скоростей. Это течение оказалось неустойчивым без учета поверхностного натяжения, однако введение поверхностного натяжения стабилизирует течение.

Общая задача об устойчивости нестационарных течений идеальной несжимаемой жидкости со свободной границей поставлена в [2] Л. В. Овсянниковым. Там же приведены примеры, показывающие степень трудности исследования устойчивости.

В работе [3] был разобран случай, когда свободная граница имеет форму эллипса. Оказывается, что если за меру устойчивости брать норму в L_2 возмущения потенциала, то течение устойчиво. Но если судить об устойчивости по отклонению свободной границы от ее невозмущенного состояния, то движение неустойчиво.

Здесь рассматривается устойчивость нестационарного течения в цилиндре идеальной несжимаемой жидкости со свободной границей.

1. Постановка задачи. Область Ω, заполненная идеальной несжимаемой жидкостью, представляет собой цилиндр $0 \leqslant z \leqslant h$, $x^2 + y^2 \leqslant R^2$. Здесь x, y, z — эйлеровы координаты. Цилиндр ограничен двумя непроницаемыми стенками. Боковая поверхность Γ свободна, на Γ давление терпит разрыв: $p - p_1 = \sigma / R$, $p_1 = \mathrm{const}$, σ—коэффициент поверхностного натяжения. Константа p_1 без ограничения общности принимается равной нулю. Одна из стенок в момент $t = 0$ начинает внезапно двигаться со скоростью $V = \mathrm{const}$, а другая остается неподвижной.

Основное решение в координатах Лагранжа $\varkappa$, η, ζ имеет вид [2]

$$\begin{gathered} x = \alpha\xi, \; y = \alpha\eta, \quad z = \alpha^{-2}\zeta \\ p = {}^1/_2\alpha\alpha'' \,(R^2 - \xi^2 - \eta^2) + \sigma / R\alpha \\ \alpha = (1 + \varkappa t)^{-1/2}, \quad \varkappa = V / h \end{gathered} \tag{1.1}$$

Штрих означает дифференцирование по t. Свободная граница при всех $t \geqslant 0$ есть круглый цилиндр $0 \leqslant J \leqslant h$, $\xi^2 + \eta^2 = R^2$. С ростом t цилиндр Ω при $\varkappa > 0$ стягивается к оси $x = y = 0$, а при $\varkappa < 0$ разбухает до бесконечности за время $t^* = -{}^1/\varkappa$.

Рассмотрим другое решение в области Ω, но с измененной начальной функцией

$$\varphi_0^* (\xi) = \varphi_0 (\xi) + \Phi_0 (\xi), \quad \Delta\Phi_0 = 0 \tag{1.2}$$

Положим

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{x} + \mathbf{X}, \quad \varphi^* = \varphi + \mathbf{x}_t \mathbf{X} + \Phi$$

Тогда задача об эволюции возмущений основного решения, которое, происходит под действием малого возмущения начальной функции (1.2), в линейном приближении имеет вид [2]

$$\operatorname{div} M^{-1} M^{*-1} \nabla \Phi = 0 \quad (\xi \in \Omega) \tag{1.3}$$

$$\Phi_t + P + \mathbf{x}_{tt} M \int_0^t M^{-1} M^{*-1} \nabla \Phi \, dt = 0 \quad (\xi \in \Gamma) \tag{1.4}$$

$$\Phi = \Phi_0(\xi), \quad \Delta \Phi_0 = 0 \quad (t = 0) \tag{1.5}$$

Здесь P — линейная часть приращения функции $\sigma (R_1^{-1} + R_2^{-1})$; R_1, R_2 — главные радиусы кривизн нормальных сечений в данной точке возмущенной поверхности, M — матрица Якоби отображения $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\xi, t)$, в силу (1.1) $M = M^* = \operatorname{diag}(\alpha, \alpha, \alpha^{-2})$.

Перейдем к цилиндрическим координатам ρ, θ, ζ по формулам

$$\xi = \rho \cos\theta, \ \eta = \rho \sin\theta, \ \zeta = \zeta$$

Тогда уравнение (1.3) дает

$$\Phi_{\rho\rho} + \rho^{-1}\Phi_\rho + \rho^{-2}\Phi_{\theta\theta} + \alpha^6 \Phi_{\zeta\zeta} = 0 \quad (\rho < R) \tag{1.6}$$

Из (1.4) получаем

$$\Phi_t + P + \alpha\alpha''\rho \int_0^t \frac{1}{\alpha^2} \Phi_\rho dt = 0 \quad (\rho = R) \tag{1.7}$$

Поведение возмущения границы цилиндра будем описывать нормальной составляющей вектора $\mathbf{X}$. Согласно [2]

$$\mathbf{X} = M \int_0^t M^{-1} M^{*-1} \nabla \Phi dt$$

Тогда для нормальной составляющей получим

$$\eta^* = \alpha \int_0^t \frac{1}{\alpha^2} \Phi_\rho \, dt \tag{1.8}$$

Уравнение возмущенной поверхности в цилиндрических (эйлеровых) координатах имеет вид

$$\rho = R\alpha + \eta^* (\theta, z, t)$$

Из дифференциальной геометрии по известным формулам можно найти явное выражение для $R_1^{-1} + R_2^{-1}$. Затем, учитывая малость η^* и ее производных, произведем разложение по ним, и в этом разложении удержим члены, линейные относительно η^* и ее производных

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{1}{R\alpha} - \frac{\eta^*}{R^2\alpha^2} - \frac{\eta_{\theta\theta}^*}{R^2\alpha^2} - \eta_{zz}^* + \ldots$$

В координатах Лагранжа

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{1}{R\alpha} - \frac{\eta^*}{R^2\alpha^2} - \frac{\eta_{\theta\theta}^*}{R^2\alpha^2} - \alpha^4 \eta_{\zeta\zeta}^* + \ldots \tag{1.9}$$

Первый член разложения соответствует чисто цилиндрической поверхности.

2. Разделение переменных. Введем безразмерные переменные по формулам

$$\rho_1 \to \frac{\rho}{R}\alpha^3, \quad \alpha \to t, \quad \zeta_1 \to \frac{\zeta}{h}, \quad \Phi_1 \to (Rh\varkappa)^{-1}\Phi \tag{2.1}$$

Тогда из (1.6) и (1.7) с учетом (1.9) получаем (индексы для простоты опущены)

$$\Phi_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho}\Phi_\rho + \frac{1}{\rho^2}\Phi_{\theta\theta} + \frac{R^2}{h^2}\Phi_{\zeta\zeta} = 0 \quad (\rho < \alpha^3) \tag{2.2}$$

$$\Phi_\alpha + 3\alpha^2\Phi_\rho - \frac{2\sigma}{\varkappa^2Rh\alpha^3}\left(\frac{2h}{R^2\alpha}\int\limits_1^\alpha \frac{1}{\alpha^2}\Phi_\rho d\alpha + \frac{2\alpha^5}{h}\int\limits_1^\alpha \frac{1}{\alpha^2}\Phi_{\rho\zeta\zeta} d\alpha + \right.$$

$$\left. + \frac{2h}{R^2\alpha}\int\limits_1^\alpha \frac{1}{\alpha^2}\Phi_{\rho\theta\theta} d\alpha\right) + 3\alpha^3\int\limits_1^\alpha \frac{1}{\alpha^2}\Phi_\rho d\alpha = 0 \quad (\rho = \alpha^3) \tag{2.3}$$

Из (1.8) следует, что

$$\eta^* = -2h\alpha\int\limits_1^\alpha \frac{1}{\alpha^2}\Phi_\rho d\alpha \tag{2.4}$$

В уравнениях (2.2), (2.3) отделяются все переменные, значит в задаче об устойчивости можно ограничиться исследованием частных решений вида

$$\Phi = T(\alpha)A(\rho)\exp i(k\zeta + \lambda\theta) \tag{2.5}$$

Здесь волновое число $k = n\pi$; $n = 0, 1, 2, \ldots$. Спектральная мода λ — целое число. Из (2.2) следует, что $A(\rho) = I_\lambda(kRh^{-1}\rho)$ — модифицированная функция Бесселя первого рода.

Введем безразмерные параметры

$$R/h = \beta, \ \sigma/R^3\varkappa^2 = \gamma \tag{2.6}$$

$$A_1 = TI_\lambda, \quad A_2 = \int\limits_1^\alpha \frac{1}{\alpha^2}TI_\lambda' d\alpha, \quad I_\lambda' = \frac{d}{d\rho}I_\lambda(kRh^{-1}\rho)\,|_{\rho=\alpha^3}$$

Из (2.3) с учетом обозначений (2.6) окончательно получим систему линейных дифференциальных уравнений первого порядка

$$dA_1/d\alpha = -[4\gamma(\lambda^2 - 1)\alpha^{-4} + 4\gamma\beta^2k^2\alpha^2 + 3\alpha^3]A_2$$

$$\frac{dA_2}{d\alpha} = \frac{I_\lambda'}{\alpha^2 I_\lambda}A_1 \tag{2.7}$$

Из (2.4) следует, что поведение η^* описывается функцией A_2. Действительно

$$\eta^* = -2h\alpha\int\limits_1^\alpha \frac{1}{\alpha^2}\Phi_\rho d\alpha = -2h\alpha A_2\exp i(k\zeta + \lambda\theta) \tag{2.8}$$

3. Асимптотика решений. В зависимости от параметров задачи β, γ, k, λ имеется 20 различных случаев поведения A_2. Здесь будут приведены асимптотики A_2 (см., например, [4]).

Пусть цилиндр стягивается к оси $x = y = 0$, а параметры γ и k не равны нулю одновременно. Тогда

$$A_2 \sim \alpha^{5/4}\,[c_1 \operatorname{ch}(2\beta k\sqrt{2\gamma}\,\alpha^{-1/2}) + c_2 \operatorname{sh}(2\beta k\sqrt{2\gamma}\,\alpha^{-1/2})] \quad (\lambda = 0) \tag{3.1}$$

$$A_2 \sim \alpha^{-7/4}\,[c_1 \cos(4\beta k\sqrt{\gamma}\,\alpha^{-1/2}) + c_2 \sin(4\beta k\sqrt{\gamma}\,\alpha^{-1/2})] \quad (\lambda = 1) \tag{3.2}$$

$$A_2 \sim \alpha^{-7/4}\{c_1 \cos[{}^4/_7\sqrt{\lambda(\lambda^2-1)\gamma}\,\alpha^{-7/2}] + c_2 \sin[{}^4/_7\sqrt{\lambda(\lambda^2-1)\gamma}\,\alpha^{-7/2}]\} \quad (\lambda > 1) \tag{3.3}$$

Пусть цилиндр разбухает до бесконечности, а γ и k по-прежнему не равны нулю одновременно. В этом случае для всех λ имеем

$$A_2 \sim \alpha^{-5/4}\,[c_1 \cos({}^2/_3\sqrt{3k\beta}\,\alpha^{3/2}) + c_2 \sin({}^2/_3\sqrt{3k\beta}\,\alpha^{3/2})] \tag{3.4}$$

Предположим, что $\gamma = 0, k \neq 0$. Тогда при растяжении цилиндра имеем

$$A_2 \sim c_1 + c_2\alpha^2 \quad (\lambda = 0) \tag{3.5}$$

$$A_2 \sim c_1/\alpha + c_2/\alpha^3 \quad (\lambda = 1) \tag{3.6}$$

$$A_2 \sim \alpha^{-2}\,[c_1 \cos(\sqrt{3\lambda - 4}\ln\alpha) + c_2 \sin(\sqrt{3\lambda - 4}\ln\alpha)] \quad (\lambda > 1) \tag{3.7}$$

При сжатии при всех λ получаем

$$A_2 \sim \alpha^{-5/4}\,[c_1 \cos({}^2/_3\sqrt{3k\beta}\,\alpha^{3/2}) + c_2 \sin({}^2/_3\sqrt{3k\beta}\,\alpha^{3/2})] \tag{3.8}$$

Рассмотрим плоские возмущения, что соответствует $k = 0$. Функция $A(\rho) = \rho^\lambda$, и, в виду того что жидкость несжимаема, случай $\lambda = 0$ отпадает. При растяжении цилиндра и $\gamma \neq 0$ имеем

$$A_2 \sim c_1/\alpha + c_2/\alpha^3 \quad (\lambda = 1) \tag{3.9}$$

$$A_2 \sim \alpha^{-1/4}\{c_1 \cos[{}^4/_7\sqrt{\lambda(\lambda^2-1)\gamma}\,\alpha^{-7/2}] + c_2 \sin[{}^4/_7\sqrt{\lambda(\lambda^2-1)\gamma}\,\alpha^{-7/2}]\} \quad (\lambda > 1) \tag{3.10}$$

При сжатии и $\gamma \neq 0$

$$A_2 \sim c_1/\alpha + c_2/\alpha^3 \quad (\lambda = 1) \tag{3.11}$$

$$A_2 \sim \alpha^{-2}\,[c_1 \cos(\sqrt{3\lambda - 4}\ln\alpha) + c_2 \sin(\sqrt{3\lambda - 4}\ln\alpha)] \quad (\lambda > 1) \tag{3.12}$$

Пусть $\gamma = 0$ и $\alpha \to 0$ тогда асимптотики совпадают с (3.6) и (3.7) соответственно, а при $\gamma = 0$ и $\alpha \to \infty$ — с (3.11) и (3.12).

Таким образом, при сжатии струи наблюдается устойчивость, при растяжении осесимметрические возмущения при наложении поверхностного натяжения становятся неустойчивыми, причем неустойчивость экспоненциального вида. Вычисляя координаты центра масс, можно убедиться, что в случае $\lambda = 1$ и только в этом случае происходит сдвиг центра масс в плоскости (x, z), т. е. происходит перемещение струи как единого целого. При $\lambda > 1$ поверхностное натяжение стабилизирует течение.

Известно [5], что в случае стационарной струи осесимметрические возмущения неустойчивы при длине волны, большей чем длина кривой поперечного сечения. Однако в нестационарной струе неустойчивость наблюдается при любых длинах волн.

В заключение автор благодарит В. В. Пухначева за постановку задачи и ценные советы.

Поступила 28 II 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. Кузнецов В. М., Шер Е. Н. Об устойчивости течения идеальной несжимаемой жидкости в полосе и кольце. ПМТФ, 1964, № 2.
2. Овсянников Л. В. Общие уравнения и примеры. В сб. «Задача о неустановившемся движении жидкости со свободной границей», Новосибирск, «Наука», 1967.
3. Пухначев В. В. Малые возмущения плоского неустановившегося движения идеальной несжимаемой жидкости со свободной границей, имеющей форму эллипса. ПМТФ, 1971, № 4.
4. Вазов В. Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. М., «Мир», 1968.
5. Ламб Г. Гидродинамика. М.—Л., Гостехиздат, 1947.