интервале имеет один экстремум и тоже асимптотически приближается к нулю на бесконечности.

Когда $U_0 \neq 0$ и $V_0 \neq 0$, по методу фотоупругих покрытий фиксируется кривая общего вида (кривая *1* на фиг. 6), которую можно разделить на симметричное и кососимметричное распределение, используя условия, сформулированные выше. Теперь по фиг. 4 можно определить все параметры, определяющие полосу скольжения.

В качестве примера приведем результаты исследования деформаций в области полосы скольжения образца из магниевого сплава после разгрузки. Покрытие толщиной 80 мкм, выполненное из эпоксидного компаунда, было нанесено на образец до нагружения.

На фиг. 7 приведены фотографии картин полос для одного и того же участка образца, ориентированного так, что длинная сторона каждого снимка перпендикулярна направлению полосы скольжения. Снимки на фиг. 7 отличаются тем, что получены при различных значениях оптической разности в компенсаторе и, следовательно, дают полосы интерференции дробных порядков [1]. Для каждой полосы интерференции затем была определена соответствующая разность главных деформаций (указана на снимках справа). По результатам обработки этих картин получено распределение некоррегированной разности главных деформаций ε^* (см. фиг. 6) вдоль нормали к направлению полосы скольжения. Положение центра деформированной зоны найдено расчетным путем перебором по наилучшему удовлетворению условий, сформулированных выше. После чего кривую *1* можно было рассматривать как суперпозицию симметричной и кососимметричной составляющих (кривые *2* и *3* соответственно). Теперь, используя графики фиг. 4, можно определить параметры полосы скольжения по следующей схеме: $\varepsilon^*_{max} = 1{,}84\%$, $0{,}75\varepsilon^*_{max} = 1{,}38\%$, $\xi = 0{,}1$ (штриховая линия на фиг. 6); тогда (см. фиг. 4) $d/2a = 8{,}5$, $2a = 9{,}41$ мкм ($d = 80$ мкм), $\varkappa = \varepsilon^*_{max}/\varepsilon_0 = 0{,}8$, $\varepsilon_0 = 23\%$, $2U_0 = 2{,}16$ мкм. По кривой *1* фиг. 4 определяем величину $r = 0{,}48$, $\operatorname{tg} \beta = 0{,}84$, $2V_0 = 16{,}47$ мкм.

Поступила 10 X 1982

ЛИТЕРАТУРА

1. **Александров А. Я., Ахметзянов М. Х.** Поляризационно-оптические методы механики деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1973.
2. **Вишняков Я. Д.** Современные методы исследования структуры деформированных кристаллов. М.: Металлургия, 1975.
3. **Наборро Ф. Р., Базинский З. С., Холт Д. Б.** Пластичность чистых монокристаллов. М.: Металлургия, 1967.
4. **Попкович А. Ф.** Теория упругости М.: Оборонгиз, 1939.

УДК 539.3

ОБ ИЗГИБЕ СЕКТОРА СИЛЬНО АНИЗОТРОПНОГО УПРУГОГО КОЛЬЦА

Ю. А. БОГАН

(Новосибирск)

При помощи модификации метода [1] построена асимптотика решения первой краевой задачи изгиба (на границе заданы прогиб и угол поворота) сектора цилиндрически ортотропного кольца в предположении, что жесткость на изгиб в окружном направлении значительно выше жесткости на изгиб в радиальном. Применение метода [1] в этой ситуации осложнено наличием у области угловых точек, что приводит к появлению в асимптотике функций пограничного слоя двух разных типов: одного, описываемого обыкновенными дифференциальными уравнениями вдоль характеристической части границы, и другого, описываемого уравнениями в частных производных и сосредоточенного вблизи угловых точек. Единственная известная автору краевая задача для уравнения в частных производных, в асимптотике которой участвуют функции углового пограничного слоя, изучалась в [2]. Ситуация [2] проще ситуации данной работы, так как в [2] при $\varepsilon = 0$ понижается порядок уравнения.

1. Пусть Q — область следующего вида: $Q = \{(r, \theta), 0 < a \leqslant r \leqslant b, 0 \leqslant \theta \leqslant c\}$. Введем безразмерную радиальную координату $x = \ln (r/a)$ и положим $x_0 = \ln (b/a)$, $\varepsilon^2 = D_{11}D_{22}^{-1}$, $b_{12} = D_{12}D_{11}^{-1}$, $b_{66} = D_{66}D_{11}^{-1}$, $m = 2(b_{12} + 2b_{66})$, где D_{ij} — жесткости пластины на изгиб. Уравнение изгиба цилиндрически-ортотропной пластины в предположении справедливости гипотез Кирхгофа — Лява имеет вид [3]

$$(1.1)\qquad \frac{\partial^4 w^\varepsilon}{\partial\theta^4}+2\frac{\partial^2 w^\varepsilon}{\partial\theta^2}-\frac{\partial^2 w^\varepsilon}{\partial x^2}+2\frac{\partial w^\varepsilon}{\partial x}+\varepsilon^2\left[\frac{\partial^4 w^\varepsilon}{\partial x^4}-4\frac{\partial^3 w^\varepsilon}{\partial x^3}+5\frac{\partial^2 w^\varepsilon}{\partial x^2}-2\frac{\partial w^\varepsilon}{\partial x}+\right.$$
$$\left.+m\left(\frac{\partial^4 w^\varepsilon}{\partial x^2\partial\theta^2}-2\frac{\partial^3 w^\varepsilon}{\partial x\partial\theta^2}+\frac{\partial^2 w^\varepsilon}{\partial\theta^2}\right)\right]=f.$$

Подставим для уравнения (1.1) краевую задачу A_ε:

$$(1.2)\qquad w^\varepsilon(x,0)=f_1(x),\quad w^\varepsilon(x,c)=f_2(x),\quad \frac{\partial w^\varepsilon}{\partial\theta}(x,0)=f_3(x),\quad \frac{\partial w^\varepsilon}{\partial\theta}(x,c)=f_4(x);$$

$$(1.3)\qquad w^\varepsilon(0,\ \theta)=g_1(\theta),\ w^\varepsilon(x_0,\ \theta)=g_2(\theta);$$

$$(1.4)\qquad \frac{\partial w^\varepsilon}{\partial x}(0,\theta)=g_3(\theta),\quad \frac{\partial w^\varepsilon}{\partial x}(x_0,\theta)=g_4(\theta).$$

Все рассмотрения в дальнейшем будем вести при помощи формальных степенных по ε рядов. Предполагается, что $f\in C^\infty(Q\cup\partial Q)$, $g_k(\theta)$, $f_k(\theta)\in C^\infty(\partial Q)$, $k=1,2,3,4$, ∂Q — граница области Q.

Ищем приближенное решение задачи A_ε в виде

$$(1.5)\qquad w^0(x,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon^n w_n(x,\theta).$$

Подставив (1.5) в (1.1) и собрав подобные члены при одинаковых степенях ε, получим рекуррентно-связанную систему уравнений:

$$(1.6)\qquad L(w_0)=f,\ L(w_1)=0,\ L(w_n)+M(w_{n-2})=0,\ n\geqslant 2,$$

где $L(w)=\partial^4 w/\partial\theta^4+2\partial^2 w/\partial\theta^2-\partial^2 w/\partial x^2+2\partial w/\partial x$; $M(w)$ — дифференциальный оператор, стоящий при степени ε^2 в (1.1). Предельная краевая задача A_0 состоит в решении уравнения $L(w_0)=f$ при граничных условиях (1.2), (1.3), где w^ε следует заменить на w_0. Отметим, что граничные условия (1.4) при этом, вообще говоря, не выполняются, так как уравнения для w_n из системы (1.6) имеют второй порядок по переменной x, а не четвертый. Для компенсации возникающей невязки необходимо построить функции пограничного слоя вблизи сторон $x=0$, x_0.

Построим функции пограничного слоя вблизи стороны $x=0$ (вблизи стороны $x=x_0$ они строятся аналогично при введении растянутой координаты $t_1=(x_0-x)/\varepsilon$). Введем вблизи $x=0$ растянутую координату $t=x/\varepsilon$ и, подставив $x=t\varepsilon$ в однородное уравнение (1.1), получим

$$(1.7)\qquad \varepsilon^{-2}\left(\frac{\partial^4 w}{\partial\theta^4}+2\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2}-\varepsilon^{-2}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+2\varepsilon^{-1}\frac{\partial w}{\partial t}\right)+\varepsilon^{-4}\frac{\partial^4 w}{\partial t^4}-4\varepsilon^{-3}\frac{\partial^3 w}{\partial t^3}+5\varepsilon^{-2}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}-$$
$$-2\varepsilon^{-1}\frac{\partial w}{\partial t}+m\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\left(\varepsilon^{-2}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}-2\varepsilon^{-1}\frac{\partial w}{\partial t}+w\right)=0.$$

Ищем приближенное решение уравнения (1.7) в виде

$$(1.8)\qquad w^1(t,\theta)=\varepsilon\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon^n w_{n,0}(t,\theta).$$

Подставляя (1.8) в (1.7) и собирая вместе члены при совпадающих степенях ε, получим рекуррентно-связанную систему уравнений:

$$(1.9)\qquad \frac{\partial^4 w_{0,0}}{\partial t^4}-\frac{\partial^2 w_{0,0}}{\partial t^2}=0,\quad \frac{\partial^4 w_{n,0}}{\partial t^4}-\frac{\partial^2 w_{n,0}}{\partial t^2}=M_n^0\ (w_{n-1,0},\ldots,w_{0,0}),\quad n\geqslant 1.$$

Конкретный вид дифференциальных операторов M_n^0 в дальнейшем несуществен и легко восстанавливается из (1.7). Потребуем, чтобы сумма $w^0(x,\theta)+w^1(t,\theta)$ удовлетворяла граничным условиям (1.4), (1.3) при $x=0$. Отсюда получим, что функции $w_n(x,\theta)$; $w_{n,0}(t,\theta)$ удовлетворяют следующим граничным условиям при $x=0$ и $t=0$:

$$(1.10)\qquad \frac{\partial w_{0,0}}{\partial t}(0,\theta)=g_3(\theta)-\frac{\partial w_0}{\partial x}(0,\theta),\quad \frac{\partial w_{n,0}}{\partial t}(0,\theta)=-\frac{\partial w_n}{\partial x}(0,\theta),$$
$$w_n(0,\theta)=-w_{n-1,0}(0,\theta),\ n\geqslant 1.$$

Для полной определенности функций $w_n(x, \theta)$ необходимо потребовать, чтобы при $n \geqslant 1$

$$(1.11) \qquad \frac{\partial^k w_n}{\partial \theta^k}(0, \theta) = \frac{\partial^k w_n}{\partial \theta^k}(x_0, \theta) = 0, \quad k = 0, 1.$$

Как следует из [1] и граничных условий (1.10), функции $w_{n,0}(t, \theta)$ имеют вид

$$w_{n,0}(t, \theta) = \sum_{j=0}^{n-1} \omega_{nj}(\theta)\, t \, \exp(-t)$$

и однозначно определяются из уравнений (1.9) в предположении, что $w_{n,0}(+\infty, 0) = 0$. Характеристическое уравнение для системы (1.9) $\lambda^2(\lambda^2 - 1) = 0$ имеет один корень с отрицательной вещественной частью; следовательно, вырождение задачи A_ε в задачу A_0 регулярно [1]. Аналогично предыдущему можно построить функции пограничного слоя $w_{n,1}(t_1, \theta)$ вблизи стороны $x = x_0$. Умножив $w_{n,0}(t, \theta)$ и $w_{n,1}(t_1, \theta)$ на срезающие функции [1] η и η_1, заметно отличные от нуля только вблизи сторон $x = 0$ и $x = x_0$ соответственно, получим асимптотическое разложение задачи A_ε в виде

$$(1.12) \qquad w^\varepsilon(x, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n w_n(x, \theta) + \varepsilon \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n [\eta w_{n,0}(t, \theta) + \eta_1 w_{n,1}(t_1, \theta)].$$

Заметим, однако, что представление (1.12) решения задачи A_ε вносит невязку в выполнение граничных условий при $\theta = 0$, c. Действительно, при $\theta = 0$ должно иметь место равенство

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n w_n(x, 0) + \varepsilon \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n [\eta w_{n,0}(t, 0) + \eta_1 w_{n,1}(t_1, 0)] = f_1(x),$$

и потому при $n \geqslant 1$ имеем

$$w_n(x, 0) = -\eta w_{n-1,0}(t, 0) - \eta_1 w_{n-1,1}(t_1, 0),$$

что противоречит (1.11), так как граничные условия для функций $w_n(x, \theta)$ не должны зависеть от ε.

2. Построим функции углового пограничного слоя вблизи точки (0, 0) (вблизи других точек они строятся аналогично).

Вблизи точки (0, 0) введем растянутые координаты $t = x/\varepsilon$, $\tau = \theta/\sqrt{\varepsilon}$ и, подставив $x = t\varepsilon$, $\theta = \tau\sqrt{\varepsilon}$ в однородное уравнение (1.1), получим

$$(2.1) \qquad \varepsilon^{-2}\left(\varepsilon^{-2}\frac{\partial^4 w}{\partial \tau^4} + 2\varepsilon^{-1}\frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} - \varepsilon^{-2}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2\varepsilon^{-1}\frac{\partial w}{\partial t}\right) + \varepsilon^{-4}\frac{\partial^4 w}{\partial t^4} -$$
$$- 4\varepsilon^{-3}\frac{\partial^3 w}{\partial t^3} + 5\varepsilon^{-2}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + m\varepsilon^{-1}\frac{\partial^2}{\partial \tau^2}\left(\varepsilon^{-2}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - 2\varepsilon^{-1}\frac{\partial w}{\partial t} + w\right) = 0.$$

Ищем приближенное решение уравнения (2.1) в виде

$$(2.2) \qquad w^2(t, \tau) = \varepsilon \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^{n/2} p_{n,0}(t, \tau).$$

Подставив (2.2) в (2.1) и приведя подобные члены, получим рекуррентно-связанную систему уравнений:

$$(2.3) \qquad \partial^4 p_{0,0}/\partial \tau^4 + \partial^4 p_{0,0}/\partial t^4 - \partial^2 p_{0,0}/\partial t^2 = 0,$$
$$\partial^4 p_{n,0}/\partial \tau^4 + \partial^4 p_{n,0}/\partial t^4 - \partial^2 p_{n,0}/\partial t^2 = Q_n(p_{n-1,0}, \ldots, p_{0,0}), \quad n \geqslant 1.$$

Дифференциальные операторы Q_n легко восстанавливаются по уравнению (2.1); их конкретный вид для дальнейшего несуществен. Потребуем, чтобы сумма

$$(2.4) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n w_n(x, \theta) + \varepsilon \sum_{n=0}^{\infty} \left[\varepsilon^n w_{n,0}(t, \theta) + \varepsilon^{n/2} p_{n,0}(t, \tau)\right]$$

удовлетворяла граничным условиям задачи A_ε при $\theta = 0$ и $x = 0$. Отсюда имеем граничные условия для функций $p_{n,0}(t, \tau)$ при $t = 0$ и $\tau = 0$:

$$(2.5) \qquad p_{n,0}(0, \tau) = \frac{\partial p_{n,0}}{\partial t}(0, \tau) = 0, \quad n \geqslant 0,$$
$$p_{2n,0}(t, 0) = -w_{n,0}(t, 0), \quad p_{2n+1,0}(t, 0) = 0.$$

$$\frac{\partial p_{2n,0}}{\partial\tau}(t,0)=0,\quad \frac{\partial p_{2n+1,0}}{\partial\tau}(t,0)=-\frac{\partial w_{n,0}}{\partial\theta}(t,0).$$

Так как уравнения (2.3) являются эллиптическими, а краевая задача (2.5) — корректной, решения $p_{n,0}(t,\tau)$, $n=0,1,\ldots$ существуют, и по [4] для них конечен интеграл

$$\int\limits_K\left\{\sum_{p=0}^{2}\sum_{q=0}^{2-p}(t^2+\tau^2)^{2-p-q}\left|\frac{\partial^{p+q}}{\partial t^p\partial\tau^q}p_{n,0}(t,\tau)\right|^2\right\}dt\,d\tau,$$

где K — квадрант, $K=\{(t,\tau);\ t>0,\ \tau>0\}$. При $t\to+\infty$ $p_{n,0}(t,\tau)$ убывают экспоненциально. Умножив третий член в (2.4) на срезающую функцию, заметно отличную от нуля только вблизи вершины угла (0, 0), получим асимптотическое разложение задачи A_ε вблизи вершины угла.

Таким образом, полное асимптотическое разложение задачи A_ε состоит из семи рядов; ряда (1.5), описывающего основное напряженное состояние, двух рядов, описывающих погранслой вдоль характеристической части границы, и четырех, определяющих угловые погранслои.

Отметим, что при достаточно большой гладкости граничных данных асимптотическое разложение задачи A_ε допускает дифференцирование и позволяет построить асимптотические разложения для усилий, моментов и перерезывающих сил. Обозначим через ε_θ окружную деформацию. Если $\varepsilon_\theta(w_n)\neq 0$, $n=0,1$, то асимптотические разложения момента M_θ и перерезывающих сил N_r, N_θ начинаются со степени ε^{-2}.

При $\varepsilon_\theta(w_n)=0$, $n=0,1$ пластина нерастяжима в окружном направлении.

В заключение отметим, что совершенно аналогично (при формальном усложнении выкладок) можно построить асимптотику задачи изгиба симметрично собранной анизотропной прямоугольной слоистой оболочки [5] при строго отличной от нуля кривизне семейства армирующих волокон.

Поступила 10 V 1983

ЛИТЕРАТУРА

1. **Вишик М. И., Люстерник Л. А.** Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений.— УМН, 1957, т. 12, № 5.
2. **Назаров С. А.** Сверхстепенной пограничный слой в задаче об изгибе напряженной пластины.— Вестн. ЛГУ. Сер. мат., мех., астр., 1980, № 1.
3. **Лехницкий С. Г.** Анизотропные пластинки. М.: ОГИЗ, 1947.
4. **Кондратьев В. А.** Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками.— Тр. Моск. мат. о-ва, 1967, т. 16, с. 219.
5. **Амбарцумян С. А.** Теория анизотропных оболочек. М.: Физматгиз, 1961.

УДК 531.36 : 538.31

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ МАГНИТНОЙ ПОДВЕСКИ В ПОЛЕ ПОСТОЯННЫХ МАГНИТОВ

И. И. КОЖУХОВСКИЙ, В. И. МЕРКУЛОВ

(*Киев, Новосибирск*)

Вопрос о подвеске тела с помощью постоянных магнитов в течение длительного времени привлекает к себе внимание исследователей. Подробную библиографию работ в этом направлении, анализ состояния проблемы, а также оригинальные результаты можно найти в [1, 2].

Основным результатом в этой проблеме является теорема Ирншоу, которая доказывает неустойчивость таких подвесок. Однако эта теорема относится к стационарным состояниям и, как мы покажем, несправедлива применительно к динамическим системам.

1. Рассмотрим схему расположения магнитов, изображенную на фиг. 1. Будем рассматривать движение бесконечно длинного стержня в магнитном канале вдоль оси Ox. Вес стержня $P=mg$ уравновешивается магнитами одного знака *1* и *2*. По сторонам канала создана система постоянных магнитов чередующейся полярности, с которой взаимодействует такая же система на стержне. Будем полагать, что шаг полюсов вдоль оси Ox равен $\lambda=2\pi/k$, k — волновое число. Материал магнитов будем считать насыщенным и полагать в нем $\mu=1$ (μ — относительная магнитная проницаемость), как и в вакууме. Считая также, что магнитная система *3* имеет вертикальную протяженность, будем пренебрегать изменением сил взаимодействия магнитов *3* и *4* при вертикальных колебаниях стержня.