УДК 539.375

ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ФУНКЦИОНАЛА ЭНЕРГИИ В ЗАДАЧЕ О РАВНОВЕСИИ ПЛАСТИНЫ ТИМОШЕНКО, СОДЕРЖАЩЕЙ ТРЕЩИНУ

Н. П. Лазарев

Научно-исследовательский институт математики при Северо-Восточном федеральном университете им. М. К. Аммосова, 677000 Якутск
Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск
E-mail: nyurgun@ngs.ru

Рассматривается вариационная постановка задачи о равновесии пластины Тимошенко, содержащей вертикальную плоскую трещину. На берегах трещины заданы условия непроникания, которые имеют вид неравенств (условия типа условий Синьорини). Анализируется поведение решения и соответствующего функционала энергии пластины в зависимости от вариации длины трещины. Получена формула для производной функционала энергии по длине трещины. Установлена непрерывная зависимость решений от параметра, характеризующего длину трещины.

Ключевые слова: трещина, вариационное неравенство, пластина Тимошенко, функционал энергии, производная функционала энергии.

Введение. В математической теории трещин производная функционала энергии по длине трещины используется в формулировках критериев разрушения [1, 2]. Согласно критерию Гриффитса развитие трещины начинается в тот момент, когда производная функционала энергии по длине трещины достигает критической величины 2γ, зависящей от физико-механических свойств материала. Исследование асимптотики решений вблизи вершин трещин, асимптотики функционалов энергии и инвариантных интегралов в линейных задачах проведено во многих работах (см., например, [1–4]). Аналогичные исследования для тел и пластин Кирхгофа — Лява с нелинейным условием взаимного непроникания берегов трещины выполнены в [5–9]. В работах [8–10] изучены свойства моделей математической теории трещин с условиями в виде неравенств на границе. Методы численной реализации задач математической теории трещин с условием непроникания изложены в [11, 12]. В работе [11] для плоской задачи теории упругости с использованием производных функционала энергии и в соответствии с критерием разрушения Гриффитса построена модель квазистатического роста трещины. При этом рассмотрены линеаризованная и нелинейная задачи при условиях непроникания берегов трещины.

В настоящей работе исследуется двумерная модель упругой изотропной пластины Тимошенко, на которой имеется плоская вертикальная трещина. На внутренней границе области с разрезом заданы условия в виде неравенств, описывающие взаимное непроникание противоположных берегов трещины. Рассматривается семейство вариационных задач о равновесии пластины, зависящих от параметра δ, описывающего возмущение длины трещины. Найдена производная функционала энергии пластины по параметру δ.

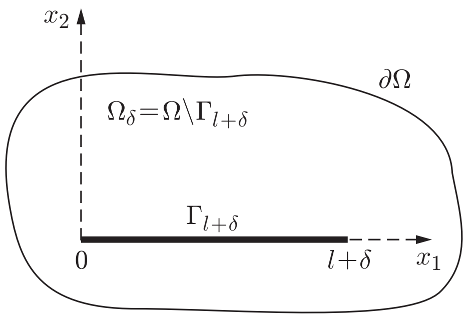

Схема задачи

1. Вариационная задача о равновесии пластины Тимошенко, содержащей трещину. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ — ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega$. Обозначим через $\Gamma_{l+\delta}$ множество $\{(x_1, x_2)\colon 0 < x_1 < l+\delta,\ x_2 = 0\}$, $\delta \in [-\delta_0, \delta_0]$, $l > \delta_0 > 0$. Будем считать, что $\Gamma_{l+\delta_0} \subset \Omega$. Параметр δ описывает возмущение трещины. При каждом фиксированном $\delta \in [-\delta_0, \delta_0]$ срединная поверхность пластины занимает область $\Omega_\delta = \Omega \setminus \overline{\Gamma}_{l+\delta}$. Область $\Omega_0 = \Omega \setminus \overline{\Gamma}_l$ соответствует невозмущенной трещине. Толщина пластины считается постоянной и равной $2h$. Срединная поверхность пластины находится в плоскости $z = 0$, система координат (x_1, x_2, z) является декартовой (см. рисунок).

Предположим, что пластина содержит вертикальную трещину, которая в срединной плоскости описывается кривой $\Gamma_{l+\delta}$. Это означает, что поверхность трещины можно задать соотношениями $(x_1, x_2) \in \Gamma_{l+\delta}$, $-h \leqslant z \leqslant h$, где $|z|$ — расстояние до срединной поверхности пластины. Обозначим через $\boldsymbol{\chi} = \boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{W}, w)$ вектор перемещений точек срединной поверхности, $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)$ ($\boldsymbol{W} = (w^1, w^2)$ и w — горизонтальные и вертикальные перемещения соответственно). Углы поворота нормальных сечений обозначим через $\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}) = (\varphi^1, \varphi^2)$. В соответствии с направлением оси x_2 имеются положительный $\Gamma^+_{l+\delta}$ и отрицательный $\Gamma^-_{l+\delta}$ берега. В случае, когда след функции v выбирается на положительном берегу, используется обозначение $v^+ = v\big|_{\Gamma^+_{l+\delta}}$, на отрицательном берегу — обозначение $v^- = v\big|_{\Gamma^-_{l+\delta}}$. Скачок функции на $\Gamma_{l+\delta}$ обозначим через $[v] = v^+ - v^-$.

Введем тензоры $\alpha(\boldsymbol{\varphi}) = \{\alpha_{ij}(\boldsymbol{\varphi})\}$, $\varepsilon(\boldsymbol{W}) = \{\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{W})\}$, $i = 1, 2$, $j = 1, 2$, описывающие деформацию пластины:

$$\alpha_{ij}(\boldsymbol{\varphi}) = \frac{1}{2}\,(\varphi,^i_j + \varphi,^j_i), \quad \varepsilon_{ij}(\boldsymbol{W}) = \frac{1}{2}\,(w,^i_j + w,^j_i), \quad i = 1, 2,\ j = 1, 2, \quad v,_i = \frac{\partial v}{\partial x_i},$$

а также тензор моментов $m(\boldsymbol{\varphi}) = \{m_{ij}(\boldsymbol{\varphi})\}$, $i = 1, 2$, $j = 1, 2$:

$$m_{11}(\boldsymbol{\varphi}) = D(\alpha_{11}(\boldsymbol{\varphi}) + k\alpha_{22}(\boldsymbol{\varphi})), \qquad m_{22}(\boldsymbol{\varphi}) = D(\alpha_{22}(\boldsymbol{\varphi}) + k\alpha_{11}(\boldsymbol{\varphi})),$$

$$m_{12}(\boldsymbol{\varphi}) = m_{21}(\boldsymbol{\varphi}) = D(1-k)\alpha_{12}(\boldsymbol{\varphi}), \quad D = \text{const}, \quad k = \text{const}, \quad D > 0, \quad 0 < k < 1/2$$

(D — цилиндрическая жесткость пластины; k — коэффициент Пуассона). Аналогично определим тензор усилий $\sigma(\boldsymbol{W}) = \{\sigma_{ij}(\boldsymbol{W})\}$, $i = 1, 2$, $j = 1, 2$:

$$\sigma_{11}(\boldsymbol{W}) = \frac{3D}{h^2}\,(\varepsilon_{11}(\boldsymbol{W}) + k\varepsilon_{22}(\boldsymbol{W})), \qquad \sigma_{22}(\boldsymbol{W}) = \frac{3D}{h^2}\,(\varepsilon_{22}(\boldsymbol{W}) + k\varepsilon_{11}(\boldsymbol{W})),$$

$$\sigma_{12}(\boldsymbol{W}) = \sigma_{21}(\boldsymbol{W}) = \frac{3D}{h^2}\,(1-k)\varepsilon_{12}(\boldsymbol{W}).$$

Поперечные силы определим следующим образом:

$$q_i = q_i(w, \varphi) = J(w,_i + \varphi^i), \qquad i = 1, 2.$$

Здесь $J = 3D\varkappa^2(1-k)/(2h^2)$; $\varkappa^2$ — коэффициент сдвига [13].

Пусть подпространство $H^{1,0}(\Omega_\delta)$ пространства Соболева $H^1(\Omega_\delta)$ состоит из функций, обращающихся в нуль на $\partial\Omega$. Введем пространство $H(\Omega_\delta) = H^{1,0}(\Omega_\delta)^5$, снабженное стандартной нормой $\|\cdot\|_\delta = \|\cdot\|_{H(\Omega_\delta)}$. Для удобства положим $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{H(\Omega_0)}$. С учетом записанных выше выражений определим билинейную форму

$$B_\delta(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}) = \int\limits_{\Omega_\delta} \left\{\sigma_{ij}(\boldsymbol{W})\,\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{U}) + m_{ij}(\boldsymbol{\varphi})\,\alpha_{ij}(\boldsymbol{\mu}) + J(w_{,i} + \varphi^i)(\omega_{,i} + \mu^i)\right\} d\Omega_\delta$$

для произвольных функций $\boldsymbol{\xi} = (\boldsymbol{W}, w, \boldsymbol{\varphi}) \in H(\Omega_\delta)$, $\boldsymbol{\eta} = (\boldsymbol{U}, \omega, \boldsymbol{\mu}) \in H(\Omega_\delta)$ (здесь и далее по повторяющимся индексам проводится суммирование).

Функционал потенциальной энергии деформированной пластины, занимающей область Ω_δ, имеет вид

$$\Pi(\Omega_\delta, \boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{2}\, B_\delta(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\xi}) - \int\limits_{\Omega_\delta} \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{\xi}\, d\Omega_\delta, \qquad \boldsymbol{\xi} = (\boldsymbol{W}, w, \boldsymbol{\varphi}), \tag{1}$$

где вектор $\boldsymbol{F} = (f_1, f_2, f_3, 0, 0) \in C^1(\,\overline{\Omega}\,)^5$ описывает воздействие на пластину заданных внешних нагрузок [13]. На внешней границе $\partial\Omega$ зададим условия жесткого защемления

$$w = 0, \qquad \boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{W} = (0,0).$$

Выведем условие непроникания на внутренней границе $\Gamma_{l+\delta}$. Функции перемещений $\boldsymbol{W}_z(\boldsymbol{x}, z) = (w_z^1(\boldsymbol{x}, z), w_z^2(\boldsymbol{x}, z))$, $w_z(\boldsymbol{x}, z)$ точек $(\boldsymbol{x}, z)$, находящихся на расстоянии от срединной поверхности $|z| \leqslant h$, вычисляются по формулам [13]

$$\boldsymbol{W}_z(\boldsymbol{x}, z) = \boldsymbol{W}(\boldsymbol{x}) + z\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}), \qquad w_z(\boldsymbol{x}, z) = w(\boldsymbol{x}).$$

Умножая скачок вектора перемещений скалярно на нормаль к поверхности вертикальной трещины с координатами $(0,1,0)$, имеем

$$([w_z^1(\boldsymbol{x}, z)], [w_z^2(\boldsymbol{x}, z)], [w_z(\boldsymbol{x}, z)])\cdot(0,1,0) = [w_z^2(\boldsymbol{x}, z)] = [w^2] + z[\varphi^2] \geqslant 0, \quad |z| \leqslant h \text{ на } \Gamma_{l+\delta}.$$

Подставив в данное неравенство $z = h$ и $z = -h$, получаем условие взаимного непроникания берегов трещины

$$[w^2] \geqslant h|[\varphi^2]| \quad \text{на} \quad \Gamma_{l+\delta}. \tag{2}$$

Рассмотрим множество допустимых функций

$$K_\delta(\Omega_\delta) = \{\boldsymbol{\xi} = (\boldsymbol{W}, w, \boldsymbol{\varphi}) \in H(\Omega_\delta)\},$$

где $\boldsymbol{\xi}$ удовлетворяет условию (2).

Задачу о равновесии пластины можно сформулировать в виде задачи минимизации функционала энергии $\Pi(\Omega_\delta, \boldsymbol{\xi})$ на множестве допустимых функций $K_\delta(\Omega_\delta)$:

$$\min_{\boldsymbol{\xi}\in K_\delta(\Omega_\delta)} \Pi(\Omega_\delta, \boldsymbol{\xi}). \tag{3}$$

Для доказательства существования и единственности решения задачи (3) покажем, что функционал $\Pi(\Omega_\delta, \boldsymbol{\xi})$ является коэрцитивным и слабополунепрерывным снизу. Приведем основные неравенства, которые обеспечивают коэрцитивность функционала энергии и будут использоваться далее. Для $\boldsymbol{\xi} = (\boldsymbol{W}, w, \boldsymbol{\varphi}) \in H(\Omega_\delta)$ в силу условий на внешней границе $\partial\Omega$ справедливы неравенства Корна [14]

$$\int\limits_{\Omega_\delta} m_{ij}(\boldsymbol{\varphi})\alpha_{ij}(\boldsymbol{\varphi})\, d\Omega_\delta \geqslant C_1\|\boldsymbol{\varphi}\|^2_{H^1(\Omega_\delta)^2}, \qquad \int\limits_{\Omega_\delta} \sigma_{ij}(\boldsymbol{W})\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{W})\, d\Omega_\delta \geqslant C_2\|\boldsymbol{W}\|^2_{H^1(\Omega_\delta)^2} \tag{4}$$

и неравенство Пуанкаре

$$\|\nabla w\|_{L^2(\Omega_\delta)^2} \geqslant C_3 \|w\|_{H^1(\Omega_\delta)}. \tag{5}$$

Покажем, что для билинейной формы

$$B_\delta(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi}) = \int\limits_{\Omega_\delta} \big\{ m_{ij}(\boldsymbol{\varphi})\alpha_{ij}(\boldsymbol{\varphi}) + \sigma_{ij}(\boldsymbol{W})\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{W}) + J(w_{,i} + \varphi^i)(w_{,i} + \varphi^i) \big\}\, d\Omega_\delta \tag{6}$$

имеет место оценка

$$B_\delta(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi}) \geqslant m_\delta \|\boldsymbol{\xi}\|_\delta^2 \qquad \forall \boldsymbol{\xi} \in H(\Omega_\delta), \tag{7}$$

где $m_\delta > 0$ — постоянная, не зависящая от $\boldsymbol{\xi}$. Для того чтобы доказать справедливость соотношения (7), запишем неравенство Коши

$$2\Big| \int\limits_{\Omega_\delta} \varphi^i w_{,i}\, d\Omega_\delta \Big| \leqslant \epsilon \|\boldsymbol{\varphi}\|^2_{L^2(\Omega_\delta)^2} + \frac{1}{\epsilon}\, \|\nabla w\|^2_{L^2(\Omega_\delta)^2} \qquad \forall \epsilon > 0.$$

Следовательно, для последнего интеграла в правой части (6) справедлива оценка

$$J \int\limits_{\Omega_\delta} (w_{,i} + \varphi^i)(w_{,i} + \varphi^i)\, d\Omega_\delta \geqslant J\Big(\|\boldsymbol{\varphi}\|^2_{L^2(\Omega_\delta)^2} + \|\nabla w\|^2_{L^2(\Omega_\delta)^2} -$$

$$- \epsilon \|\boldsymbol{\varphi}\|^2_{L^2(\Omega_\delta)^2} - \frac{1}{\epsilon}\, \|\nabla w\|^2_{L^2(\Omega)^2} \Big) = J(1-\epsilon)\, \|\boldsymbol{\varphi}\|^2_{L^2(\Omega_\delta)^2} + J\Big(1 - \frac{1}{\epsilon}\Big)\, \|\nabla w\|^2_{L^2(\Omega_\delta)^2}. \tag{8}$$

Таким образом, из (4), (8) находим

$$\int\limits_{\Omega_\delta} \big\{ m_{ij}(\boldsymbol{\varphi})\alpha_{ij}(\boldsymbol{\varphi}) + \sigma_{ij}(\boldsymbol{W})\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{W}) + J(w_{,i} + \varphi^i)(w_{,i} + \varphi^i) \big\}\, d\Omega_\delta \geqslant$$

$$\geqslant C_1 \|\boldsymbol{\varphi}\|^2_{H^1(\Omega_\delta)^2} + C_2 \|\boldsymbol{W}\|^2_{H^1(\Omega_\delta)^2} + J(1-\epsilon) \|\boldsymbol{\varphi}\|^2_{L^2(\Omega_\delta)^2} + J\Big(1 - \frac{1}{\epsilon}\Big) \|\nabla w\|^2_{L^2(\Omega_\delta)^2},$$

где $\epsilon > 0$ — произвольное положительное число. Из этого неравенства, полагая $\epsilon = 1 + C_1/(2J)$, получаем

$$B_\delta(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi}) \geqslant \frac{C_1}{2}\, \|\boldsymbol{\varphi}\|^2_{H^1(\Omega_\delta)^2} + C_2 \|\boldsymbol{W}\|^2_{H^1(\Omega_\delta)^2} + \frac{C_1}{2J + C_1}\, \|\nabla w\|^2_{L^2(\Omega_\delta)^2}. \tag{9}$$

С учетом (5) из (9) находим необходимое неравенство (7). Нетрудно заметить, что коэрцитивность следует из оценки значений функционала энергии

$$\Pi(\Omega_\delta, \boldsymbol{\xi}) \geqslant m \|\boldsymbol{\xi}\|_\delta^2 - \|\boldsymbol{F}\|_{L^2(\Omega_\delta)^5} \|\boldsymbol{\xi}\|_\delta \qquad \forall \boldsymbol{\xi} = (\boldsymbol{W}, w, \boldsymbol{\varphi}) \in H(\Omega_\delta).$$

Функционал энергии дифференцируем, т. е. определяем производную $\Pi'_{\boldsymbol{\eta}}(\Omega_\delta, \boldsymbol{\xi})$ для всех $\boldsymbol{\eta} \in H(\Omega_\delta)$. Слабая полунепрерывность и выпуклость функционала энергии следуют из неравенства

$$\Pi'_{\boldsymbol{\eta}_1}(\Omega_\delta, \boldsymbol{\eta}_1 - \boldsymbol{\eta}_0) - \Pi'_{\boldsymbol{\eta}_0}(\Omega_\delta, \boldsymbol{\eta}_1 - \boldsymbol{\eta}_0) \geqslant 0 \qquad \forall\, \boldsymbol{\eta}_1 \in H(\Omega_\delta), \boldsymbol{\eta}_0 \in H(\Omega_\delta).$$

Выпуклость и замкнутость множества $K_\delta(\Omega_\delta)$ легко проверяются. Таким образом, для каждого $\delta \in [-\delta_0, \delta_0]$ функционал энергии $\Pi(\Omega_\delta, \boldsymbol{\xi})$ и множество $K_\delta(\Omega_\delta)$ удовлетворяют условиям известной теоремы о существовании и единственности решения задачи минимизации (см., например, [15]). Обозначим решение задачи (3), соответствующей параметру $\delta \in [-\delta_0, \delta_0]$, через $\boldsymbol{\xi}_\delta = (W_\delta, w_\delta, \varphi_\delta)$.

2. Вспомогательные утверждения и формулы. Докажем сначала, что эквивалентная норма в пространстве $H(\Omega_\delta)$ может быть введена с помощью билинейной формы B_δ, а именно $\|\cdot\|_\delta \sim B_\delta(\,\cdot\,,\,\cdot\,)^{1/2}$. Действительно, поскольку билинейная форма $B_\delta(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\xi})$ состоит из суммы интегралов, которые можно оценить сверху с помощью значений $d\|\boldsymbol{\xi}\|_\delta^2$ ($d>0$ — некоторая константа, не зависящая от δ и $\boldsymbol{\xi}$), имеем неравенство

$$M_\delta\|\boldsymbol{\xi}\|_\delta^2 \geqslant B_\delta(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\xi}) \qquad \forall\boldsymbol{\xi}\in H(\Omega_\delta)$$

с положительной постоянной M_δ, не зависящей от $\boldsymbol{\xi}$. С учетом (7) из этого неравенства следует соотношение $\|\cdot\|_\delta \sim B_\delta(\,\cdot\,,\,\cdot\,)^{1/2}$.

Вследствие выпуклости и дифференцируемости функционала $\Pi(\Omega_\delta,\boldsymbol{\xi})$ задача минимизации (3) при $\delta\in[-\delta_0,\delta_0]$ эквивалентна вариационному неравенству

$$B_\delta(\boldsymbol{\xi}_\delta,\boldsymbol{\eta}-\boldsymbol{\xi}_\delta) \geqslant \int\limits_{\Omega_\delta} \boldsymbol{F}\cdot(\boldsymbol{\eta}-\boldsymbol{\xi}_\delta)\,d\Omega_\delta \qquad \forall\boldsymbol{\eta}=(\boldsymbol{U},\omega,\boldsymbol{\mu})\in K_\delta(\Omega_\delta). \tag{10}$$

Введем дифференцируемое преобразование, отображающее Ω_δ биективно на Ω_0, следующим образом. Рассмотрим функцию $\theta\in C_0^\infty(\Omega)$, такую что $\theta=1$ в окрестности точки $\boldsymbol{x}_l=(l,0)$, $\theta=0$ в окрестности точки $\boldsymbol{x}_0=(0,0)$. Определим преобразование независимых переменных по формулам

$$y_1 = x_1-\delta\theta(x_1,x_2), \qquad y_2=x_2, \tag{11}$$

где $\boldsymbol{y}=(y_1,y_2)\in\Omega_0$; $(x_1,x_2)\in\Omega_\delta$. Якобиан преобразования $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x},\delta)$, определенного по формулам (11), равен

$$q_\delta(\boldsymbol{x}) = \left|\frac{\partial\,(y_1,y_2)}{\partial\,(x_1,x_2)}\right| = 1-\delta\theta_{,1}.$$

Пусть $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(\boldsymbol{y},\delta)$ — преобразование, обратное преобразованию $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x},\delta)$. Рассмотрим произвольную функцию $g(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{x}\in\Omega_\delta$ и с помощью преобразования (11) определим в области Ω_0 функцию $\hat g(\boldsymbol{y})$ следующим равенством: $\hat g(\boldsymbol{y})\equiv g(\boldsymbol{x})$. Запишем формулы для частных производных в новых переменных:

$$g_{,1}=\hat g_{,1}-\delta\theta_{,1}\hat g_{,1}, \qquad g_{,2}=\hat g_{,2}-\delta\theta_{,2}\hat g_{,1}.$$

При малых δ преобразование $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(\boldsymbol{y},\delta)$ устанавливает взаимно однозначное соответствие между множествами $K_\delta(\Omega_\delta)$ и $K_0(\Omega_0)$. Действительно, при малых δ $q_\delta>0$, следовательно, области Ω_0 и Ω_δ отображаются взаимно однозначно. Отсюда следует, что с помощью $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(\boldsymbol{y},\delta)$ пространство $H(\Omega_0)$ взаимно однозначно отображается на $H(\Omega_\delta)$. Покажем, что образ произвольной функции из множества $K_\delta(\Omega_\delta)$ принадлежит множеству $K_0(\Omega_0)$ и наоборот. Пусть $\boldsymbol{x}\in\Omega_\delta$, $\boldsymbol{y}\in\Omega_0$, $\boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{x})=\hat{\boldsymbol{\xi}}(\boldsymbol{y})$, где $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(\boldsymbol{y},\delta)$. Предположим, что $\boldsymbol{\xi}\in K_\delta(\Omega_\delta)$, т. е. $\boldsymbol{\xi}\in H(\Omega_\delta)$, и выполнено неравенство

$$[w^2]\geqslant h|[\varphi^2]|, \qquad \boldsymbol{x}\in\Gamma_{l+\delta}.$$

По построению очевидно, что $[\hat w^2]\geqslant h|[\hat\varphi^2]|$, $\boldsymbol{y}\in\Gamma_l$. Аналогично можно показать обратное: из включения $\hat{\boldsymbol{\xi}}\in K_0(\Omega_0)$ следует, что $\boldsymbol{\xi}\in K_\delta(\Omega_\delta)$.

Таким образом, при достаточно малых δ решению $\boldsymbol{\xi}_\delta(\boldsymbol{x})$ задачи о равновесии можно поставить в соответствие функцию из множества $K_0(\Omega_0)$: $\hat{\boldsymbol{\xi}}_\delta(\boldsymbol{y})=\boldsymbol{\xi}_\delta(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{y}\in\Omega_0$. При $\delta=0$ в качестве $\hat{\boldsymbol{\xi}}_0$ примем $\boldsymbol{\xi}_0$. Докажем следующее утверждение.

Лемма. *В $H(\Omega_0)$ имеет место сильная сходимость $\hat{\boldsymbol{\xi}}_\delta\to\boldsymbol{\xi}_0$.*

Доказательство. Подставляя в вариационное неравенство (10) пробные функции $\boldsymbol{\eta} = 0$, $\boldsymbol{\eta} = 2\boldsymbol{\xi}_\delta$, получаем равенство

$$B_\delta(\boldsymbol{\xi}_\delta, \boldsymbol{\xi}_\delta) = \int\limits_{\Omega_\delta} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{\xi}_\delta \, d\Omega_\delta \qquad \forall \delta \in [-\delta_0, \delta_0].$$

Выполнив в этом равенстве координатное преобразование (11), находим

$$B_0(\hat{\boldsymbol{\xi}}_\delta, \hat{\boldsymbol{\xi}}_\delta) = \int\limits_{\Omega_0} \boldsymbol{F}^\delta \cdot \hat{\boldsymbol{\xi}}_\delta \, d\Omega_0 + \delta R_1(\delta, \theta, \hat{\boldsymbol{\xi}}_\delta), \tag{12}$$

где

$$\boldsymbol{F}^\delta(\boldsymbol{y}) = \frac{\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{y}, \delta))}{1 - \delta\theta_{,1}(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{y}, \delta))}.$$

Заметим, что при малых δ можно показать справедливость оценок

$$\|\boldsymbol{F}^\delta\|_{L^2(\Omega_0)} \leqslant C_4, \qquad |R_1(\delta, \theta, \hat{\boldsymbol{\xi}}_\delta)| \leqslant C_5 \|\hat{\boldsymbol{\xi}}_\delta\|^2,$$

где постоянные C_4, C_5 не зависят от δ и $\hat{\boldsymbol{\xi}}_\delta$. При достаточно малых δ с использованием неравенства (7) из (12) получаем

$$m_0 \|\hat{\boldsymbol{\xi}}_\delta\|^2 \leqslant C_4 \|\hat{\boldsymbol{\xi}}_\delta\| + |\delta| C_5 \|\hat{\boldsymbol{\xi}}_\delta\|^2.$$

С учетом этого соотношения нетрудно вывести оценку, выполняющуюся для достаточно малых δ:

$$\|\hat{\boldsymbol{\xi}}_\delta\| \leqslant C_6$$

(постоянная C_6 не зависит от δ). Из равномерной ограниченности норм $\|\hat{\boldsymbol{\xi}}_\delta\|$ следует, что последовательность $\{\hat{\boldsymbol{\xi}}_\delta\}$ слабо сходится к некоторой функции $\tilde{\boldsymbol{\xi}}$ в пространстве $H(\Omega_0)$. В силу слабой замкнутости $K_0(\Omega_0)$ функция $\tilde{\boldsymbol{\xi}}$ принадлежит множеству $K_0(\Omega_0)$. Выполнив координатное преобразование (11) для вариационного неравенства (10), получаем

$$B_0(\hat{\boldsymbol{\xi}}_\delta, \boldsymbol{\eta} - \hat{\boldsymbol{\xi}}_\delta) \geqslant \int\limits_{\Omega_0} \boldsymbol{F}^\delta \cdot (\boldsymbol{\eta} - \hat{\boldsymbol{\xi}}_\delta) \, d\Omega_0 + \delta R_2(\delta, \theta, \hat{\boldsymbol{\xi}}_\delta, \boldsymbol{\eta}). \tag{13}$$

Заметим, что в силу взаимной однозначности $K_0(\Omega_0)$ и $K_\delta(\Omega_\delta)$ это неравенство справедливо для всех пробных функций $\boldsymbol{\eta}$ из $K_0(\Omega_0)$. Для остаточного члена R_2 в (13) при малых δ справедлива оценка

$$|R_2(\delta, \theta, \hat{\boldsymbol{\xi}}_\delta, \boldsymbol{\eta})| \leqslant C_7 (\|\hat{\boldsymbol{\xi}}_\delta\|^2 + \|\boldsymbol{\eta}\| \|\hat{\boldsymbol{\xi}}_\delta\|),$$

где постоянная C_7 не зависит от δ, $\hat{\boldsymbol{\xi}}_\delta$, $\boldsymbol{\eta}$. С учетом сильной сходимости $\boldsymbol{F}^\delta$ к $\boldsymbol{F}$ в $L^2(\Omega_0)^5$ перейдем в (13) к пределу при $\delta \to 0$. Вследствие слабой полунепрерывности снизу билинейной формы $B_0(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ получаем

$$B_0(\tilde{\boldsymbol{\xi}}, \boldsymbol{\eta} - \tilde{\boldsymbol{\xi}}) \geqslant \int\limits_{\Omega_0} \boldsymbol{F} \cdot (\boldsymbol{\eta} - \tilde{\boldsymbol{\xi}}) \, d\Omega_0.$$

Поскольку функция $\boldsymbol{\eta}$ произвольная, в силу единственности решения вариационной задачи из последнего неравенства следует справедливость равенства $\tilde{\boldsymbol{\xi}} = \boldsymbol{\xi}_0$. Переходя в равенстве (12) к пределу при $\delta \to 0$, с учетом слабой сходимости $\hat{\boldsymbol{\xi}}_\delta \to \boldsymbol{\xi}_0$ в $H(\Omega_0)$ и сильной сходимости $\boldsymbol{F}^\delta \to \boldsymbol{F}$ в $L^2(\Omega_0)^5$ находим

$$\lim_{\delta \to 0} B_0(\hat{\boldsymbol{\xi}}_\delta, \hat{\boldsymbol{\xi}}_\delta) = \lim_{\delta \to 0} \int\limits_{\Omega_0} \boldsymbol{F}^\delta \cdot \hat{\boldsymbol{\xi}}_\delta \, d\Omega_0 = \int\limits_{\Omega_0} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{\xi}_0 \, d\Omega_0. \tag{14}$$

Сравним два соотношения, получаемые из вариационного неравенства (10) при $\delta = 0$, для двух пробных функций $\boldsymbol{\eta} = 0$ и $\boldsymbol{\eta} = 2\boldsymbol{\xi}_0$. В результате имеем следующее соотношение:

$$B_0(\boldsymbol{\xi}_0, \boldsymbol{\xi}_0) = \int\limits_{\Omega_0} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{\xi}_0 \, d\Omega_0. \tag{15}$$

Равенства (14), (15) обеспечивают сильную сходимость $\hat{\boldsymbol{\xi}}_\delta \to \boldsymbol{\xi}_0$ в $H(\Omega_0)$ при $\delta \to 0$. Действительно, слабая сходимость и сходимость норм в гильбертовом пространстве гарантируют сильную сходимость $\hat{\boldsymbol{\xi}}_\delta \to \boldsymbol{\xi}_0$ в $H(\Omega_0)$. Из соотношений (14), (15) с учетом отмеченной выше эквивалентности норм следует сходимость $\|\hat{\boldsymbol{\xi}}_\delta\| \to \|\boldsymbol{\xi}_0\|$ при $\delta \to 0$. Лемма доказана.

Вычислим производную

$$\boldsymbol{F}'(\boldsymbol{y}) = \frac{d\boldsymbol{F}^\delta(\boldsymbol{y})}{d\delta}\Big|_{\delta=0} = \lim_{\delta\to 0} \frac{\boldsymbol{F}^\delta(\boldsymbol{y}) - \boldsymbol{F}^0(\boldsymbol{y})}{\delta}.$$

Считая, что переменные $\boldsymbol{y}$ и δ в (11) являются независимыми, продифференцируем (11) по δ. В результате имеем

$$0 = \frac{dx_1}{d\delta} - \theta - \delta\theta_{,1} \frac{dx_1}{d\delta}.$$

Таким образом, справедливы формулы

$$\frac{dx_1}{d\delta} = \frac{\theta}{1 - \delta\theta_{,1}}, \qquad \frac{dx_2}{d\delta} = 0,$$

из которых следуют равенства

$$\frac{\partial \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{y}, \delta))}{\partial\delta}\Big|_{\delta=0} = \boldsymbol{F}_{x_1} \frac{dx_1}{d\delta}\Big|_{\delta=0} + \boldsymbol{F}_{x_2} \frac{dx_2}{d\delta}\Big|_{\delta=0} = \boldsymbol{F}_{y_1}\theta.$$

Теперь можно найти производную $\boldsymbol{F}'(\boldsymbol{y})$. Действительно, имеем равенства

$$\boldsymbol{F}'(\boldsymbol{y}) = \lim_{\delta\to 0} \frac{1}{\delta}\Big(\frac{\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{y}, \delta))}{1 - \delta\theta_{,1}} - \boldsymbol{F}(\boldsymbol{y})\Big) = \lim_{\delta\to 0} \frac{\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{y}, \delta)) - \boldsymbol{F}(\boldsymbol{y})}{\delta} + \theta_{,1}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{y})\big|_{\delta=0} =$$

$$= \boldsymbol{F}_{,y_1}\theta + \boldsymbol{F}\theta_{,y_1} = \frac{\partial}{\partial y_1}(\boldsymbol{F}\theta).$$

Таким образом, производная $\boldsymbol{F}^\delta(\boldsymbol{y})$ по отношению к δ задается формулой

$$\boldsymbol{F}'(\boldsymbol{y}) = (\theta\boldsymbol{F})_{,1}(\boldsymbol{y}).$$

При этом из включения $\boldsymbol{F} \in C^1(\overline{\Omega})^5$ следует, что $(f_i^\delta(\boldsymbol{y}) - f_i(\boldsymbol{y}))/\delta \to (f_i\theta)_{,1}(\boldsymbol{y})$ сильно в $L_\infty(\Omega)$, $i = 1, 2, 3$. Введем обозначение для преобразованного с помощью (11) функционала энергии (1) при $\delta \neq 0$:

$$\Pi_\delta(\Omega_0, \hat{\boldsymbol{\xi}}) = \frac{1}{2} B_0^\delta(\hat{\boldsymbol{\xi}}, \hat{\boldsymbol{\xi}}) - \int\limits_{\Omega_0} \boldsymbol{F}^\delta \cdot \hat{\boldsymbol{\xi}} \, d\Omega_0, \qquad \hat{\boldsymbol{\xi}}(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{y} \in \Omega_0, \quad \boldsymbol{x} \in \Omega_\delta.$$

Здесь билинейная форма $B_0^\delta(\hat{\boldsymbol{\xi}}, \hat{\boldsymbol{\xi}})$ получается в результате преобразования независимых переменных (11) в соответствующей билинейной форме $B_\delta(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi})$.

Используя разложения

$$q_\delta^{-1}(\boldsymbol{x}(\delta, \boldsymbol{y})) = 1 + \delta\theta_{,1}(\boldsymbol{y}) + r_1(\delta, \boldsymbol{y}),$$

$$\theta_{,i}(\boldsymbol{x}(\delta, \boldsymbol{y})) = \theta_{,i}(\boldsymbol{y}) + \delta\theta_{,i1}\theta(\boldsymbol{y}) + r_2(\delta, \boldsymbol{y}),$$

$$\boldsymbol{f}_j^\delta(\boldsymbol{x}(\delta, \boldsymbol{y})) = \boldsymbol{f}_j(\boldsymbol{y}) + \delta(\boldsymbol{f}_j\theta)_{,1}(\boldsymbol{y}) + r_3^j(\delta, \boldsymbol{y}), \qquad j = 1, 2, 3,$$

где $r_k(\delta, \boldsymbol{y})/\delta \to 0$, $r_3^j(\delta, \boldsymbol{y})/\delta \to 0$ в $L_\infty(\Omega_0)$ при $\delta \to 0$, $k = 1, 2$, $j = 1, 2, 3$, функционал $\Pi_\delta(\Omega_0,\boldsymbol{\xi})$ ($\boldsymbol{\xi}=(u,v,w,\psi,\varphi)\in K_0(\Omega_0)$) можно представить в виде

$$\Pi_\delta(\Omega_0,\boldsymbol{\xi})=\Pi(\Omega_0,\boldsymbol{\xi})+\delta\Big(\frac{3D}{h^2}\,g(\theta,u,v)+Dg(\theta,\psi,\varphi)+ \\ +\frac{J}{2}\int\limits_{\Omega_0}\theta_{,1}(\psi^2+\varphi^2)\,d\Omega_0-\frac{J}{2}\int\limits_{\Omega_0}(\theta_{,1}(w_{,1}^2-w_{,2}^2)+2\theta_{,2}\,w_{,1}\,w_{,2})\,d\Omega_0- \\ -J\int\limits_{\Omega_0}(\theta_{,2}\,w_{,1}\,\varphi-\theta_{,1}\,w_{,2}\,\varphi)\,d\Omega_0-\int\limits_{\Omega_0}(\boldsymbol{F}\theta)_{,1}\,\boldsymbol{\xi}\,d\Omega_0\Big)+o(\delta)R_3(\delta,\theta,\boldsymbol{\xi}). \qquad (16)$$

Здесь функция g определяется по формуле

$$g(\theta,t,s)=-\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_0}\theta_{,1}\Big(t_{,1}^2-s_{,2}^2+\frac{1}{2}(1-k)(s_{,1}^2-t_{,2}^2)\Big)\,d\Omega_0- \\ -\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_0}\theta_{,2}\,(2s_{,1}\,s_{,2}+(1+k)s_{,1}\,t_{,1}+(1-k)t_{,1}\,t_{,2})\,d\Omega_0.$$

При малых δ остаточный член $R_3(\delta,\theta,\boldsymbol{\xi})$ оценивается следующим образом:

$$|R_3(\delta,\theta,\boldsymbol{\xi})|\leqslant C_8(\|\boldsymbol{\xi}\|^2+\|\boldsymbol{\xi}\|)$$

(постоянная C_8 не зависит от δ и $\boldsymbol{\xi}$).

3. Вывод формулы для производной. В механике разрушения часто используется критерий Гриффитса, согласно которому тело начинает разрушаться в тот момент, когда производная функционала энергии по длине трещины достигает некоторой критической величины, зависящей от свойств материала пластины [1, 2].

Докажем существование производной функционала энергии

$$\frac{d\Pi(\Omega_\delta,\boldsymbol{\xi}_\delta)}{d\delta}\Big|_{\delta=0}=\lim_{\delta\to 0}\frac{\Pi(\Omega_\delta,\boldsymbol{\xi}_\delta)-\Pi(\Omega_0,\boldsymbol{\xi}_0)}{\delta} \qquad (17)$$

по отношению к параметру δ, описывающему изменение длины трещины, и получим соответствующую формулу. Для упрощения записи формул целесообразно обозначить через $\boldsymbol{\xi}=(u,v,w,\psi,\varphi)=\boldsymbol{\xi}_0$ решение задачи (3), соответствующей параметру $\delta=0$ (невозмущенной трещине).

Сформулируем основной результат работы в виде следующего утверждения.

Теорема. *Производная функционала энергии* $\Pi(\Omega_\delta,\boldsymbol{\xi}_\delta)$ *по отношению к параметру* δ *существует и находится по формуле*

$$\frac{d\Pi(\Omega_\delta,\boldsymbol{\xi}_\delta)}{d\delta}\Big|_{\delta=0}=\frac{3D}{h^2}\,g(\theta,u,v)+Dg(\theta,\psi,\varphi)- \\ -\frac{J}{2}\int\limits_{\Omega_0}\big\{(\theta_{,1}(w_{,1}^2-w_{,2}^2)+2\theta_{,2}\,w_{,1}\,w_{,2})+2(\theta_{,2}\,w_{,1}\,\varphi-\theta_{,1}\,w_{,2}\,\varphi)\big\}\,d\Omega_0+ \\ +\frac{J}{2}\int\limits_{\Omega_0}\theta_{,1}(\psi^2+\varphi^2)\,d\Omega_0-\int\limits_{\Omega_0}(\boldsymbol{F}\theta)_{,1}\,\boldsymbol{\xi}\,d\Omega_0, \qquad (18)$$

где $\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{\xi}_0=(u,v,w,\psi,\varphi)$ *— решение задачи* (3), *соответствующей параметру* $\delta=0$; *функция* g *определяется формулой*

$$g(\theta,t,s)=-\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_0}\theta_{,1}\Big(t_{,1}^2-s_{,2}^2+\frac{1}{2}(1-k)(s_{,1}^2-t_{,2}^2)\Big)\,d\Omega_0- \\ -\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_0}\theta_{,2}\,(2s_{,1}\,s_{,2}+(1+k)s_{,1}\,t_{,1}+(1-k)t_{,1}\,t_{,2})\,d\Omega_0.$$

Доказательство. Решение $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}_0$ задачи равновесия для невозмущенной трещины удовлетворяет соотношению

$$\Pi(\Omega_0, \boldsymbol{\xi}) = \min_{\boldsymbol{\eta} \in K_0(\Omega_0)} \Pi(\Omega_0, \boldsymbol{\eta}). \tag{19}$$

Аналогично для решений $\boldsymbol{\xi}_\delta$ получаем

$$\Pi(\Omega_\delta, \boldsymbol{\xi}_\delta) = \min_{\boldsymbol{\eta} \in K_\delta(\Omega_\delta)} \Pi(\Omega_\delta, \boldsymbol{\eta}). \tag{20}$$

Поскольку при преобразовании (11) множества $K_0(\Omega_0)$ и $K_\delta(\Omega_\delta)$ отображаются взаимно однозначно, имеем равенства

$$\min_{\boldsymbol{\eta} \in K_\delta(\Omega_\delta)} \Pi(\Omega_\delta, \boldsymbol{\eta}) = \min_{\boldsymbol{\eta} \in K_0(\Omega_0)} \Pi_\delta(\Omega_0, \boldsymbol{\eta}). \tag{21}$$

Далее, не нарушая общности, будем считать, что $\delta > 0$. С учетом (19)–(21) получаем следующие неравенства:

$$\frac{\Pi(\Omega_\delta, \boldsymbol{\xi}_\delta) - \Pi(\Omega_0, \boldsymbol{\xi})}{\delta} \leqslant \frac{\Pi_\delta(\Omega_0, \boldsymbol{\xi}) - \Pi(\Omega_0, \boldsymbol{\xi})}{\delta}; \tag{22}$$

$$\frac{\Pi_\delta(\Omega_0, \hat{\boldsymbol{\xi}}_\delta) - \Pi(\Omega_0, \hat{\boldsymbol{\xi}}_\delta)}{\delta} \leqslant \frac{\Pi(\Omega_\delta, \boldsymbol{\xi}_\delta) - \Pi(\Omega_0, \boldsymbol{\xi})}{\delta}. \tag{23}$$

Осуществим предельный переход в (22) и оценим правую часть с помощью представления (16). В результате получаем

$$\limsup_{\delta \to 0} \frac{\Pi(\Omega_\delta, \boldsymbol{\xi}_\delta) - \Pi(\Omega_0, \boldsymbol{\xi})}{\delta} \leqslant \frac{3D}{h^2} g(\theta, u, v) + D g(\theta, \psi, \varphi) -$$
$$- \frac{J}{2} \int\limits_{\Omega_0} \left\{ (\theta_{,1} (w_{,1}^2 - w_{,2}^2) + 2\theta_{,2} w_{,1} w_{,2}) + 2(\theta_{,2} w_{,1} \varphi - \theta_{,1} w_{,2} \varphi) \right\} d\Omega_0 +$$
$$+ \frac{J}{2} \int\limits_{\Omega_0} \theta_{,1} (\psi^2 + \varphi^2)\, d\Omega_0 - \int\limits_{\Omega_0} (\boldsymbol{F}\theta)_{,1} \boldsymbol{\xi}\, d\Omega_0.$$

В то же время вследствие сильной сходимости $\hat{\boldsymbol{\xi}}_\delta \to \boldsymbol{\xi}$ в $H(\Omega_0)$ и согласно оценке (23) и представлению (16) имеем

$$\liminf_{\delta \to 0} \frac{\Pi(\Omega_\delta, \boldsymbol{\xi}_\delta) - \Pi(\Omega_0, \boldsymbol{\xi})}{\delta} \geqslant \frac{3D}{h^2} g(\theta, u, v) + D g(\theta, \psi, \varphi) -$$
$$- \frac{J}{2} \int\limits_{\Omega_0} \left\{ (\theta_{,1} (w_{,1}^2 - w_{,2}^2) + 2\theta_{,2} w_{,1} w_{,2}) + 2(\theta_{,2} w_{,1} \varphi - \theta_{,1} w_{,2} \varphi) \right\} d\Omega_0 +$$
$$+ \frac{J}{2} \int\limits_{\Omega_0} \theta_{,1} (\psi^2 + \varphi^2)\, d\Omega_0 - \int\limits_{\Omega_0} (\boldsymbol{F}\theta)_{,1} \boldsymbol{\xi}\, d\Omega_0.$$

Из последних двух неравенств следует существование предела справа

$$\lim_{\delta \to 0+0} \frac{\Pi(\Omega_\delta, \boldsymbol{\xi}_\delta) - \Pi(\Omega_0, \boldsymbol{\xi}_0)}{\delta}.$$

При отрицательных параметрах δ неравенства (22), (23) будут выполняться с обратными знаками. Аналогично можно установить существование предела слева. Таким образом, производная функционала энергии по отношению к параметру δ, описывающему изменение длины трещины, существует и определяется по формуле (18). Теорема доказана.

Заметим, что производная функционала энергии не зависит от θ. Действительно, в предельном соотношении для производной (17) правая часть не зависит от θ.

Сравним полученную выше формулу (18) с формулой для производной функционала энергии пластины Кирхгофа — Лява по длине плоской трещины (см. [5]). В отличие от модели пластины Кирхгофа — Лява модель Тимошенко содержит функции $\boldsymbol{\varphi}$, описывающие углы поворота нормальных сечений, а функционал энергии пластины (1) учитывает энергию, соответствующую деформации поперечного сдвига. Следует отметить, что в рассматриваемой модели пластины Тимошенко функционал энергии пластины содержит слагаемое вида $\dfrac{1}{2}\displaystyle\int\limits_{\Omega_\delta} \sigma_{ij}(\boldsymbol{W})\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{W})\,d\Omega_\delta$, представляющее собой энергию деформаций горизонтальных перемещений. Это слагаемое входит также в функционал энергии пластины Кирхгофа — Лява [13], что обусловливает наличие одинаковых слагаемых $3Dg(\theta,u,v)/h^2$ в обеих формулах для производной функционала энергии (см. [5]). Поскольку выражение для интеграла $\dfrac{1}{2}\displaystyle\int\limits_{\Omega_\delta} m_{ij}(\boldsymbol{\varphi})\alpha_{ij}(\boldsymbol{\varphi})\,d\Omega_\delta$, представляющего собой энергию деформации изгиба, аналогично выражению для рассмотренного выше интеграла, формула (18) содержит слагаемое $Dg(\theta,\psi,\varphi)$. Остальные слагаемые формулы (18) обусловлены наличием интегралов $\dfrac{J}{2}\displaystyle\int\limits_{\Omega_\delta}(w_{,i}+\varphi^i)(w_{,i}+\varphi^i)\,d\Omega_\delta$ и $\displaystyle\int\limits_{\Omega_\delta}\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{\xi}\,d\Omega_\delta$ в выражении для функционала $\Pi(\Omega_\delta,\boldsymbol{\xi})$ в (1).

В заключение отметим, что полученная формула для производной (18) справедлива также в случае однородной трансверсально-изотропной пластины, содержащей плоскую сквозную трещину. При этом коэффициент J определяется по формуле $J = 2\varkappa^2 Gh$, где G — модуль сдвига на площадках, перпендикулярных срединной плоскости пластины.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Черепанов Г. П.** Механика хрупкого разрушения. М.: Наука, 1974.
2. **Партон В. З.** Механика упругопластического разрушения / В. З. Партон, Е. М. Морозов. М.: Наука, 1974.
3. **Ohtsuka K.** Generalized J-integral and its applications. 1. Basic theory // Japan J. Appl. Math. 1985. V. 2. P. 329–350.
4. **Gao H., Chiu Ch.** Slightly curved or kinked cracks in anisotropic elastic solids // Intern. J. Solids Structures. 1992. V. 29, N 8. P. 947–972.
5. **Рудой Е. М.** Формула Гриффитса для пластины с трещиной // Сиб. журн. индустр. математики. 2002. Т. 5, № 3. С. 155–161.
6. **Рудой Е. М.** Дифференцирование функционалов энергии в задаче о криволинейной трещине с возможным контактом берегов // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2007. № 6. С. 113–127.
7. **Рудой Е. М.** Асимптотика функционала энергии для смешанной краевой задачи четвертого порядка в области с разрезом // Сиб. мат. журн. 2009. Т. 50, № 2. С. 430–445.
8. **Kovtunenko V. A.** Primal-dual methods of shape sensitivity analysis for curvilinear cracks with nonpenetration // IMA J. Appl. Math. 2006. N 71. P. 635–657.
9. **Хлуднев А. М.** Задачи теории упругости в негладких областях. М.: Физматлит, 2010.

10. **Khludnev A. M.** Analysis of cracks in solids / A. M. Khludnev, V. A. Kovtunenko. Southampton; Boston: WIT Press, 2000.
11. **Kovtunenko V. A.** Numerical simulation of the non-linear crack problem with non-penetration // Math. Methods Appl. Sci. 2004. V. 27, N 2. P. 163–179.
12. **Hintermuller M., Kovtunenko V. A., Kunisch K.** Generalized Newton methods for crack problems with nonpenetration condition // Numer. Methods Partial Different. Equations. 2005. N 3. P. 586–610.
13. **Вольмир А. С.** Нелинейная динамика пластинок и оболочек. М.: Наука, 1972.
14. **Решетняк Ю. Г.** Теоремы устойчивости в геометрии и анализе. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1982.
15. **Байокки К.** Вариационные и квазивариационные неравенства / К. Байокки, А. Капело. М.: Наука, 1988.

Поступила в редакцию 2/II 2011 г.,
в окончательном варианте — 1/VII 2011 г.