УДК 533.6.01

ЗАДАЧА О СИЛЬНОМ ВЗРЫВЕ В СЛАБОСЖИМАЕМЫХ СРЕДАХ

В. И. Налимов

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск

Рассматривается задача об одномерных движениях невязкого нетеплопроводного политропного газа, возникающая при описании физических процессов типа эндотермического горения. Среда предполагается слабо сжимаемой (показатель адиабаты много больше единицы). Движение газа инициируется точечным (взрывным) выделением энергии. Цель работы состоит в выводе приближенных уравнений, описывающих динамику сильных разрывов.

1. Постановка задачи. Предположим, что фазовые превращения среды происходят по схеме ударная волна — фазовый переход. Фазовый переход осуществляется, если за ударной волной давление $p \geqslant p_*$ (p_* — некоторое критическое давление). На поверхности разрыва, заменяющего зону фазового перехода, должны выполняться условия непрерывности потока вещества, импульса и энергии с учетом потери энергии, затраченной на осуществление фазового перехода.

Рассмотрим одномерные движения с плоскими, цилиндрическими или сферическими волнами. Пусть в начальный момент времени $t = 0$ газ с показателем адиабаты γ_0 занимает область $r \geqslant 0$. В начальный момент времени в начале координат $r = 0$ выделяется энергия E_0. Затем вправо движется сильный разрыв, положение которого описывается равенством $r = R(t)$. Область $0 < r < R(t)$ занимает движущийся газ с показателем адиабаты γ. Дифференциальные уравнения, описывающие непрерывные движения газа при $0 < r < R(t)$, имеют вид [1]

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{1}{r^\nu}\frac{\partial}{\partial r}(r^\nu \rho u) = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{p}{\rho^\gamma}\Big) + u\frac{\partial}{\partial r}\Big(\frac{p}{\rho^\gamma}\Big) = 0 \tag{1.1}$$

(ρ, p, u — плотность, давление и скорость газа). Первое уравнение отвечает закону сохранения массы, второе — закону сохранения импульса, последнее — закону сохранения энтропии в частицах для политропного газа. Параметр геометрии $\nu = 0$ для плоских течений, $\nu = 1$ для цилиндрических течений и $\nu = 2$ для сферических волн.

На разрыве $r = R(t)$ должны выполняться равенства:

$$\begin{gathered}\rho(R' - u) = \rho_0 R', \quad \rho(R' - u)^2 + p = \rho_0 R'^2 + p_0, \\ \frac{1}{2}(R' - u)^2 + \frac{\gamma}{\gamma - 1}\frac{p}{\rho} = \frac{\gamma_0}{\gamma_0 - 1}\frac{p_0}{\rho_0} + \frac{1}{2}R'^2 - e_0.\end{gathered} \tag{1.2}$$

Здесь p_0, ρ_0 — давление и плотность в покоящемся газе; постоянная e_0 — удельная энергия, затраченная на фазовый переход.

Для полной энергии справедливы формулы

$$\int\limits_0^R r^\nu \Big(\frac{\rho u^2}{2} + \frac{p}{\gamma - 1} - \frac{p_0}{\gamma_0 - 1} + \rho_0 e_0\Big)\,dr = S_\nu E_0, \tag{1.3}$$

где $S_\nu = 1/2,\ 1/2\pi,\ 1/4\pi$ для $\nu = 0,\ 1,\ 2$ соответственно.

Таким образом, требуется найти функцию $R(t)$ и определенные при $0 < r < R(t)$ плотность ρ, давление p и скорость u из уравнений (1.1) с краевыми условиями (1.2) на сильном разрыве при $r = R(t)$ и условием

$$u = 0 \tag{1.4}$$

на оси симметрии при $r = 0$.

В начальный момент времени при $t = 0$

$$R(0) = 0. \tag{1.5}$$

Кроме того, требуется, чтобы закон сохранения энергии (1.3) выполнялся для всех времен $t > 0$.

Замечание 1. Если допустить существование свободной границы $r = R_0(t) < R(t)$ такой, что внутри «сферы» $r < R_0(t)$ газ отсутствует (вакуум), то постановка задачи изменится: требуется найти функции $R_0(t)$ и $R(t)$ и определенные при $R_0(t) < r < R(t)$ плотность ρ, давление p и скорость u из системы (1.1) с краевыми условиями (1.2) на сильном разрыве при $r = R(t)$ и условием

$$u = R_0'(t), \quad p = 0 \tag{1.6}$$

при $r = R_0(t)$. В начальный момент времени при $t = 0$

$$R_0(0) = 0, \quad R(0) = 0. \tag{1.7}$$

Кроме того, требуется, чтобы для всех времен $t > 0$ выполнялся закон сохранения энергии

$$\int\limits_{R_0}^{R} r^\nu \left(\frac{1}{2}\,\rho u^2 + \frac{p}{\gamma - 1}\right) dr + \frac{R^{\nu+1}}{\nu + 1}\left(\rho_0 e_0 - \frac{p_0}{\gamma_0 - 1}\right) = S_\nu E_0. \tag{1.8}$$

Замечание 2. Равенства (1.2) при $e_0 = 0$ и $\gamma = \gamma_0$ связывают четыре неизвестные величины: p, ρ,u и R'. Поэтому можно найти $p = \Phi(R')$ для ударной волны. Из условия фазового перехода следует, что решение сформулированной выше задачи имеет смысл для времен, при которых выполнено неравенство $\Phi(R') \geqslant p_*$.

2. Предположения слабой сжимаемости среды и сильного взрыва. Будем считать, что $\varepsilon = 1/\sqrt{\gamma} \ll 1$, $\gamma_0 = \gamma/\alpha$. Пусть L — какая-либо характерная длина. Положим

$$\bar r = \frac{r}{L}, \quad \bar t = \frac{t}{\varepsilon L}\sqrt{\frac{p_0}{\rho_0}}, \quad p = p_0 \bar p, \quad u = \varepsilon\sqrt{\frac{p_0}{\rho_0}}\,\bar u, \quad R = L\bar R(\bar t),$$

$$\rho = \rho_0(1 + \varepsilon^2\theta), \quad S_\nu E_0 = \varepsilon^2 p_0 L^{\nu+1} E, \quad e_0 = \varepsilon^2\,\frac{p_0}{\rho_0}\,(e + \alpha), \quad p_* = p_0 \bar p_*.$$

Если есть свободная поверхность, дополнительно полагаем $R_0 = \varepsilon^2 L \bar R_0(\bar t\,)$.

В новых переменных (черта опущена) с точностью до младших по ε членов уравнения (1.1) принимают вид

$$\frac{\partial}{\partial t}\,(r^\nu\theta) + \frac{\partial}{\partial r}\,(r^\nu u) = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial r} = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial t}\,(p\mathrm{e}^\theta) = 0 \qquad (0 < r < R(t)). \tag{2.1}$$

Из последнего соотношения следует, что

$$p = f(r)\mathrm{e}^{-\theta} \tag{2.2}$$

с некоторой неотрицательной функцией $f(r)$.

Краевые условия (1.2) будут приближенно выполнены, если

$$R'\theta = u, \quad \frac{1}{2}u^2 + (1-\theta)p + e = 0 \qquad (r = R(t)); \tag{2.3}$$

$$R'u = p - 1 \qquad (r = R(t)). \tag{2.4}$$

При этих предположениях законы сохранения энергии (1.3) и (1.8) принимают вид

$$\int\limits_0^R r^\nu \left(\frac{1}{2}u^2 + p\right) dr + \frac{e}{\nu+1}R^{\nu+1} = E. \tag{2.5}$$

Замечание 3. В дальнейших вычислениях предполагаем, что $e \geqslant 0$.

Пусть $E \gg 1$, $e \gg 1$. Тогда, по крайней мере для малых времен, за фронтом сильного разрыва $p \gg 1$, и единицей в правой части равенства (2.4) можно пренебречь:

$$R'u = p \qquad (r = R(t)). \tag{2.6}$$

В исходных переменных это означает, что давление за фронтом сильного разрыва много больше давления в покоящемся газе. Исключив с помощью соотношения (2.6) функцию θ из краевых условий (2.3), получим

$$(1/2)\,u^2 = p + e \qquad (r = R(t)). \tag{2.7}$$

Исключая из уравнений (2.1), (2.2) функцию θ, получим систему

$$\frac{\partial}{\partial t}(r^\nu \ln p) + \frac{\partial}{\partial r}(r^\nu u) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial r} = 0 \quad (0 < r < R(t)). \tag{2.8}$$

Таким образом, в предположениях слабой сжимаемости среды и сильного взрыва исходная задача (1.1)–(1.5) (или (1.1)–(1.7)) свелась к отысканию давления p, скорости u и положения фронта сильного разрыва $R(t)$ из системы (2.8) с краевыми условиями на фронте сильного разрыва (2.6), (2.7) и условием на оси симметрии

$$u = 0 \quad \text{или} \quad p = 0 \qquad (r = 0) \tag{2.9}$$

и начальным условием

$$R(0) = 0.$$

Кроме того, для всех времен $t > 0$ должен выполняться закон сохранения энергии (2.5).

Замечание 4. В рамках приведенного приближения условие фазового перехода имеет вид

$$R'^2 \geqslant (1/2)\,p_*.$$

3. Автомодельные решения ($e = 0$). Следуя [1], будем искать положение ударной волны, скорость и давление в виде

$$R(t) = \left[\frac{1}{4}a(\nu+3)^2\right]^{1/(\nu+3)} t^{2/(\nu+3)}; \tag{3.1}$$

$$u(r,t) = R'(t)xV(x), \quad p(r,t) = R^{-\nu-1}(t)P(x), \tag{3.2}$$

где $x = r/R(t)$. В соответствии с уравнениями (2.8) функции V и P находятся из системы

$$(x^{\nu+1}P(x))' = P(x)(x^{\nu+1}V(x))' \qquad (0 < x < 1); \tag{3.3}$$

$$ax^{-(\nu-1)/2}(x^{(\nu+3)/2}V(x))' = P'(x) \qquad (0 < x < 1) \tag{3.4}$$

с краевыми условиями

$$aV(1) = P(1), \quad (1/2)aV^2(1) = P(1),$$

являющимися следствием равенств (2.6) и (2.7) при $e = 0$. Таким образом,

$$V(1) = 2, \quad P(1) = 2a. \tag{3.5}$$

Система (3.3), (3.4) допускает понижение порядка, так как для нее справедлив интеграл Седова

$$x^{\nu+1}\left[\frac{1}{2}\,ax^2V^2 + P\right] - x^{\nu+1}PV = C.$$

Из условия на оси симметрии при $x = 0$ следует, что $C = 0$ и поэтому

$$P = \frac{a}{2}\,\frac{x^2V^2}{V-1}. \tag{3.6}$$

Отметим, что $P = 2a$ при $x = 1$ и $V = 2$, поэтому второе равенство в (3.5) является следствием первого.

Постоянная a находится из закона сохранения энергии (2.5):

$$\frac{a}{2}\int\limits_0^1 \frac{x^{\nu+2}V^3}{V-1}\,dx = E. \tag{3.7}$$

Исключив с помощью равенства (3.6) давление из уравнения (3.4), найдем уравнение на V:

$$x(V^2 - 2V + 2)V' = -(\nu+1)V(V-1)\left(V - \frac{\nu+3}{\nu+1}\right).$$

Оно легко интегрируется:

$$V^{\nu_1}|V-1|^{-\nu_2}\left|V - \frac{\nu+3}{\nu+1}\right|^{\nu_3} = \frac{C}{x^{\nu+1}},$$

где

$$\nu_1 = 2\,\frac{\nu+1}{\nu+3}, \quad \nu_2 = \frac{\nu+1}{2}, \quad \nu_3 = \frac{\nu^2+2\nu+5}{2(\nu+3)}.$$

Из краевых условий (3.5) следует, что при $\nu = 2$, т. е. в случае сферической симметрии, автомодельных решений с конечным интегралом энергии (3.7) нет.

Для осесимметрических течений ($\nu = 1$)

$$V = 2, \quad P = 2ax^2, \quad a = E, \quad R(t) = (4E)^{1/4}t^{1/2}. \tag{3.8}$$

Наконец, в случае плоских волн ($\nu = 0$) $C = 2^{2/3}$, $V(0) = 1$,

$$a = \frac{E}{2}\int\limits_1^2 \frac{V^2 - 2V + 2}{(V-1)^{1/2}(3-V)^{7/2}}\,dV = \frac{3}{4}\,E, \quad R(t) = 3\cdot 2^{-4/3}E^{1/3}t^{2/3} \approx 1{,}19055E^{1/3}t^{2/3}. \tag{3.9}$$

Замечание 5. Для плоских волн при $x \to 0$

$$V \sim 1 + 2^{1/3}x^2, \quad P \sim a/2^{4/3},$$

и поэтому свободная поверхность отсутствует.

Для цилиндрических волн давление и скорость обращаются в нуль на оси симметрии. В рамках данного приближения ответа на вопрос об образовании свободной поверхности нет.

Отсутствие автомодельных решений в случае сферической симметрии означает, что приближение слабой сжимаемости среды плохо описывает течения со свободной поверхностью.

4. Вариационный принцип.

Теорема. *Решения уравнений движения сплошной среды* (2.6)–(2.9) *совпадают с экстремалями функционала действия*

$$\int_0^T \int_0^R \left(\frac{1}{2}u^2 - p - e\right) r^\nu \, dr \, dt \tag{4.1}$$

при дополнительном условии

$$(r^\nu \ln p)_t + (r^\nu u)_r = 0. \tag{4.2}$$

Доказательство. Для любой функции $g(r,t)$ положим $\bar{g}(t) = g(R(t),t)$. Вариация функционала (4.1) по R немедленно дает

$$\int_0^T \delta R \left(\frac{1}{2}\bar{u}^2 - \bar{p} - e\right) R^\nu \, dt.$$

Отсюда в силу произвольности δR следует краевое условие (2.7). Далее положим

$$p = \exp\{r^{-\nu} f_r(r,t)\}, \quad u = -r^{-\nu} f_t(r,t) \tag{4.3}$$

с такой гладкой функцией f, что $r^{-\nu} f \to 0$ (или $r^{-\nu} f \to -\infty$) при $r \to 0$. Тем самым условие на оси симметрии (2.9) и закон сохранения массы (4.2) для функций u и p будут выполнены автоматически. Поэтому вместо функционала (4.1) с ограничениями (2.9) и (4.2) можно рассматривать функционал

$$\int_0^T \int_0^R \left(\frac{1}{2} r^{-2\nu} f_t^2 - \exp\{r^{-\nu} f_r\} - e\right) r^\nu \, dr \, dt. \tag{4.4}$$

Варьируя его по f в предположении, что $\delta f(r,0) = \delta f(r,T) = 0$, получим после интегрирования по частям равенство

$$\int_0^T \int_0^R (u_t + p_r)\, \delta f \, dr \, dt + \int_0^T (\bar{u}R' - \bar{p})\, \overline{\delta f} \, dt = 0. \tag{4.5}$$

Отсюда в силу произвольности δf и $\overline{\delta f}$ следует второе уравнение из (2.8) и краевое условие (2.6). Теорема доказана.

5. Приближенные решения. Будем искать приближенные решения задачи (2.6)–(2.9) как экстремали функционала (4.1) в классах функций вида (3.2) с искомой функцией $R(t)$ при условии, что функции V и P удовлетворяют соотношению (3.3).

При заданных функциях V и P функционал (4.1) принимает вид

$$S(R) = \int_0^T \left(\frac{1}{2} A(V) R'^2 R^{\nu+1} - \frac{e}{\nu+1} R^{\nu+1}\right) dt - TB(P), \tag{5.1}$$

где

$$A(V) = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 x^{\nu+2}V^2(x)\,dx, \quad B(P) = \int\limits_0^1 x^{\nu}P(x)\,dx. \tag{5.2}$$

Подынтегральная функция $F(R, R')$ в правой части (5.1) не зависит явно от времени. Поэтому уравнения Эйлера функционала $S(R)$ имеют первый интеграл [2]: $-R'F_{R'} + F = C$. Легко проверить, что при подходящем выборе постоянной C первый интеграл совпадает с интегралом энергии (2.5) для функций u и p вида (3.2):

$$AR'^2R^{\nu+1} + B + \frac{e}{\nu+1}R^{\nu+1} = E. \tag{5.3}$$

Отметим, что с помощью операций дифференцирования и интегрирования из (5.3) следуют равенства

$$-AR''R^{\nu+2} = (\nu+1)AR'^2R^{\nu+1} + eR^{\nu+1},$$

$$\frac{1}{T}\int\limits_0^T R'^2R^{\nu+1}\,dt = \frac{1}{A}\left(E - B - \frac{e}{\nu+1}\,\frac{1}{T}\int\limits_0^T R^{\nu+1}\,dt\right).$$

Эти равенства можно привести к виду

$$\frac{1}{T}\int\limits_0^T R'^2R^{\nu+1}\,dt = a - b, \quad -\frac{1}{T}\int\limits_0^T R''R^{\nu+2}\,dt = \frac{\nu+1}{2}\,a, \tag{5.4}$$

где

$$a = \frac{1}{A}(E - B), \quad b = \frac{e}{(\nu+1)A}\,\frac{1}{T}\int\limits_0^T R^{\nu+1}\,dt. \tag{5.5}$$

Положим

$$f(r,t) = -r^{\nu+1}\ln R + R^{\nu+1}g(x) \qquad (x = r/R). \tag{5.6}$$

Из представлений (4.3) следуют равенства (3.2) для u и p с функциями

$$P(x) = \exp\{x^{-\nu}g'(x)\}, \quad V(x) = 1 - (\nu+1)x^{-\nu-1}g(x) + x^{-\nu}g'(x). \tag{5.7}$$

При таком выборе функций V и P соотношение (3.3) выполнено автоматически, и, как следствие, справедливо равенство (4.2).

Далее мы будем искать экстремаль функционала (4.4) в классах функций вида (5.6) при заданной функции $R(t)$. Множество функций вида (5.6) не содержит финитных по времени функций. Поэтому рассмотрим последовательность вариаций вида

$$\delta f_n = \varphi_n(t)R^{\nu+1}\,\delta g(x),$$

где $\varphi_n(t)$ — гладкие неотрицательные равномерно ограниченные функции. Они равны нулю при $t = 0$ и $t = T$ и сходятся к единице при $n \to \infty$ внутри интервала $(0, T)$. Подставляя δf_n в формулу (4.5) в пределе при $n \to \infty$ после замены r на x, получим

$$ax^{-(\nu-1)/2}\left(x^{(\nu+3)/2}V\right)' - bx(xV)' = P' \qquad (0 < x < 1); \tag{5.8}$$

$$P(1) = (a - b)V(1) \tag{5.9}$$

в силу произвольности $\delta g(x)$ и $\delta g(1)$.

На основании сказанного можно сформулировать задачу об отыскании приближенных решений.

Приближенная постановка I. Требуется найти функцию $R(t)$ на интервале $(0, T)$, функции $V(x)$ и $P(x)$ на интервале (0,1), а также параметры a и b из интеграла энергии (5.3), уравнений (3.3) и (5.8), соотношений (5.5), краевого условия (5.9) и начального условия $R(0) = 0$. При $x = 0$ должно выполняться одно из двух условий:

$$\lim_{x\to 0} xV(x) = 0 \quad \text{или} \quad P(0) = 0.$$

В первом случае свободная поверхность отсутствует. В случае второго краевого условия она есть, если $\lim\limits_{x\to 0} xV(x) > 0$.

Замечание 6. При $e = 0$ приближенная постановка совпадает с задачей об отыскании автомодельных решений.

Более простую модель получим, если в равенстве (5.6) возьмем семейство функций $g(x, \xi)$, зависящее от векторного параметра $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_k)$. В этом случае определенные формулами (5.7) функции P и V будут известными функциями переменного x и параметра ξ, удовлетворяющими соотношению (3.3). Определенные в (5.2) величины A и B есть известные функции от ξ. Штрихами, как и ранее, обозначаются производные по x.

Будем искать экстремаль функционала (4.4) в классе функций (5.6) с функциями $g(x, \xi)$, принадлежащими описанному выше семейству.

Вариация функционала (4.4) по R дает, как и ранее, интеграл энергии (5.3).

Для вывода уравнений, определяющих параметр ξ, рассмотрим последовательность возмущений функции f вида

$$\delta f_n = \varphi_n(t)\psi_n(x)\,\delta\xi\,\nabla_\xi\, g(x, \xi)R^{\nu+1}(t).$$

Последовательности $\varphi_n(t)$ и $\psi_n(x)$ состоят из неотрицательных равномерно ограниченных функций; $\varphi_n(t) = 0$ при $t = 0$ и $t = T$; $\psi_n(x) = 0$ при $x = 0$ и $x = 2$. Кроме того, $\varphi_n(t) \to 1$, $\psi_n(x) \to 1$ при $n \to \infty$. Переходя в равенстве (4.5) к пределу по n, получим после замены r на x

$$\frac{\nu+1}{2}\, a\int\limits_0^1 xV\nabla_\xi\, g\, dx + (a-b)\int\limits_0^1 x(xV)'\nabla_\xi\, g\, dx = \int\limits_0^1 P'\nabla_\xi\, g\, dx + [(a-b)V(1,\xi) - P(1,\xi)]\nabla_\xi\, g(1,\xi)$$

в силу произвольности $\delta\xi$. Интегрируя по частям и исключая с помощью формул (5.7) функцию g, получим

$$\Big(\frac{\nu+3}{2}\, a - (\nu+2)b\Big)\int\limits_0^1 x^{\nu+2}VP^{-1}\nabla_\xi P\, dx + \\ + \Big(\frac{\nu-1}{2}\, a + b\Big)\int\limits_0^1 x^{\nu+2}V\nabla_\xi V\, dx = (\nu+1)\int\limits_0^1 x^\nu\nabla_\xi P\, dx. \qquad (5.10)$$

Приближенная постановка II. Пусть имеется зависящее от векторного параметра ξ семейство функций $V(x, \xi)$ и $P(x, \xi)$, удовлетворяющих равенству (3.3) и одному из краевых условий:

$$\lim_{x\to 0} xV(x, \xi) = 0 \quad \text{или} \quad P(0, \xi) = 0. \qquad (5.11)$$

Требуется найти функцию $R(t)$ на интервале $(0,T)$, параметры a, b и ξ из интеграла энергии (5.3), системы уравнений (5.10), равенств (5.4) и начального условия $R(0) = 0$.

Предположим далее, что уравнения (5.10) и первое из соотношений (5.4) определяют искомые величины $\xi(b)$ и $a(b)$ в зависимости от параметра b. Тогда формулы (5.2) определяют функции $A(b)$ и $B(b)$. Задача об отыскании положения сильного разрыва сводится к нахождению параметра b и функции $R(t)$ из интеграла энергии (5.3), второго из равенств (5.4) и начального условия $R(0) = 0$.

Для решения уравнения (5.3) при $e \neq 0$ целесообразно положить

$$M(b) = \{e^{-1}(\nu+1)[E-B]\}^{1/(\nu+1)}, \quad K^2(b) = A^{-1}M^{-\nu-3}(E-B)$$

и ввести новую искомую функцию $Z = M^{-1}R$. Уравнение на $Z(t,b)$

$$Z'Z^{(\nu+1)/2} = K(1-Z^{\nu+1})^{1/2}$$

с нулевыми начальными данными при $t=0$ определяет зависимость t от Z и b:

$$t = K^{-1}F_\nu(Z), \tag{5.12}$$

где

$$F_\nu(Z) = \int_0^Z Z^{(\nu+1)/2}(1-Z^{\nu+1})^{-1/2}\,dZ. \tag{5.13}$$

Равенство (5.12), рассматриваемое как уравнение на Z, определяет $Z_*(b) = Z(T,b)$. В соответствии со вторым равенством (5.4) параметр b должен находиться из уравнения

$$b = T^{-1}(E-B)K^{-1}G_\nu(Z_*), \tag{5.14}$$

где

$$G_\nu(Z) = \int_0^Z Z^{3(\nu+1)/2}(1-Z^{\nu+1})^{-1/2}\,dZ. \tag{5.15}$$

Тем самым задача полностью определена. Она сведена к решению уравнения (5.14). Отметим, что при $\nu = 0, 1$ интегралы (5.13) и (5.15) вычисляются через элементарные функции. Например, при $\nu = 1$

$$F_1(Z) = 1-(1-Z^2)^{1/2}, \quad G_1(Z) = \frac{2}{3} - \frac{1}{3}(2+Z^2)\sqrt{1-Z^2}.$$

В соответствии с замечанием 4 в задачах с фазовыми переходами естественно выбрать T из условия $R'^2(T) = p_*/2$. В этом случае из интеграла энергии (5.3) находится предельное положение фронта фазового перехода $R_* = M(b)Z_*(b)$, где

$$Z_*(b) = \left(1 + \frac{\nu+1}{2e}\,Ap_*\right)^{-1/(\nu+1)}. \tag{5.16}$$

Уравнение на b принимает вид

$$b = (E-B)F_\nu^{-1}(Z_*)G_\nu(Z_*). \tag{5.17}$$

Последние два уравнения вместе с уравнениями (5.10) и первым из соотношений (5.4) являются системой для определения параметров ξ, a, b и Z_*.

В случае ударной волны ($e = 0$) ситуация гораздо проще. Из второго равенства (5.4) следует $b = 0$. Поэтому уравнения (5.10) и первое из соотношений (5.4) определяют параметры ξ и a. Функция $R(t)$ согласно первому равенству (5.4) имеет вид (3.1).

Пример 1. Пусть $e = 0$. Выберем семейства $V(x,\xi)$ и $P(x,\xi)$, входящие в определение приближенного решения задачи II в виде

$$V = \xi_1, \quad P = \xi_2 x^{(\nu+1)(\xi_1-1)} \qquad (\xi_1 > 0,\ \xi_2 > 0). \tag{5.18}$$

Уравнения (5.10) и первое из равенств (5.4) дают систему для определения параметров ξ_1, ξ_2 и a:

$$a\xi_1^3 = (\nu+3)\xi_2, \quad 2\xi_2 = a\xi_1^2, \quad \frac{a\xi_1^2}{2(\nu+3)} + \frac{\xi_2}{\xi_1(\nu+1)} = E.$$

Отсюда находим

$$\xi_1 = \frac{\nu+3}{2}, \quad \xi_2 = (\nu+1)E, \quad a = \frac{8(\nu+1)}{(\nu+3)^2}E. \tag{5.19}$$

С учетом (3.1) получим

$$R(t) = (2(\nu+1)E)^{1/(\nu+3)} t^{2/(\nu+3)}.$$

Замечание 7. При $\nu = 1$ найденное приближенное решение совпадает с автомодельным решением (3.6). При $\nu = 0$

$$R(t) = 2^{1/3}E^{1/3}t^{2/3} \simeq 1{,}25992 E^{1/3}t^{2/3},$$

что хорошо согласуется с формулой (3.9). Вопросы о существовании точного решения в случае сферической симметрии и близости приближенного и точных решений здесь не обсуждаются.

Пример 2. Пусть $e \neq 0$ и (5.18) — семейство функций, определяющее решение задачи II. Предположим, что $e/p_* \ll 1$. Из системы (5.16), (5.17) следует, что $Z_* \ll 1$ и $\lambda = b/a \ll 1$. Параметр a в силу сказанного вычисляется по формуле (5.19). Поэтому для предельного положения фронта фазового перехода справедлива приближенная формула

$$R_* = (16(\nu+1)E/(\nu+3)^2 p_*)^{1/(\nu+1)}.$$

В этих выкладках затратами энергии на фазовые превращения мы пренебрегли. Их можно учесть относительно просто, если из уравнения (5.17) найти приближенное значение

$$\lambda = \frac{2(\nu+3)}{(\nu+1)(3\nu+5)}\,\frac{e}{p_*}.$$

Уравнения (5.10), (5.4) и (5.16) вместе с (5.2) определяют функции ξ_1, ξ_2, a, A и B переменных λ и E. Формула для предельного значения R_* весьма громоздка и поэтому не приводится.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 95-01-00859).

ЛИТЕРАТУРА

1. **Седов Л. И.** Методы подобия и размерности в механике. М.: Наука, 1965.
2. **Смирнов В. И.** Курс высшей математики. М.: Гостехтеоретиздат, 1957.

Поступила в редакцию 2/VII 1996 г.