8. **Terrill R. M., Thomas P. W.** On laminar flow through a uniformly porous pipe.— Appl. Scient. Res., 1969, vol. 21, N 1.
9. **Гольдштик М. А., Штерн В. Н.** Гидродинамическая устойчивость и турбулентность. Новосибирск: Наука, 1977.
10. **Ерошенко В. М., Зайчик Л. И., Рабовский В. Б.** Устойчивость плоского течения вблизи передней критической точки при сильном вдуве.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1982, № 2.

УДК 532.59

НЕЛИНЕЙНЫЕ АЗИМУТАЛЬНЫЕ ВОЛНЫ В ЦЕНТРИФУГЕ

А. А. Абрашкин

(*Горький*)

В настоящей работе рассматриваются азимутальные волновые движения в жидкости, частично заполняющей быстро вращающийся вокруг горизонтальной оси цилиндр (центрифуга). Под действием центробежной силы жидкость оказывается прижатой к стенке цилиндра и движется вместе с ним вокруг центрального воздушного ядра. Возникающие при этом колебания свободной поверхности называют центрифуговыми волнами [1]. Трудности их теоретического исследования связаны как с нелинейностью основных уравнений, так и граничного условия для давления на свободной поверхности, поэтому ранее они изучались только линейными методами [1, 2].

Ниже будут аналитически описаны нелинейные азимутальные волны в центрифуге с бесконечным радиусом вращающегося цилиндра. Найденные волны являются аналогом трохоидальных волн Гертнера на цилиндрической поверхности. Для центрифуги с конечным внешним радиусом построено приближенное решение путем сшивки полученных волн с известными линейными.

1. Рассмотрим азимутальные волны в центрифуге, вращающейся с постоянной угловой скоростью Ω. В линейном приближении они исследовались в [2]. В полярной системе координат R, θ, вращающейся со скоростью Ω, радиальная u и азимутальная v скорости равны соответственно

$$u(R,\theta,t)=\frac{\sigma_n d}{\left[(R_2/R_1)^{2n}-1\right]}\left(\frac{R}{R_1}\right)^{n-1}\left[\left(\frac{R_2}{R}\right)^{2n}-1\right]\sin(n\theta-\sigma_n t); \tag{1.1}$$

$$v(R,\theta,t)=\frac{\sigma_n d}{\left[(R_2/R_1)^{2n}-1\right]}\left(\frac{R}{R_1}\right)^{n-1}\left[\left(\frac{R_2}{R}\right)^{2n}+1\right]\cos(n\theta-\sigma_n t), \tag{1.2}$$

где R_1, R_2 — внутренний и внешний радиусы невозмущенного жидкого кольца; d — амплитуда синусоидального профиля на свободной границе; n — номер азимутальной моды; σ_n — частота волны, определяемая равенством

$$\sigma_n^{\pm}=\frac{n\Omega}{\pm\left(n-1+(n+1)(R_2/R_1)^{2n}\right)^{1/2}\left((R_2/R_1)^{2n}-1\right)-1}. \tag{1.3}$$

Волны частоты σ_n^{+} движутся в направлении вращения системы координат, а частоты σ_n^{-} — в противоположном направлении. В неподвижной системе координат оба типа волн распространяются в сторону вращения потока. Заметим, что траекториями жидких частиц являются эллипсы.

Рассмотрение волн конечной амплитуды вначале удобно провести для центрифуги с бесконечным внешним радиусом R_2 (это соответствует случаю $R_2 \gg R_1$), когда задачу удается решить точно.

В [3] показано, что система уравнений двумерной гидродинамики эквивалентна следующим уравнениям:

$$\left(W_\eta(\overline{W})_{\bar\eta}-W_{\bar\eta}(\overline{W})_\eta\right)_t=0,\quad \left(W_{t\eta}(\overline{W})_{\bar\eta}-W_{t\bar\eta}(\overline{W})_\eta\right)_t=0. \tag{1.4}$$

Здесь $W=X+iY$; $\overline{W}=X-iY$; $\eta=a+ib$; $\bar\eta=a-ib$; X, Y — эйлеровы; a, b — лагранжевы декартовы координаты; t — время; индексы обозначают дифференцирование по соответствующей переменной. Уравнения (1.4) выражают соответственно условия несжимаемости жидкости и сохранения вихря вдоль траектории.

Непосредственной подстановкой можно убедиться, что выражение

$$W = G(\eta)e^{i\lambda t} + F(\overline{\eta})e^{i\mu t}, \tag{1.5}$$

где λ, μ — действительные числа, а G и F — произвольные аналитические функции, является точным решением системы (1.4). Оно описывает класс вихревых нестационарных течений идеальной жидкости, включающей в себя в качестве частных случаев известные точные решения — волны Герстнера и эллиптический вихрь Кирхгофа [4]. Траекториями жидких частиц для движений вида (1.5) будут эпициклоиды (гипоциклоиды), т. е. частицы описывают окружность, центр которой в свою очередь движется по окружности. Поэтому данный тип течений авторы [3] предложили называть птоломеевским.

Предположим, что изучаемые волны относятся к классу птоломеевских движений, тогда функции G и F определятся из граничных условий. Так как на бесконечности жидкость вращается как целое, то в решении (1.5) следует положить

$$G(\eta) = \eta, \ \lambda = \Omega \tag{1.6}$$

и считать, что $|F| \to 0$ при $|\eta| \to \infty$. Функцию F найдем из условия постоянства давления на свободной поверхности $|\eta| = R_1$. Выражение для давления получается из уравнений движения в переменных Лагранжа (см., например, [5]) и с учетом соотношений (1.5), (1.6) принимает вид

$$\frac{p}{\rho} = \frac{1}{2}\Omega^2 |\eta|^2 + \frac{1}{2}\mu^2 |F|^2 + \mathrm{Re}\int (\Omega^2\eta\,(\overline{F})_\eta + \mu^2\overline{F})\, e^{i(\Omega-\mu)t} d\eta.$$

Для того чтобы на свободной поверхности давление оставалось постоянным, необходимо обращение в нуль коэффициентов при временных множителях. Это выполняется, если

$$F(\overline{\eta}) = A\overline{\eta}^{-q^2}, \quad q = \frac{\mu}{\Omega}, \tag{1.7}$$

где A — постоянная.

Окончательное выражение для W получим, подставив равенства (1.6), (1.7) в решение (1.5):

$$W = \eta e^{i\Omega t} + A\overline{\eta}^{-q^2} e^{iq\Omega t}, \tag{1.8}$$

откуда легко заключить, что траекториями жидких частиц являются укороченные эпи- ($q > 0$) и гипоциклоиды ($q < 0$) с числом заострений $|q - 1|$, а профилями распространяющихся волн — эпициклоиды с числом заострений $q^2 - 1$, причем для стационарности профиля положим q^2 целым. Учитывая вид профиля, назовем волны эпициклоидальными.

Распределение давления в жидкости задается формулой

$$p = \frac{1}{2}\rho\Omega^2 q^2 A^2 \left[|\eta|^{-2q^2} - R_1^{-2q^2}\right] + \frac{1}{2}\rho\Omega^2 (|\eta|^2 - R_1^2), \tag{1.9}$$

т. е. на профиле волны давление постоянно.

Укажем также, что для постоянной A, определяющей амплитуду волн, имеется верхний предел $A = R_1^{q^2+1}/q^2$, когда профиль свободной поверхности имеет заострения (при бо̀льших значениях A на профиле образуются петли — случай физически нереализуемый).

Эпициклоидальные волны вихревые. Завихренность ω для них запишется в виде

$$\omega = \frac{2\Omega\left(1 - q^5 A^2 |\eta|^{-2(q^2+1)}\right)}{1 - q^4 A^2 |\eta|^{-2(q^2+1)}},$$

откуда видно, что для волн с положительными q завихренность будет знакопеременной функцией.

Найдем угловую скорость вращения профиля волн Ω_0. Очевидно, что вращение жидкости как целого с частотой Ω_0 характеризуется общим множителем $\exp(i\Omega_0 t)$ в выражении для W, поэтому в системе отсчета, где профиль неподвижен, решение (1.9) примет вид

$$W = \eta e^{i(\Omega-\Omega_0)t} + A\bar{\eta}^{-q^2} e^{i(q\Omega-\Omega_0)t}.$$

В этой системе траектории жидких частиц совпадают с формой профиля, поэтому справедливо равенство $q\Omega - \Omega_0 = q^2(\Omega - \Omega_0)$, из которого находим $\Omega_0 = q(q+1)^{-1}\Omega$.

В системе отсчета, движущейся с угловой скоростью Ω, частота вращения профиля волн равняется $-(q+1)^{-1}\Omega$, так что волны, соответствующие отрицательным q, движутся в направлении вращения, а положительным — против. Скорость вращения профиля для линейных волн в этой же системе отсчета равняется $\sigma_n^{\pm}/n$ и в случае бесконечного радиуса центрифуги ($R_2 \to \infty$) запишется как

$$\frac{\sigma_n^{\pm}}{n} = -\frac{\Omega}{(\mp\sqrt{n+1}+1)}.$$

Полагая $n = q^2 - 1$, получим, что частоты вращения профилей линейных и эпициклоидальных волн совпадают (знак плюс перед корнем относится к волнам с $q > 0$, а минус — к волнам с $q < 0$). Это свойство эпициклоидальных волн мы используем при нахождении приближенного решения для волн в центрифуге с конечным радиусом стенки.

2. Очевидно, что точное решение для эпициклоидальных волн становится несправедливым для центрифуги с конечным внешним радиусом, так как нормальная составляющая скорости на стенке не обращается в нуль. В то же время этому условию удовлетворяют линейные волны (1.1)—(1.3), поэтому предположим, что локализованные вблизи свободной поверхности нелинейные вихревые волны на некоторой глубине сшиваются с линейными. Ясно, что для такого волнового движения граничные условия на свободной поверхности и стенке будут выполнены и остается только удовлетворить условиям непрерывности нормальной скорости и давления на границе склейки.

Поверхность сшивки $R = R^*$ выступает для линейных волн в качестве свободной (в формулах (1.1)—(1.3) следует заменить R_1 на R^*). Будем считать, что амплитуда отклонения профиля на этой поверхности d мала — $d \ll n^{-1}(R_2 - R^*)$ (заметим, что амплитуда колебаний свободной поверхности при этом может быть порядка длины волны), тогда приближенно нормальными к границе склейки будут радиальные скорости волн. Во вращающейся с угловой скоростью Ω системе отсчета радиальная скорость u^* точного решения (1.9) имеет вид

$$u^* = -(q-1)\Omega A r^{-q^2} \sin[(q^2-1)\varphi + (q-1)\Omega t], \tag{2.1}$$

где r и φ — соответственно модуль и фаза комплексной лагранжевой координаты η. В силу малости d заменим в формуле (1.1) эйлеровы переменные лагранжевыми, тогда

$$u = d\sigma_n \sin(n\varphi - \sigma_n t). \tag{2.2}$$

Будем рассматривать волны, для которых справедливо неравенство $(R_2/R^*)^n \gg 1$, в этом случае $\sigma_n = -(q-1)\Omega$ (напомним, что $n = q^2 - 1$), и, сравнивая соотношения (2.1), (2.2), получаем

$$R^* = (A/d)^{1/q^2}.$$

В неподвижной системе координат давление на поверхности $r = |\eta| = R^*$, определяемое формулой (1.9), постоянно и выступает для линейных волн (1.1)—(1.3) в роли давления на свободной поверхности, поэтому условие непрерывности легко удовлетворяется выбором соответствующей постоянной в выражении для давления линейных волн [2].

Заметим, что во вращающейся системе отсчета жидкие частицы движутся по круговым траекториям в эпициклоидальных волнах и по эллипсам, вырождающимся на стенке в прямые, — в линейных.

Укажем также, что эффекты поверхностного натяжения, которыми пренебрегалось в данной работе, будут несущественны до длин волн порядка $(T/\rho\Omega^2 R_1)^{1/2}$, где T — коэффициент поверхностного натяжения, ρ — плотность, поэтому на длину волны полученного приближенного решения существует ограничение снизу $R_1/(q^2-1) \gg (T/(\rho\Omega^2 R_1))^{1/2}$.

3. Свойства эпициклоидальных волн очень схожи со свойствами трохоидальных волн Герстнера на поверхности бесконечно глубокой жидкости. Для обоих типов волн давление на профиле волны постоянно, в системе отсчета, где волны неподвижны, траекториями жидких частиц являются окружности. Наконец, вид свободной поверхности этих волн определяется родственными кривыми — эпициклоидой и трохоидой, так что, по существу, это волны Герстнера на цилиндрической поверхности. В то же время необходимо отметить, что для эпициклоидальных волн в отличие от волн Герстнера ясен реальный источник завихренности — вращающаяся жидкость.

Продолжая проводить аналогии между двумя типами волновых движений, укажем, что для волн в тяжелой жидкости конечной глубины H легко получить приближенное решение, аналогичное рассмотренному в п. 2, когда волны Герстнера сшиваются с линейными гравитационными волнами на некоторой глубине H^*, значение которой определяется из условия непрерывности нормальной составляющей скорости. При этом необходимо наложить следующие ограничения на волновое число k: $kB \exp(-kH^*) \ll 1$ (малость амплитуды волн на границе сшивки по сравнению с длиной волны), здесь B — амплитуда возвышения свободной поверхности, в общем случае не мала и ограничена сверху величиной $1/k$, $k(H-H^*) \gg 1$ (отсутствие тангенциального разрыва на границе сшивки) и $k(T/\rho g)^{1/2} \ll 1$ (пренебрежение капиллярностью, g — ускорение свободного падения).

В заключение автор выражает благодарность Е. И. Якубовичу за полезные обсуждения.

Поступила 24 II 1983

ЛИТЕРАТУРА

1. **Philips O. M.** Centrifugal waves.— J. Fluid Mech., 1960, vol. 7, N 3.
2. **Сунь Цао.** О волнах на поверхности жидкости под действием центробежной силы.— ПМТФ, 1960, № 3.
3. **Абрашкин А. А., Якубович Е. И.** Препринт ИПФ АН СССР, 1983, № 64.
4. **Ламб.** Гидродинамика. М.: Гостехиздат, 1932.
5. **Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В.** Теоретическая гидромеханика. Ч. 1. М.: Физматгиз, 1963.

УДК 539.529

О МОДЕЛИ ВСКИПАНИЯ ПСЕВДООЖИЖЕННОГО СЛОЯ ЧАСТИЦ

С. П. Киселев, В. М. Фомин

(*Новосибирск*)

Механизм вскипания псевдоожиженного слоя рассмотрен в [1]. Вследствие гидродинамической неустойчивости твердые частицы приобретают хаотическое движение, а в результате столкновений их друг с другом часть энергии хаотического движения переходит во вращение частиц. На вращающиеся частицы действует сила Магнуса, которая существенно увеличивает хаотическое движение и приводит к спонтанному вскипанию слоя. Для этого механизма характерно наличие минимального времени вскипания τ_γ, определяемого в основном временем развития гидродинамической неустойчивости. В данной работе показано, что, кроме спонтанного, существует индуцированный механизм вскипания слоя, который возникает вследствие создания хаоти-