

УДК 532.536

ВЛИЯНИЕ РЕЛАКСАЦИИ И ЗАПАЗДЫВАНИЯ НА ПЕРИСТАЛЬТИЧЕСКОЕ ДВИЖЕНИЕ ВЯЗКОУПРУГОЙ ЖИДКОСТИ ОЛДРОЙДА

Мохамед Х. Хароун

Университет Аин Шамс, Рокси, Каир, Египет

E-mail: aku333@yahoo.com

Исследуется влияние релаксации и запаздывания при перистальтическом движении несжимаемой вязкоупругой жидкости Олдройда посредством бесконечной последовательности синусоидальных волн, движущихся вдоль стенок двумерного эластичного канала. Решение методом возмущений получено для случая, когда соотношение амплитуда волны/половина ширины канала мало. Результаты расчетов показывают, что средняя осевая скорость вязкоупругой жидкости Олдройда меньше, чем в случае ньютоновской жидкости. Обсуждается явление обратного течения. Найдено, что критический градиент давления при оттоке жидкости понижается с увеличением времени запаздывания и растет с увеличением времени релаксации. Результаты расчетов представлены для различных значений физических параметров.

Ключевые слова: жидкость Олдройда, перистальтическое движение.

Введение. Слово “перистальтика” происходит от греческого “peristaltikos”, что означает сдавливание и сжатие. Перистальтическое движение жидкостей возникает в пищеводке, мочеточнике и нижнем отделе кишечника. Кроме того, перистальтическое накачивание появляется во многих практических применениях, включающих в себя биомеханические системы, такие как роликовые и плунжерный насосы. Математический анализ перистальтической прокачки в двумерной постановке был представлен в работе [1]. В [2] исследовалось решение методом возмущений для двумерного случая, в котором соотношение амплитуда волны/половина ширины канала мало. В работе [3] изучалось течение крови. В [4] авторы исследовали влияние моментных напряжений в перистальтическом движении жидкости. В [5, 6] изучалось перистальтическое движение суспензии частицы — жидкость. В работе [7] исследовалось перистальтическое движение сжимаемой вязкой жидкости в трубе конечных размеров. Авторы работы [8] исследовали периодические волны активации в неограниченной трубе.

Большая часть теоретических исследований выполнена для ньютоновских жидкостей, хотя известно, что большинство физиологических жидкостей ведут себя подобно неньютоновским жидкостям. В этой связи отметим, что имеется только очень ограниченная информация о движении неньютоновских жидкостей. Основная причина этого заключается в появлении дополнительных нелинейных членов в уравнениях движения, что делает проблему более трудной для решения. Другой причиной является то, что не существует универсального неньютоновского уравнения, которое можно было бы использовать для всех жидкостей и течений. Самые ранние исследования в этом направлении представлены в [9, 10]. Авторы изучали движение неупругой степенной жидкости и особой вязкоупругой жидкости дифференциального типа второго класса через трубу с синусоидальной волнистостью малой амплитуды вдоль оси. В [11] исследовалось перистальтическое течение

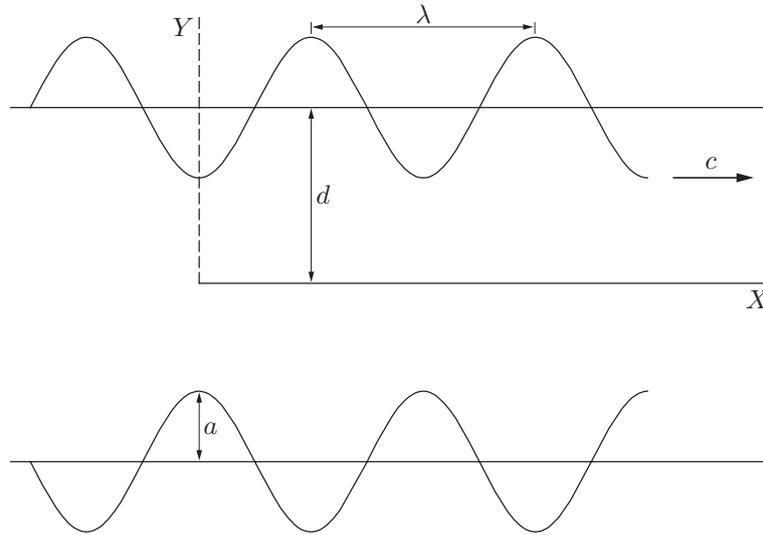


Рис. 1. Геометрия задачи

вязкоупругих жидкостей в предположении, что соответствующее число Рейнольдса достаточно мало, чтобы пренебречь силами инерции, и что отношение длины волны к высоте канала велико, а это означает, что давление по сечению постоянно. В работе [12] изучалось периодическое неустойчивое течение неньютоновской жидкости. Перистальтическое течение крови в малых сосудах исследовалось в [13] с использованием математической модели, в которой кровь рассматривалась как двухуровневая жидкость. В работе [14] рассматривалось перистальтическое течение реологически сложных физиологических жидкостей, которые моделировались неньютоновской (кассоновской) жидкостью в двумерном канале. Авторы работы [15] изучали влияние жидкости третьего порядка на перистальтическое движение в круглой цилиндрической трубе в предположении, что длина волны перистальтических волн велика по сравнению со средним радиусом трубы. В работе [16] изучено двумерное течение жидкости Джонсона — Сегальмана в плоском канале, у которого стенки смещаются поперек бесконечной гармонической бегущей волны большой длины.

В настоящей работе рассматривается перистальтическое движение вязкоупругой жидкости Олдройда при произвольных числах Рейнольдса. Подобная работа кажется важной и полезной, поскольку на изучение жидкости Олдройда едва ли обращалось внимание ранее. Кроме того, некоторые неньютоновские модели учитывают различие нормальных напряжений и эффекты разжижения/загустевания при сдвиге, но в них отсутствуют другие особенности, такие как релаксация напряжений. В своем анализе мы полагаем, что компоненты скорости и градиент давления можно представить в виде разложений в ряд по малому параметру. Учитывается нелинейность уравнений движения. Анализируется совместное влияние времени релаксации, запаздывания и материальных параметров жидкости. Когда вязкоупругие параметры стремятся к нулю, аналитические результаты сводятся к хорошо известному случаю ньютоновской жидкости и согласуются с [2].

Основные уравнения и постановка задачи. Рассмотрим двумерный канал постоянной ширины $2d$, наполненный несжимаемой вязкоупругой жидкостью Олдройда. Полагаем, что неограниченная серия волн движется со скоростью c вдоль стенок (рис. 1). Согласно Олдройду [17], уравнения для жидкости Олдройда-В следующие:

$$\Sigma = -PI + S; \tag{1}$$

$$S + \lambda_1 \left(\frac{dS}{dt} - LS - SL^T \right) = \mu \left(A_1 + \lambda_2 \left(\frac{dA_1}{dt} - LA_1 - A_1L^T \right) \right), \tag{2}$$

где Σ — тензор напряжения Коши; $-PI$ — сферическая часть напряжения вследствие несжимаемости; d/dt — материальная производная по времени; μ — вязкость; λ_1 и λ_2 — постоянные времени, соответствующие процессам релаксации и запаздывания. Предполагается, что $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq 0$. Тензоры L и A_1 определяются следующим образом:

$$L = \text{grad } \mathbf{V}, \quad A_1 = L + L^T. \quad (3)$$

Следует отметить, что данная модель включает вязкую жидкость Навье — Стокса в качестве особого случая при $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Далее, если $\lambda_2 = 0$, то этот случай сводится к жидкости Максвелла.

Уравнения неразрывности и количества движения для течения несжимаемой жидкости записываются в виде

$$\text{div } \mathbf{V} = 0; \quad (4)$$

$$\rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \text{div } \Sigma, \quad (5)$$

где ρ — плотность. Поле скорости для нестационарного двумерного течения можно записать как

$$\mathbf{V} = (u(x, y, t), v(x, y, t), 0). \quad (6)$$

Из уравнений (1)–(5) и (6) получаем

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0;$$

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial S_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial S_{xy}}{\partial y}; \quad (7)$$

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial S_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial S_{yy}}{\partial y}; \quad (8)$$

$$\begin{aligned} S_{xx} + \lambda_1 \left(\frac{\partial S_{xx}}{\partial t} + u \frac{\partial S_{xx}}{\partial x} + v \frac{\partial S_{xx}}{\partial y} - 2S_{xx} \frac{\partial u}{\partial x} - 2S_{xy} \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \\ = 2\mu \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \lambda_2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} + u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + v \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 - \frac{\partial u}{\partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right) \right]; \quad (9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{xy} + \lambda_1 \left(\frac{\partial S_{xy}}{\partial t} + u \frac{\partial S_{xy}}{\partial x} + v \frac{\partial S_{xy}}{\partial y} - S_{xy} \frac{\partial u}{\partial x} - S_{yy} \frac{\partial u}{\partial y} - S_{xx} \frac{\partial v}{\partial x} - S_{xy} \frac{\partial v}{\partial y} \right) = \\ = \mu \left[\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \lambda_2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial t \partial x} + \left(u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) - \right. \right. \\ \left. \left. - 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} - 2 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right]; \quad (10) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{yy} + \lambda_1 \left(\frac{\partial S_{yy}}{\partial t} + u \frac{\partial S_{yy}}{\partial x} + v \frac{\partial S_{yy}}{\partial y} - 2S_{xy} \frac{\partial v}{\partial x} - 2S_{yy} \frac{\partial v}{\partial y} \right) = \\ = 2\mu \left[\frac{\partial v}{\partial y} + \lambda_2 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial t \partial y} + u \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + v \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - 2 \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 - \frac{\partial v}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right) \right]. \quad (11) \end{aligned}$$

Обозначим вертикальные смещения верхней и нижней стенок как η и $-\eta$ соответственно. Геометрия поверхности стенки определяется в виде

$$\eta = a \cos(2\pi(x - ct)/\lambda), \quad (12)$$

где a — амплитуда, λ — длина волны, а c — скорость волны. Горизонтальное смещение принимается равным нулю. Таким образом, граничные условия для жидкости следующие:

$$y = \pm d \pm \eta: \quad u = 0, \quad v = \pm \frac{\partial \eta}{\partial t}. \quad (13)$$

Введем безразмерные переменные и параметры: $x^* = x/d$, $y^* = y/d$, $u^* = u/c$, $v^* = v/c$, $t^* = ct/d$, $p^* = p/(\rho c^2)$, $\eta^* = \eta/d$, $S_{xx}^* = dS_{xx}/(\mu c)$, $S_{xy}^* = dS_{xy}/(\mu c)$, $S_{yy}^* = dS_{yy}/(\mu c)$, $\varepsilon = a/d$ — безразмерная амплитуда, $\alpha = 2\pi d/\lambda$ — волновое число, $Re = cd\rho/\mu$ — число Рейнольдса, $w_1 = c\lambda_1/d$, $w_2 = c\lambda_2/d$ — числа Вайссенберга.

В терминах линии тока $\psi(x, y, t)$, после сокращения P и удаления звездочек из символов, уравнения (7)–(13) приобретают следующий вид:

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \psi + \psi_y \nabla^2 \psi_x - \psi_x \nabla^2 \psi_y = \frac{1}{R} [S_{xx,xy} + S_{xy,yy} - S_{xy,xx} - S_{yy,yx}]; \quad (14)$$

$$\begin{aligned} S_{xx} + w_1 [S_{xx,t} + \psi_y S_{xx,x} - \psi_x S_{xx,y} - 2\psi_{xy} S_{xx} - 2\psi_{yy} S_{xy}] = \\ = 2[\psi_{xy} + w_2 [\psi_{xyt} + \psi_y \psi_{yxx} - \psi_x \psi_{xyy} - 2\psi_{xy}^2 - \psi_{yy}(\psi_{yy} - \psi_{xx})]]; \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} S_{xy} + w_1 [S_{xy,t} + \psi_y S_{xy,x} - \psi_x S_{xy,y} - \psi_{yy} S_{yy} + \psi_{xx} S_{xx}] = \\ = 2w_2 \psi_{xy} \nabla^2 \psi + \left(1 + w_2 \left(\frac{\partial}{\partial t} + \psi_y \frac{\partial}{\partial x} - \psi_x \frac{\partial}{\partial y}\right)\right) (\psi_{yy} - \psi_{xx}); \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} S_{yy} + w_1 [S_{yy,t} + \psi_y S_{yy,x} - \psi_x S_{yy,y} + 2\psi_{xx} S_{xy} + 2\psi_{xy} S_{yy}] = \\ = -2[\psi_{xy} + w_2 [\psi_{xyt} + \psi_y \psi_{xxy} - \psi_x \psi_{xyy} + 2\psi_{xy}^2 - \psi_{xx}(\psi_{yy} - \psi_{xx})]]; \end{aligned} \quad (17)$$

$$\eta = \varepsilon \cos(\alpha(x - t));$$

$$y = \pm 1 \pm \eta: \quad \psi_y = 0, \quad \psi_x = \mp \alpha \varepsilon \sin(\alpha(x - t)), \quad (18)$$

где ∇^2 означает оператор Лапласа, а нижние индексы — частное дифференцирование.

Метод решения. Получим решение для функции тока в виде разложения в ряд по малому параметру ε , представляя ψ , S_{xx} , S_{xy} , S_{yy} и dp/dx следующим образом:

$$\psi = \psi_0 + \varepsilon \psi_1 + \varepsilon^2 \psi_2 + \dots; \quad (19)$$

$$\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) = \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_0 + \varepsilon \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_1 + \varepsilon^2 \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_2 + \dots; \quad (20)$$

$$S_{xx} = S_{xx0} + \varepsilon S_{xx1} + \varepsilon^2 S_{xx2} + \dots; \quad (21)$$

$$S_{xy} = S_{xy0} + \varepsilon S_{xy1} + \varepsilon^2 S_{xy2} + \dots; \quad (22)$$

$$S_{yy} = S_{yy0} + \varepsilon S_{yy1} + \varepsilon^2 S_{yy2} + \dots. \quad (23)$$

Первый член правой части уравнения (20) соответствует градиенту давления, связанному с основным течением, а другие члены соответствуют перистальтическому движению. Подставляя уравнения (19)–(23) в уравнения (14)–(17) и (18) и группируя члены с одинаковыми степенями ε , получим три системы связанных дифференциальных уравнений с соответствующими граничными условиями в ε_0 , ε_1 и ε_2 . Первая система дифференциальных уравнений в ε_0 , при условии стационарности параллельного течения и поперечной симметрии, для постоянного градиента давления в направлении x дает

$$\psi_0 = K \left[y - \frac{y^3}{3} \right], \quad K = -\frac{R}{2} \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right)_0. \quad (24)$$

Последнее решение (24) согласуется с работой [2], что означает, что течение этого порядка не зависит от вязкоупругих параметров. Вторая и третья системы дифференциальных уравнений в ψ_1 и ψ_2 с соответствующими граничными условиями сводятся к соотношениям:

$$\psi_1(x, y, t) = (\varphi_1(y) e^{i\alpha(x-t)} + \varphi_1^*(y) e^{-i\alpha(x-t)})/2; \quad (25)$$

$$S_{xx1}(x, y, t) = (\varphi_2(y) e^{i\alpha(x-t)} + \varphi_2^*(y) e^{-i\alpha(x-t)})/2; \quad (26)$$

$$S_{xy1}(x, y, t) = (\varphi_3(y) e^{i\alpha(x-t)} + \varphi_3^*(y) e^{-i\alpha(x-t)})/2; \quad (27)$$

$$S_{yy1}(x, y, t) = (\varphi_4(y) e^{i\alpha(x-t)} + \varphi_4^*(y) e^{-i\alpha(x-t)})/2; \quad (28)$$

$$\psi_2(x, y, t) = (\varphi_{20}(y) + \varphi_{22}(y) e^{2i\alpha(x-t)} + \varphi_{22}^*(y) e^{-2i\alpha(x-t)})/2; \quad (29)$$

$$S_{xx2}(x, y, t) = (\varphi_{30}(y) + \varphi_{33}(y) e^{2i\alpha(x-t)} + \varphi_{33}^*(y) e^{-2i\alpha(x-t)})/2; \quad (30)$$

$$S_{xy2}(x, y, t) = (\varphi_{40}(y) + \varphi_{44}(y) e^{2i\alpha(x-t)} + \varphi_{44}^*(y) e^{-2i\alpha(x-t)})/2; \quad (31)$$

$$S_{yy2}(x, y, t) = (\varphi_{50}(y) + \varphi_{55}(y) e^{2i\alpha(x-t)} + \varphi_{55}^*(y) e^{-2i\alpha(x-t)})/2, \quad (32)$$

где звездочка обозначает комплексное сопряжение. Подставляя (25)–(32) в дифференциальные уравнения и соответствующие граничные условия в ψ_1 и ψ_2 , получаем три системы связанных линейных дифференциальных уравнений с соответствующими граничными условиями. Этих уравнений достаточно, чтобы найти решения вплоть до второго порядка по ε . Но эти уравнения являются обычными дифференциальными уравнениями четвертого порядка с переменными коэффициентами, граничные условия неоднородны, и проблема не является задачей на собственные значения. Однако можно свести исследование к случаю свободной прокачки. Физически это означает, что жидкость стационарна при отсутствии перистальтических волн. Тогда $(dp/dx)_0 = 0$, что означает $K = 0$, и в этом предположении получаем:

$$i\alpha R(\varphi_1'' - \alpha^2 \varphi_1) = i\alpha \varphi_4' - i\alpha \varphi_2' - \varphi_3'' - \alpha^2 \varphi_3; \quad (33)$$

$$(1 - i\alpha w_1)\varphi_2 = 2i\alpha(1 - i\alpha w_2)\varphi_1'; \quad (34)$$

$$(1 - i\alpha w_1)\varphi_3 - \alpha^2(1 + i\alpha w_2)\varphi_1 = (1 - i\alpha w_2)\varphi_1''; \quad (35)$$

$$(1 - i\alpha w_1)\varphi_4 = -2i\alpha(1 - i\alpha w_2)\varphi_1', \quad (36)$$

где

$$\varphi_1(\pm 1) = \pm 1, \quad \varphi_1'(\pm 1) = 0$$

и

$$\varphi_{40}'' = i\alpha R(\varphi_1^* \varphi_1'' - \varphi_1 \varphi_1^{*''})'/2; \quad (37)$$

$$\begin{aligned} \varphi_{30} = & -i\alpha w_1(\varphi_1^* \varphi_2 - \varphi_1 \varphi_2^*)'/2 - 2w_2(\alpha^2(\varphi_1 \varphi_1^{*''} + \varphi_1'' \varphi_1^*) + \varphi_1'' \varphi_1^{*''} + 3\alpha^2 \varphi_1' \varphi_1^*) - \\ & - w_1(\varphi_3 \varphi_1^{*''} + \varphi_3^* \varphi_1'') + i\alpha w_1(\varphi_1' \varphi_2^* - \varphi_2 \varphi_1'^*); \end{aligned} \quad (38)$$

$$\begin{aligned} \varphi_{40} = & w_1(\varphi_1'' \varphi_4^* + \varphi_1^{*''} \varphi_4)/2 + \alpha^2 w_1(\varphi_1 \varphi_2^* + \varphi_2 \varphi_1^*)/2 + i\alpha^3 w_2(\varphi_1 \varphi_1^* - \varphi_1' \varphi_1'^*) + \varphi_{20}'' - \\ & - i\alpha w_2(\varphi_1 \varphi_1^{*''} - \varphi_1^* \varphi_1'')'/2 - i\alpha w_1(\varphi_3 \varphi_1^* - \varphi_1' \varphi_3^*)'/2; \end{aligned} \quad (39)$$

$$\begin{aligned} \varphi_{50} = & i\alpha w_1(\varphi_4 \varphi_1^* - \varphi_4^* \varphi_1)/2 + \alpha^2 w_2(\varphi_1 \varphi_1^* + \varphi_1^* \varphi_1')' + \alpha^2 w_1(\varphi_1 \varphi_3^* - \varphi_1^* \varphi_3) - \\ & - 4\alpha^2 w_2 \varphi_1' \varphi_1^* - \alpha^2 w_2(\varphi_1 \varphi_1^{*''} + \varphi_1^* \varphi_1'' + 2\alpha^2 \varphi_1 \varphi_1^*), \end{aligned} \quad (40)$$

где

$$\varphi'_{20}(\pm 1) = \mp(\varphi''_1(\pm 1) + \varphi^{*''}_1(\pm 1))/2, \quad (41)$$

и

$$\begin{aligned} 4\alpha R(\varphi''_{22} - 4\alpha^2\varphi_{22}) &= \alpha R\varphi'_1\varphi''_1 - \alpha R\varphi_1\varphi'''_1 - 4\alpha\varphi'_{33} + 2i\varphi''_{44} + 8i\alpha^2\varphi_{44} + 4\alpha\varphi'_{55}, \\ (1 - 2i\alpha w_1)\varphi_{33} &= i\alpha w_1(\varphi_1\varphi'_2 + \varphi'_1\varphi_2)/2 - w_1\varphi_3\varphi''_1 + \alpha^2 w_2\varphi_1'^2 - w_2\varphi_1''^2 + 4i\alpha(1 - 2i\alpha w_2)\varphi'_{22}, \\ (1 - 2i\alpha w_1)\varphi_{44} &= -i\alpha w_2(\varphi_1\varphi'''_1 - 3\varphi'_1\varphi''_1)/2 - i\alpha^3 w_2\varphi_1\varphi'_1 - 4i\alpha(i\alpha + 2\alpha^2 w_2)\varphi_{22} + \\ &\quad + i\alpha w_1(\varphi_1\varphi'_3 - \varphi'_1\varphi_3)/2 + w_1(\varphi''_1\varphi_4 + \alpha^2\varphi_1\varphi_2)/2 + (1 - 2i\alpha w_2)\varphi''_{22}, \\ (1 - 2i\alpha w_1)\varphi_{55} &= i\alpha w_1(\varphi_1\varphi'_4 - 3\varphi'_1\varphi_4)/2 + \alpha^2 w_1\varphi_1\varphi_3 - 4i\alpha\varphi'_{22} + 3\alpha^2 w_2\varphi_1'^2 - \\ &\quad - 2\alpha^2 w_2\varphi_1\varphi''_1 - \alpha^4 w_2\varphi_1^2 - 8\alpha^2 w_2\varphi'_{22}, \end{aligned}$$

где

$$\varphi_{22}(\pm 1) = \mp\varphi'_1(\pm 1)/4, \quad \varphi'_{22}(\pm 1) = \mp\varphi''_1(\pm 1)/2.$$

Здесь штрих означает производную по y . Решения уравнений (33)–(36) таковы:

$$\begin{aligned} \varphi_1(y) &= A_1 \operatorname{sh}(\alpha y) + B_1 \operatorname{sh}(\beta y), & \varphi_2(y) &= A_2 \operatorname{ch}(\alpha y) + B_2 \operatorname{ch}(\beta y), \\ \varphi_3(y) &= A_3 \operatorname{sh}(\alpha y) + B_3 \operatorname{sh}(\beta y), & \varphi_4(y) &= -A_2 \operatorname{ch}(\alpha y) - B_2 \operatorname{ch}(\beta y), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} A_1 &= -\beta \operatorname{ch} \beta / (\alpha \operatorname{ch} \alpha \operatorname{sh} \beta - \beta \operatorname{ch} \beta \operatorname{sh} \alpha), & B_1 &= \alpha \operatorname{ch} \alpha / (\alpha \operatorname{ch} \alpha \operatorname{sh} \beta - \beta \operatorname{ch} \beta \operatorname{sh} \alpha), \\ A_2 &= 2i\alpha^2 \Gamma A_1, & B_2 &= 2i\alpha \beta \Gamma B_1, \\ A_3 &= 2\alpha^2 \Gamma A_1, & B_3 &= \Gamma(\alpha^2 + \beta^2) B_1, \\ \beta^2 &= \alpha^2 - i\alpha R / \Gamma, & \Gamma &= (1 + \alpha^2 w_1 w_2 + i\alpha(w_1 - w_2)) / (1 + \alpha^2 w_1^2). \end{aligned}$$

Далее, в выражении для ψ_2 рассмотрим только члены $\varphi'_{20}(y)$, так как наша цель — определить среднее течение. Таким образом, дифференциальные уравнения (37)–(40) с граничным условием (41) дают выражение

$$\varphi'_{20}(y) = F(y) - F(1) + D - C_1(1 - y^2),$$

где

$$\begin{aligned} D &= \varphi'_{20}(\pm 1) = -[\alpha^2(A_1 + A_1^*) \operatorname{sh} \alpha + \beta^2 B_1 \operatorname{sh} \beta + \beta^{*2} B_1^* \operatorname{sh} \beta^*] / 2, \\ F(y) &= s_1 \operatorname{ch}((\alpha + \beta^*)y) + s_2 \operatorname{ch}((\alpha - \beta^*)y) + s_3 \operatorname{ch}((\alpha + \beta)y) + s_4 \operatorname{ch}((\alpha - \beta)y) + \\ &\quad + s_5 \operatorname{ch}((\beta + \beta^*)y) + s_6 \operatorname{ch}((\beta - \beta^*)y) + s_7 \operatorname{ch}(2\alpha y), \\ s_1 &= i\alpha R(\alpha - \beta^*)A_1 B_1^* / (4(\alpha + \beta^*)) - i\alpha w_1(A_1 B_3^* - A_3 B_1^*) / 4 + \\ &\quad + w_1(\beta^* - \alpha)A_2 B_1^* / 4 + i\alpha w_2(\beta^* - \alpha)^2 A_1 B_1^* / 4, \\ s_2 &= -i\alpha R(\alpha + \beta^*)A_1 B_1^* / (4(\alpha - \beta^*)) + i\alpha w_1(A_1 B_3^* - A_3 B_1^*) / 4 + \\ &\quad + w_1(\beta^* + \alpha)A_2 B_1^* / 4 - i\alpha w_2(\beta^* + \alpha)^2 A_1 B_1^* / 4, \\ s_3 &= -i\alpha R(\alpha - \beta)A_1 B_1^* / (4(\alpha + \beta)) + i\alpha w_1(B_3 A_1^* - B_1 A_3^*) / 4 + \\ &\quad + w_1(\beta - \alpha)B_1 A_2^* / 4 - i\alpha w_2(\beta - \alpha)^2 B_1 A_1^* / 4, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
s_4 &= i\alpha R(\alpha + \beta)A_1B_1^*/(4(\alpha - \beta)) + i\alpha w_1(B_1A_3^* - B_3A_1^*)/4 + \\
&\quad + w_1(\beta + \alpha)B_1A_2^*/4 - i\alpha w_2(\beta + \alpha)^2B_1A_1^*/4, \\
s_5 &= -i\alpha R(\beta^* - \beta)B_1B_1^*/(4(\beta^* + \beta)) + i\alpha w_1(B_3B_1^* - B_1B_3^*)/4 + w_1(\beta^2 - \alpha^2)B_1B_2^*/(4(\beta^* + \beta)) + \\
&\quad + w_1(\beta^{*2} - \alpha^2)B_2B_1^*/(4(\beta^* + \beta)) + i\alpha w_2(\beta - \beta^*)(2\alpha^2 - \beta^2 - \beta^{*2})B_1B_1^*/(4(\beta^* + \beta)), \\
s_6 &= i\alpha R(\beta^* + \beta)B_1B_1^*/(4(\beta^* - \beta)) - i\alpha w_1(B_3B_1^* - B_1B_3^*)/4 + w_1(\beta^2 - \alpha^2)B_1B_2^*/(4(\beta^* - \beta)) + \\
&\quad + w_1(\beta^{*2} - \alpha^2)B_2B_1^*/(4(\beta^* - \beta)) + i\alpha w_2(\beta + \beta^*)(2\alpha^2 - \beta^2 - \beta^{*2})B_1B_1^*/(4(\beta^* - \beta)), \\
s_7 &= i\alpha w_1(A_3A_1^* - A_1A_3^*)/4.
\end{aligned}$$

Таким образом, видно, что одна константа C_1 остается произвольной. Подставляя уравнения (19)–(23) в (7) в предположении $K = 0$, получаем, что

$$C_1 = R\left(\frac{\partial \bar{p}}{\partial x}\right)_2.$$

Это также означает, что среднюю по времени скорость можно записать в виде

$$\bar{u}(y) = \frac{\varepsilon^2}{2} \varphi'_{20}(y) = \frac{\varepsilon^2}{2} \left(F(y) - F(1) + D - R\left(\frac{\partial \bar{p}}{\partial x}\right)_2 (1 - y^2) \right). \quad (42)$$

Заметим, что если числа Вейссенберга w_1 и w_2 равны нулю, то результат решения задачи сводится к решению [2] для ньютоновской жидкости.

Численные результаты и обсуждение. Задача перистальтического движения вязкоупругой жидкости Олдройда зависит от вязкоупругих параметров, волнового числа, числа Рейнольдса и осредненного по времени градиента давления второго порядка. В этом разделе средняя скорость на границах канала, функция возмущений средней скорости, осредненное по времени распределение аксиальной скорости и обратное течение рассчитываются для разных значений этих параметров в случае свободной прокачки. Численные расчеты на основе уравнения (42) показывают, что средняя осевая скорость жидкости в случае перистальтического движения определяется постоянной D , параболическим членом $-R(\partial \bar{p}/\partial x)_2(1 - y^2)$ и возмущающим членом $F(y) - F(1)$. Постоянная D , которая изначально возникает из условия неприлипания на стенке, обусловлена величиной φ'_{20} на границе и связана со средней скоростью на границах канала соотношением $\bar{u}(\pm) = \varepsilon^2 \varphi'_{20}(\pm)/2 = \varepsilon^2 D/2$. Параболический член $-R(\partial \bar{p}/\partial x)_2(1 - y^2)$ является отрицательным для положительного градиента давления, и наоборот. Возмущающий член $F(y) - F(1)$ отрицателен и пропорционален $\alpha^2 R^2$. Определим функцию возмущения средней скорости $G(y)$, как и в [2], в виде

$$G(y) = -200(F(y) - F(1))/(\alpha^2 R^2).$$

В результате получим

$$\bar{u}(y) = \frac{\varepsilon^2}{2} \left(D - R\left(\frac{\partial \bar{p}}{\partial x}\right)_2 (1 - y^2) - \frac{\alpha^2 R^2}{200} G(y) \right). \quad (43)$$

На рис. 2 и 3 представлена зависимость $D(\alpha)$ при разных значениях чисел Вейссенберга w_1 и w_2 . Численные результаты показывают, что величина D уменьшается с ростом w_1 и растет с увеличением w_2 и α . Зависимость $G(y)$ при различных значениях w_1 и w_2 показана на рис. 4 и 5. Видно, что значение G уменьшается с ростом w_1 и растет с увеличением w_2 . Обратное течение возникает всякий раз, когда средняя скорость потока отрицательна. Поскольку $\bar{u}(\pm) = \varepsilon^2 D/2$, а величина D всегда положительна в случае чистой перистальтики, обратное течение никогда не возникнет на границах. Тем не менее из

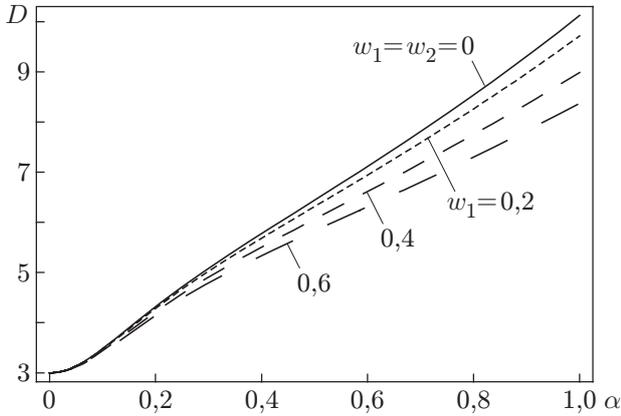


Рис. 2

Рис. 2. Влияние вязкоупругого параметра w_1 на зависимость $D(\alpha)$ при $w_2 = 0,1$ и $R = 100$

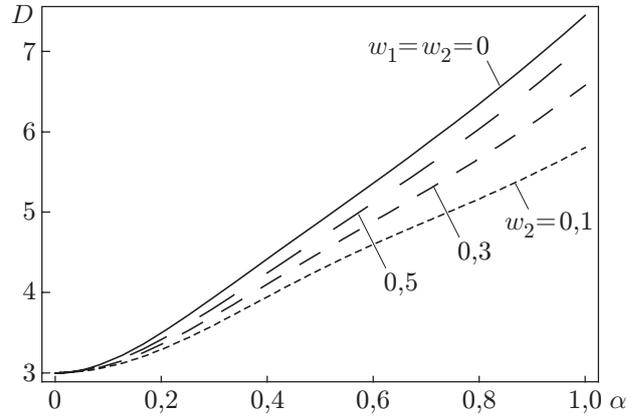


Рис. 3

Рис. 3. Влияние вязкоупругого параметра w_2 на зависимость $D(\alpha)$ при $w_1 = 0,8$ и $R = 50$

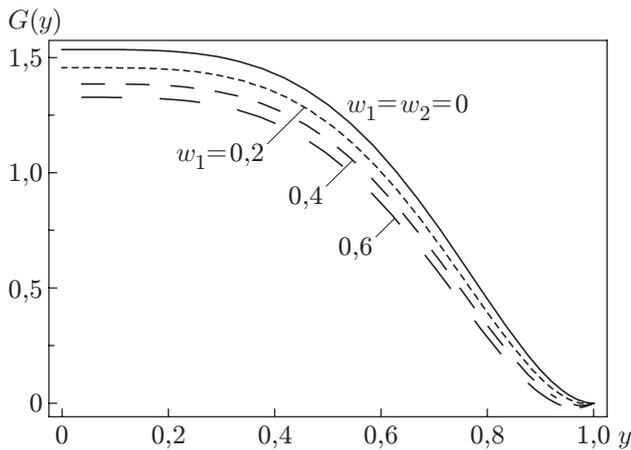


Рис. 4

Рис. 4. Влияние вязкоупругого параметра w_1 на функцию возмущения средней скорости $G(y)$ при $w_2 = 0,1$, $w_2 = 0,01$ и $R = 100$

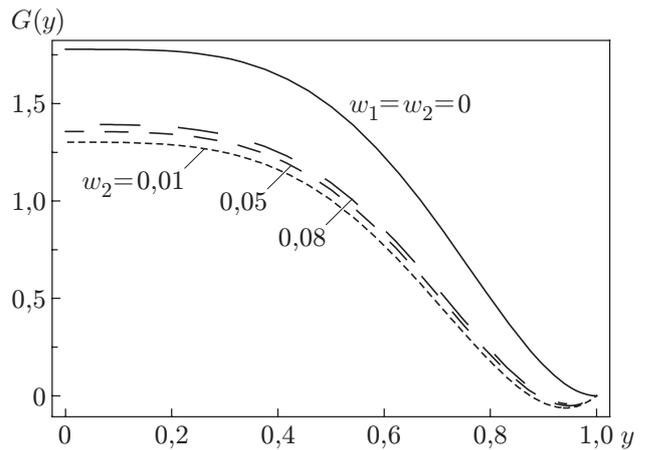


Рис. 5

Рис. 5. Влияние вязкоупругого параметра w_2 на функцию возмущения средней скорости $G(y)$ при $w_2 = 0,1$, $w_1 = 0,5$ и $R = 50$

уравнения (43) следует, что если положить $\bar{u}(y) = 0$ на оси $y = 0$, то критическое условие, соответствующее появлению обратного течения, дается соотношением

$$\left(\frac{\partial \bar{p}}{\partial x}\right)_{2,cr} = \frac{1}{R} \left(D - \frac{\alpha^2 R^2}{200} G(0) \right).$$

Обратное течение возникает, когда $(\partial \bar{p} / \partial x)_2 > (\partial \bar{p} / \partial x)_{2,cr}$. На рис. 6 и 7 представлена зависимость $(\partial \bar{p} / \partial x)_{2,cr}$ от α для различных значений w_1 и w_2 . Результаты расчетов показывают, что $(\partial \bar{p} / \partial x)_{2,cr}$ уменьшается с ростом w_2 и растет с увеличением w_1 . Найденное решение нулевого порядка идентично решению для ньютоновского случая. В этом случае числа Вайссенберга влияют только на S_{xx0} . Решения более высокого порядка изучались для того, чтобы исследовать влияние неньютоновского поведения на перистальтические волны. Показано, что решение второго порядка сильно зависит от чисел Вайссенберга.

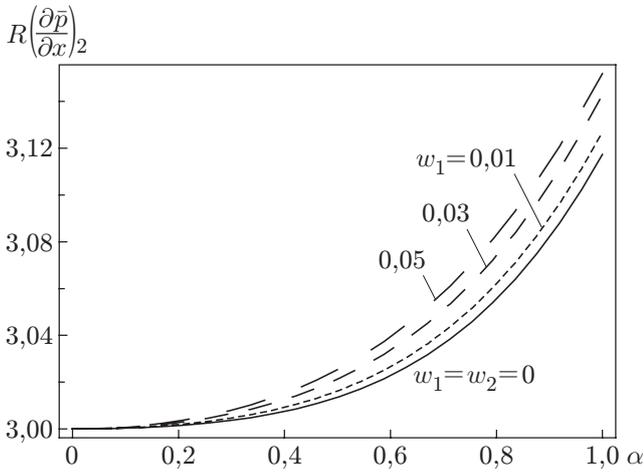


Рис. 6

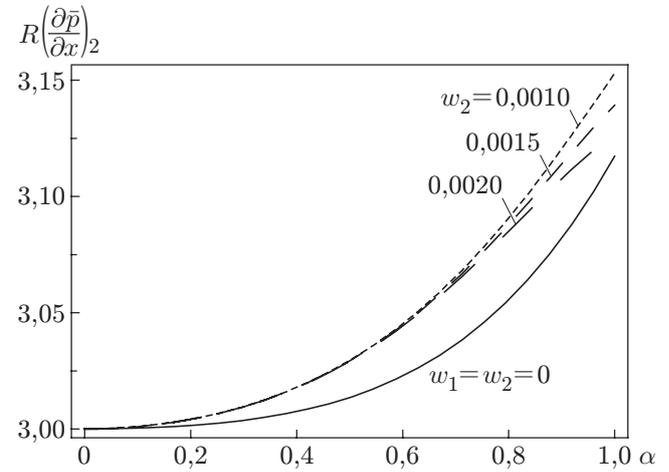


Рис. 7

Рис. 6. Влияние вязкоупругого параметра w_1 на зависимость критического градиента давления от волнового числа α при $w_2 = 0,001$ и $R = 10$

Рис. 7. Влияние вязкоупругого параметра w_2 на зависимость критического градиента давления от волнового числа α при $w_1 = 0,08$ и $R = 10$

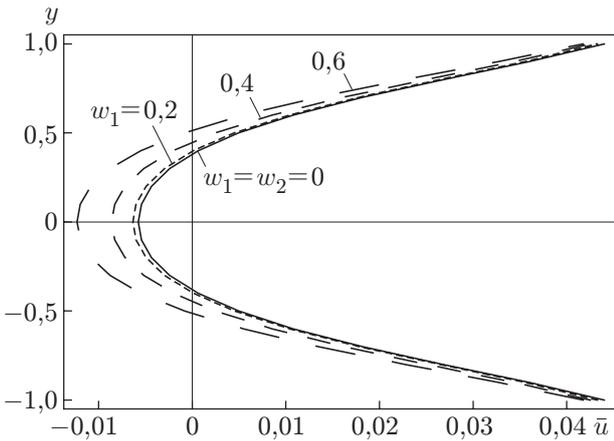


Рис. 8

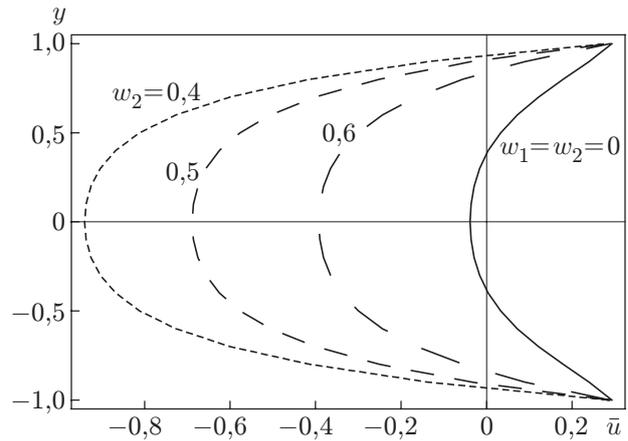


Рис. 9

Рис. 8. Влияние вязкоупругого параметра w_1 на распределение средней скорости и обратного потока при $(\partial \bar{p} / \partial x)_2 = 0,04$, $w_2 = 0,01$, $\alpha = 0,2$, $\varepsilon = 0,15$ и $R = 75$

Рис. 9. Влияние вязкоупругого параметра w_2 на распределение средней скорости и обратного потока при $(\partial \bar{p} / \partial x)_2 = 0,04$, $w_1 = 0,8$, $\alpha = 0,2$, $\varepsilon = 0,15$ и $R = 75$

Влияние чисел Вайссенберга w_1 и w_2 на среднюю скорость и обратное течение показано на рис. 8 и 9. Видно, что скорость обратного течения растет вместе с w_1 и уменьшается с ростом w_2 .

ЛИТЕРАТУРА

1. **Latham T. W.** Fluid motion in a peristaltic pump: M. S. Thes. Mass. In-t technol., Cambridge, Mass., 1966.
2. **Fung Y. C., Yih C. S.** Peristaltic transport // Trans. ASME. J. Appl. Mech. 1968. V. 35. P. 669–675.
3. **Srivastava L. M., Srivastava V. P.** Peristaltic transport of blood: Casson model II // J. Biomechanics. 1984. V. 17. P. 821–829.
4. **El-Shehawey E. F., Mekheimer K. S.** Couple-stresses in peristaltic transport of fluids // J. Phys. D: Appl. Phys. 1994. V. 27. P. 1163–1170.
5. **Srivastava L. M., Srivastava V. P.** Peristaltic transport of a particle-fluid suspension // J. Biomech. Engng. 1989. V. 111. P. 157–165.
6. **Saxena M. A., Srivastava V. P.** Particulate suspension flow induced by sinusoidal peristaltic waves // Japn. J. Appl. Phys. 1997. V. 36. P. 385.
7. **Antanovskii L. K., Ramkisson H.** Long-wave peristaltic transport of a compressible viscous fluid in a finite pipe subject to a time-dependent pressure drop // J. Fluid Dynamics Res. 1997. V. 19. P. 115–123.
8. **Carew E. O., Pedley T. J.** An active membrane model for peristaltic pumping. Pt I. Periodic activation waves in an infinite tube // ASME. J. Biomech. Engng. 1997. V. 119. P. 66–76.
9. **Raju K. K., Devanathan R.** Peristaltic motion of a non-Newtonian fluid // Rheol. Acta. 1972. V. 11. P. 170–178.
10. **Raju K. K., Devanathan R.** Peristaltic motion of a non-Newtonian fluid II: Visco-elastic fluid // Rheol. Acta. 1974. V. 13. P. 944–948.
11. **Bohme G., Friedrich R.** Peristaltic flow of viscoelastic liquids // J. Fluid Mech. 1983. V. 128. P. 109–122.
12. **Hayat T., Asghar S., Siddiqui A. M.** Periodic unsteady flows of a non-Newtonian fluid // Acta Mech. 1998. V. 131. P. 169.
13. **Misra J. C., Pandey S. K.** Peristaltic transport of blood in small vessels: Study of a mathematical model // Computers and Math. with Applications. 2002. V. 43. P. 1183–1193.
14. **Mernone A. V., Lucas S. K., Mazumdar J. N.** A mathematical study of peristaltic transport of a Casson fluid // Math. and Comput. Modelling. 2002. V. 35. P. 895–912.
15. **Hayat T., Wang Y., Siddiqui A. M., et al.** Peristaltic transport of a third-order fluid in a circular cylindrical tube // Math. Models and Methods in Appl. Sci. 2002. V. 12. P. 1691–1706.
16. **Hayat T., Wang Y., Siddiqui A. M., et al.** Peristaltic transport of a Johnson — Segalman fluid in a planar channel // Math. Probl. Engng. 2003. V. 1. P. 1–23.
17. **Oldroyd J. G.** On the formulation of rheological equations of state // Proc. Roy. Soc. Lond. 1950. V. A200. P. 523–541.

*Поступила в редакцию 18/XI 2004 г.,
в окончательном варианте — 10/I 2005 г.*