Полученные результаты качественно совпадают с расчетами, приведенными в [1], хотя резкое падение плотности электронов непосредственно у границы модели, предсказанное в этой работе, в данных экспериментах не наблюдалось. Это объясняется тем, что в экспериментах температура поверхности образца была значительно выше, чем температура поверхности, предполагаемой в указанной работе.

Авторы благодарят Ю. К. Рулева за участие в проведении эксперимента.

Поступила 7 II 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. Huber P. W., Evans J. S., Schexnayder C. R. Ir. Comparison of theoretical and flight-measured ionisation in a blunt body Re-entry flowfield. AIAA Journal, 1971, vol. 9, No. 6.
2. Крюгер Р. Распределение температуры и плотности электронов в поздней фазе взрыва проволоки. Йенское обозрение, 1970, № 1.
3. Грим Г. Спектроскопия плазмы. М., Атомиздат, 1969.
4. Райзер Ю. П. Высокочастотный разряд высокого давления в потоке газа как процесс медленного горения. ПМТФ, 1968, № 3.
5. Лохте-Хольтгревен В. Методы исследования плазмы. М., «Мир», 1971.
6. Хайдер Р., Куш Г. Уширение спектральных линий лития, вызываемое электрическими микрополями. Йенское обозрение, 1971, № 1.
7. Георг Э. Б., Рулев Ю. К., Сипачев Г. Ф., Якушин М. И. Экспериментальное исследование пограничного слоя на разрушающихся образцах при совместном воздействии конвентивного и лучистого тепловых потоков. Изв. АН СССР, МЖГ, 1972, №. 2.

УДК 535.211

О РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЙ ОДНОМЕРНОГО РАСПРОСТРАНЕНИЯ МОНОХРОМАТИЧЕСКОГО ИМПУЛЬСА СВЕТА В ПОГЛОЩАЮЩИХ СРЕДАХ

Е. Л. Тюрин, В. А. Щеглов

(Москва)

Исследуются уравнения, описывающие распространение монохроматического импульса излучения произвольной формы в поглощающих средах — плазме, поглощающей двухуровневой и фотодиссоциирующей среде. Для широкого круга граничных условий в указанных случаях найдены точные аналитические решения. Рассмотрение проведено для задач с плоской, цилиндрической и сферической симметриями. Полученные формулы можно непосредственно использовать для сопоставления расчета с экспериментом.

Уравнения переноса излучения в средах, свойства которых изменяются при воздействии на них импульса света, нелинейны. Это обстоятельство значительно уменьшает число случаев, когда можно получить замкнутое аналитическое решение системы уравнений, удовлетворяющее заданным начальным и граничным условиям. Отдельные решения уравнений переноса в поглощающей (усиливающей) двухуровневой среде и плазме были получены различными методами в работах [1–4].

Уравнение переноса излучения частоты ν в поглощающей (усиливающей) среде имеет вид

$$\frac{1}{c}\frac{\partial I}{\partial t}+\Omega\nabla I=-KI \tag{1}$$

где I ($\mathbf{r}$, Ω, t) — интенсивность излучения в единичном телесном угле в направлении Ω, K — коэффициент поглощения излучения в среде, c — скорость света. Отметим, что первый член в (1) существен при рассмотрении пикосекундных импульсов в плазме [4,5]. В случае, когда можно пренебречь отражением и рассеянием света, а его распространение в среде имеет одномерный характер, уравнение (1) приобретает вид

$$\frac{1}{c}\frac{\partial I}{\partial t}+\frac{1}{r^{\alpha}}\frac{\partial}{\partial r}(r^{\alpha}I)=-KI \tag{2}$$

где $\alpha = 0, 1, 2$ соответственно для плоской, цилиндрической и сферической симметрий.

Материальное уравнение для поглощающей среды представим в форме

$$an\,(r)\partial\varphi/\partial t = KI \tag{3}$$

считая, что среда характеризуется двумя переменными параметрами $\varphi\,(r,\ t)$ и $n\,(r)$, $K = K\,(\varphi,\ n)$. Начальные и граничные условия запишем в виде

$$I\,(r, 0) = 0, \quad \varphi\,(r, 0) = \varphi_*\,(r) \quad (r \geqslant r_0)$$
$$I\,(r_0, t) = I_0\,(t) \quad (t \geqslant 0) \tag{4}$$

Уравнения (2), (3) с условиями (4) дают математическую постановку ряда физических задач:

1) если $\varphi = T$ — температура плазмы, n — плотность электронов, $a = {}^3/_2$, $K = K\,(T,\ n)$, то имеем задачу о нагреве неподвижной плазмы излучением лазера [1, 3, 4];

2) $\varphi = N$ — плотность молекул газа, $a = -1$, $n = 1$, $K = \sigma N$, где σ — сечение фотолиза, соответствует задаче о распространении волны фотодиссоциации в газе [6];

3) $\varphi = N_2 - N_1$ — разность населенностей возбужденного и основного состояний активных атомов, $K = \sigma\,(N_1 - N_2)$, $n = 1$, $a = {}^1/_2$ дает постановку задачи об усилении (поглощении) импульса света в двухуровневой среде без учета спонтанного распада верхнего уровня [2, 7].

После замены переменных

$$\eta = ct - r + r_0, \quad \xi = r \tag{5}$$

система (2), (3) принимает вид

$$\frac{\partial i}{\partial \xi} + \frac{\alpha}{\xi}\,i = -\,Ki \tag{6}$$

$$n\,(\xi)\,\frac{\partial\varphi}{\partial\eta} = Ki \tag{7}$$

Здесь введено обозначение $i = I\,/\,ac$. Если K записать в форме $K = k\,(\xi)\,/\,f\,(\varphi)$, то, исключая из уравнений i, находим первый интеграл системы (6), (7)

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\left[\frac{n}{k}\int f\,(\varphi)\,d\varphi\right] + \frac{\alpha}{\xi}\,\frac{n}{k}\int f\,(\varphi)\,d\varphi + n\varphi = Q_1\,(\xi) \tag{8}$$

Для широкого круга физических задач можно положить (см. [1, 8])

$$f\,(\varphi) = \varphi^{\gamma}, \quad k = k_0 n^{\beta}$$

Например, в случае тормозного поглощения в плазме $\gamma = {}^3/_2$, $\beta = 2$, а при фотолизе или усилении света в активной среде $\gamma = -1$, $\beta = 0$, $k_0 = \sigma$. Исследование уравнения (8) проводится в двух случаях.

1. Случай $\gamma \neq -1$. Уравнение (8) сводится к обобщенному уравнению Бернулли для функции $\Omega = n^{1-\beta}\varphi^{\gamma+1}$

$$\Omega = -\,A\,(\xi)\,\Omega^{-(\gamma+1)^{-1}} - \frac{\alpha}{\xi}\,\Omega + Q\,(\xi), \quad A\,(\xi) = (\gamma + 1)\,k_0 n^{\varkappa}, \quad \varkappa = \frac{\gamma + \beta}{\gamma + 1} \tag{9}$$

Решение (9) записывается в квадратурах, если $Q\,(\xi)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{dQ^{\gamma+1}}{d\xi} + \left(\frac{\alpha}{\xi} - \frac{\gamma + 1}{A}\,\frac{dA}{d\xi}\right) Q^{\gamma+1} - R\,(-\,A)^{\gamma+1}\,Q = 0 \tag{10}$$

откуда находим, что Q должно иметь вид

$$Q\,(\xi) = (\gamma + 1)\,k_0 n^{\varkappa}\xi^{-\chi}\left(G - \gamma\delta k_0 R\int n^{\varkappa}\xi^{\gamma\chi}\,d\xi\right)^{1/\gamma}, \quad \chi = \frac{\alpha}{\gamma + 1} \tag{11}$$

где R и G — произвольные константы, $\delta = (-\,1)^{\gamma}$ при $\gamma > -1$, $\delta = 1$ при $\gamma < -1$.

Для $Q\,(\xi)$ в форме (11) решение уравнения (8) имеет вид

$$\int \frac{d\omega}{\omega^{1/(\gamma+1)} - R\omega + 1} + F\,(\eta) = \frac{(-\,1)^{\gamma}\,(\gamma + 1)}{\gamma\delta R}\ln\left|\gamma\delta k_0 R\int n^{\varkappa}\xi^{\gamma\chi}\,d\xi - G\right| \tag{12}$$

где

$$\omega = [-A(\xi)/Q(\xi)]^{\gamma+1}\,\Omega$$

Используя граничное условие (4) при $r = r_0$, находим $F(\eta)$. Окончательно имеем

$$\int\limits_{\omega_0}^{\omega} \frac{d\omega}{\omega^{1/(\gamma+1)} - R\omega + 1} = \frac{(-1)^{\gamma}(\gamma+1)}{\gamma\delta R} \ln \left| \left[\gamma\delta k_0 R \int^{r} n^{\varkappa} r^{\gamma\chi} dr - G\right] \times \right.$$

$$\left. \times \left[\gamma\delta k_0 R \int^{r_0} n^{\varkappa} r^{\gamma\chi} dr - G\right]^{-1} \right|$$

где

$$\omega = (-1)^{\gamma+1} r^{\alpha} n^{1-\beta} \varphi^{\gamma+1}, \qquad \omega_0 = (-1)^{\gamma+1} r_0^{\alpha} n^{1-\beta}(r_0)\,\varphi_0^{\gamma+1} \tag{13}$$

$$\varphi_0(\eta) = \left[k_0(\gamma+1)\, n(r_0)\, a^{-1} \int\limits_0^{\eta/c} I_0(\eta)\, d\eta + \varphi_*^{\gamma+1}(r_0)\right]^{1/(\gamma+1)}$$

Выражение для интенсивности I легко получить из (7)

$$I = I_0(\eta)\,[\omega^{1/(\gamma+1)} - R\omega + 1]\,[\omega_0^{1/(\gamma+1)} - R\omega_0 + 1]^{-1} \tag{14}$$

Используем начальное условие (4) при $t = 0$. Так как $I(r, 0) = 0$, то при $t = 0$ имеем

$$\partial/\partial\xi \equiv \partial/\partial r, \; Q(\xi) \equiv Q(r)$$

Задание $Q(\xi)$ в виде (11) эквивалентно заданию начальных профилей $n(r)$ и $\varphi_*(r)$, причем выражения для них должны удовлетворять равенству

$$\int\limits_{\omega_{*0}}^{\omega_*} \frac{d\omega}{\omega^{1/(\gamma+1)} - R\omega + 1} = \frac{(-1)^{\gamma}(\gamma+1)}{\gamma\delta R} \ln \left| \left[\gamma\delta k_0 R \int^{r} n^{\varkappa} r^{\gamma\chi} dr - G\right] \times \right.$$

$$\left. \times \left[\gamma\delta k_0 R \int^{r_0} n^{\varkappa} r^{\gamma\chi} dr - G\right]^{-1} \right|$$

где

$$\omega_* = (-1)^{\gamma+1} r^{\alpha} n^{1-\beta} \varphi_*^{\gamma+1}, \qquad \omega_{*0} = \omega_*(r_0) \tag{15}$$

Таким образом, система (2) — (4) с условием (15) имеет решение, полученное из (13), (14). В частности, найденные в работах [1, 3, 4] выражения легко получить из формул (13), (14), положив $R = 0$ и задав конкретный вид $n(r)$ и $\varphi_*(r)$. Следует отметить, что, например, в задачах о нагреве плазмы мощными лазерными импульсами важно получать аналитические решения для самых разнообразных начальных профилей плотности плазмы и температуры при различных типах симметрии, чтобы иметь возможность сопоставлять расчетные и экспериментальные данные. Например, при воздействии на твердую мишень пикосекундных импульсов [5] профиль плотности плазмы $n(r)$ является возрастающей функцией от r вследствие газодинамической разгрузки нагреваемого слоя, а профиль температуры плазмы имеет колоколообразный вид (на границе плазма—вакуум температура мала вследствие газодинамического разлета, а на границе плазма — твердое тело — вследствие потери тепла путем электронной теплопроводности; движением плазмы во время распространения импульса из-за малости его длительности ($10^{-11} \div 10^{-12}$ *сек*) можно пренебречь). Требуемый вид профиля подбирается путем варьирования констант R и G в выражении (15).

2. Случай $\gamma = -1$. Уравнение (8) при $\gamma = -1$ приобретает вид

$$\frac{1}{\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial\xi} + \left[\frac{(1-\beta)}{n}\frac{dn}{d\xi} + \frac{\alpha}{\xi}\right]\ln\varphi + k_0 n^{\beta}\varphi = Q_1(\xi) \tag{16}$$

В отличие от случая, рассмотренного выше, целесообразно проводить решение уравнения (16) в каждой физической ситуации отдельно, поскольку отыскание общего метода решения связано со значительными математическими трудностями. В частности, рассмотрим уравнение (16) применительно к задачам о фотолизе или распространении импульса в двухуровневой среде. Полагая $n = 1$, $k_0 = \sigma$ — сечение взаимодействия соответствующего процесса, получим

$$\frac{1}{\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}+\frac{\alpha}{\xi}\ln\varphi+\sigma\varphi=Q_1(\xi) \quad (17)$$

Если $\alpha = 0$ (плоский случай), то уравнение (17) заменой $Z = \varphi^{-1}$ сводится к линейному, решение которого для двухуровневой среды ($\varphi = N_2 - N_1$) приведено в работе [2]. При $\alpha \neq 0$ уравнение (17) заменой $\omega = \sigma\varphi\xi$ приводится к виду

$$\frac{\xi}{\omega}\frac{\partial\omega}{\partial\xi}+\alpha\ln\omega+\omega=Q(\xi) \quad (18)$$

Для $Q = \mathrm{const}$ решение (18) с учетом граничного условия (4) записывается следующим образом:

$$\int_{\omega_0}^{\omega}\frac{d\omega}{\omega(Q-\omega-\alpha\ln\omega)}=\ln\frac{r}{r_0} \quad (19)$$

где

$$\omega_0=\sigma r_0\varphi_0, \qquad \varphi_0=\varphi_*(r_0)\exp\left[-\frac{\sigma}{a}\int_0^{\eta}I_0(\eta)\,d\eta\right]$$

Выражение для интенсивности, очевидно, можно представить в такой же форме, как и (14)

$$I=I_0(\eta)\,[\omega+\alpha\ln\omega-Q]\,[\omega_0+\alpha\ln\omega_0-Q]^{-1} \quad (20)$$

Обратимся к начальному условию при $t = 0$. Профиль $\varphi_* = \omega_*(r) / \sigma r$ должен удовлетворять равенству

$$\int_{\omega_*(r_0)}^{\omega_*}\frac{d\omega}{\omega(Q-\omega-\alpha\ln\omega)}=\ln\frac{r}{r_0} \quad (21)$$

где $Q \neq Q^* = \alpha\ln\omega_*(r_0) + \omega_*(r_0)$. В случае $Q = Q^*$ профиль φ_* имеет простой вид

$$\varphi_*=\varphi_*(r_0)\,r_0/r$$

В цилиндрической симметрии такой вид профиля в определенном смысле эквивалентен постоянному профилю φ_* в плоской симметрии, т. е. волна соответствующего процесса при неизменной интенсивности на границе I_0 распространяется с постоянной скоростью $D = I_0 / \varphi_*(r_0)$.

В заключение авторы благодарят О. Н. Крохина за обсуждение вопросов, рассмотренных в работе.

Поступила 6 I 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. Немчинов И. В. Некоторые нестационарные задачи переноса тепла излучением. ПМТФ, 1960, № 1, стр. 36.
2. Frantz L. M., Nodvik I. S. Theory of pulse propagation in a laser amplifier. J. Appl. Phys., 1963, vol. 34, No. 8, p. 2346.
3. Захаров С. Д., Тюрин Е. Л., Щеглов В. А. О динамике нагрева полностью ионизованной плазмы сфокусированным излучением лазера. В сб. «Квантовая электроника», № 7, М., «Советское радио», 1971, стр. 106.
4. Захаров С. Д., Тюрин Е. Л., Щеглов В. А. К вопросу о переносе монохроматического излучения в плазме. ЖЭТФ, 1971, т. 61, вып. 10. стр. 1447.
5. Басов Н. Г., Крюков П. Г., Сенатский Ю. В., Чекалин С. В. Получение мощных ультракоротких импульсов света в лазере на неодимовом стекле. ЖЭТФ, 1969, т. 57, вып. 4, стр. 1175.
6. Харциев В. Е. Волны фотодиссоциации в газе. ЖЭТФ, 1968, т. 54, вып. 3, стр. 867.
7. Зуев В. С., Щеглов В. А. Прохождение импульса света через нелинейную поглощающую среду. Ж. прикл. спектроскопии, 1966, т. 5, вып. 5, стр. 604.
8. Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П. Физики ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М., «Наука», 1966.