УДК 539.3

Ю.А. Боган

АНТИПЛОСКАЯ ДЕФОРМАЦИЯ ПЛОСКОСТИ С ЩЕЛЬЮ, ЗАПОЛНЕННОЙ МАТЕРИАЛОМ С МАЛЫМ МОДУЛЕМ СДВИГА

1. Предположим, что щель занимает отрезок $(-a,a)$ оси x; математическая задача формулируется следующим образом (обозначим через R^2_+ верхнюю полуплоскость $(y > 0)$, через R^2_- — нижнюю $(y < 0)$): определить гармонические функции u_1 и u_2 соответственно в верхней и нижней полуплоскостях такие, что

$$u_1 = u_2,\ u_{1y}(x, +0) = u_{2y}(x, -0) \text{ при } |x| \geqslant a; \tag{1.1}$$

$$u_{1y}(x, +0) = k[u] + f(x),\ u_{2y}(x, -0) = k[u],\ |x| \leqslant a, \tag{1.2}$$

где $[u] = u_1(x, +0) - u_2(x, -0)$; $k > 0$. Предполагается, что на бесконечности напряжения обращаются в нуль.

Условия (1.1) — это идеальный контакт при $|x| \geqslant a$, условия (1.2) возникают, если предположить, что на участке межфазной границы $(-a,a)$ имеется тонкая прослойка материала с малым модулем сдвига (см. вывод этого условия сопряжения в [1, 2]). В стационарной теплопроводности данной задаче соответствует контакт тел с тонкой слабопроводящей прослойкой [2].

В настоящей работе построена система гиперсингулярных уравнений для задачи (1.1), (1.2) и исследовано ее поведение при малом и большом k. Показано, что существует решение этой системы уравнений в определенном ниже весовом классе функций, непрерывных по Гельдеру. В теории упругости условиям (1.2) отвечают условия вязкого трения на межфазной границе и k называется коэффициентом вязкости; в дальнейшем будем придерживаться этой терминологии.

В (1.2) функция $f(x)$ моделирует действие заданных поверхностных сил.

2. Перейдем к формальному выводу системы интегральных уравнений для задачи (1.1), (1.2). Ввиду обращения напряжений на бесконечности в нуль естественно искать u_1 и u_2 как интеграл Пуассона для нижней и верхней полуплоскости соответственно

$$u_1 = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{m_1(t)y\,dt}{(x-t)^2+y^2}; \tag{2.1}$$

$$u_2 = -\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{m_2(t)y\,dt}{(x-t)^2+y^2} \tag{2.2}$$

с неизвестными пока плотностями m_1 и m_2. Из (2.1), (2.2) следует, что $u_1(x, +0) = m_1(x)$, $u_2(x, -0) = m_2(x)$, и потому при $|x| \geqslant a$ $m_1(x) = m_2(x)$. Вычислив $u_{1y}(x, +0)$ и $u_{2y}(x, -0)$, получим

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{m_1(t) + m_2(t)dt}{(x-t)^2} = 0$$

при $|x| \geqslant a$, но тогда естественно считать, что $m_1(x) + m_2(x) = 0$ и $m_1(x) = m_2(x) = 0$ при $|x| \geqslant a$. Интервал интегрирования $(-\infty,\infty)$ при этом сокращается до интервала $(-a,a)$ и условия сопряжения (1.2) приводят к системе уравнений:

$$(2.3)\qquad -\frac{1}{\pi}\int_{-a}^{+a}\frac{m_2(t)dt}{(x-t)^2} = k(m_1(x) - m_2(x));$$

$$(2.4)\qquad +\frac{1}{\pi}\int_{-a}^{+a}\frac{m_1(t)dt}{(x-t)^2} = k(m_1(x) - m_2(x)) + f(x)\,.$$

Отметим, что

$$Dm(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-a}^{+a}\frac{m(t)dt}{(x-t)^2}$$

— это гиперсингулярный интеграл, и его следует понимать как конечную часть расходящегося интеграла по Адамару [3]. При $f \in C^{1,\alpha}(a,b)$ — банахову пространству функций, непрерывных и имеющих первую непрерывную производную на отрезке (a,b), причем первая производная удовлетворяет условию Гельдера с показателем $\alpha < 1$, $Dm(x)$ вычисляется по формуле

$$\text{p.f.}\int_a^b\frac{f(t)dt}{(x-t)^2} = -\frac{f(a)}{x-a} - \frac{f(b)}{b-x} - \text{v.p.}\int_a^b\frac{f'(t)dt}{x-t}\,.$$

Здесь p.f. и v.p. — конечная часть по Адамару расходящегося интеграла и главное значение по Коши сингулярного интеграла соответственно. Положим $m(x) = m_1(x) + m_2(x)$, $s(x) = m_1(x) - m_2(x)$. После сложения и вычитания уравнений (2.3) и (2.4) получим два равносильных:

$$(2.5)\qquad \frac{1}{\pi}\int_{-a}^{+a}\frac{s(t)dt}{(x-t)^2} = 2ks(x) + f(x);$$

$$(2.6)\qquad \frac{1}{\pi}\int_{-a}^{+a}\frac{m(t)dt}{(x-t)^2} = f(x)\,.$$

Введем банахово пространство $D^{1\alpha}$ функций $s(x)$, обращающихся в нуль при $x = \pm a$, таких, что $s'(x) = g'^*(x)(a^2 - x^2)^{-1/2}$ $(g'^*(x) \in C^{1\alpha})$ с нормой

$$\|\varphi\|_{D^{1\alpha}} = \|\varphi\|_C + \|\varphi'^*\|_{C^{0\alpha}}.$$

Рассмотрим уравнение (2.5). Его можно записать так:

$$(2.7)\qquad \frac{d}{dx}\int_{-a}^{+a}\frac{s(t)dt}{t-x} = 2ks(x) + f(x)\,.$$

Обращая сингулярный интеграл в (2.7) в классе ограниченных при $x = \pm a$ функций, получим

$$(2.8)\qquad s(x) = -\frac{1}{\pi}\sqrt{a^2 - x^2}\int_{+a}^{-a}\frac{\left(2k\int_{-a}^{t} s(\alpha)d\alpha + F(x) + C\right)dt}{\sqrt{a^2 - t^2}(t-x)}$$

при выполнении условия разрешимости

$$\int_{+a}^{-a}\frac{\left(2k\int_{-a}^{t} s(\alpha)d\alpha + F(x) + C\right)dt}{\sqrt{a^2 - t^2}} = 0,$$

что позволяет определить постоянную C. Изменив порядок интегрирования в (2.8), для $s(x)$ имеем интегральное уравнение Фредгольма второго рода:

$$s(x) = -\frac{k}{\pi}\int_{-a}^{+a} s(t)k(t,x)dt - \frac{1}{\pi}\int_{-a}^{+a} f(t)k(t,x)dt\,.$$

Здесь

$$k(t,x) = \frac{1}{2}\ln\frac{a^2 - tx + \sqrt{(a^2 - x^2)(a^2 - t^2)}}{a^2 - tx - \sqrt{(a^2 - x^2)(a^2 - t^2)}};$$

ядро $k(x,t) \in L^2(-a,a)$. Отметим, что (2.5) заменой $s(x) = g'(x)$ можно привести к уравнению Прандтля в теории тонкого крыла.

Уравнение (2.6) имеет явное решение, ограниченное при $x = \pm a$. Действительно, проинтегрировав (2.6) по x, получим

$$\frac{1}{\pi}\int_{-a}^{+a}\frac{m(t)dt}{t - x} = \int_{-a}^{x} f(t)dt + C = F(x) + C,$$

$$m(x) = -\frac{1}{\pi}\sqrt{a^2 - x^2}\int_{-a}^{+a}\frac{F(t)dt}{\sqrt{a^2 - t^2}(t - x)},$$

если выполнено условие разрешимости в классе ограниченных функций

$$C = -\frac{1}{\pi}\int_{-a}^{+a}\frac{F(x)dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

На основании результатов [4] решения уравнений (2.5) и (2.6) при $f(x) \in C^{0,\alpha}$ принадлежат $D^{1,\alpha}$. Напомним, что при этом m_1 и m_2 обращаются в нуль на концах интервала, а их производные могут иметь корневые особенности. Как доказано в [4], решение уравнения (2.5) при малом k можно построить либо методом последовательных приближений, либо в виде сходящегося степенного ряда по k. Более того, там дана методика сведения уравнения Прандтля к эквивалентной бесконечной системе линейных алгебраических уравнений, применимая и в изучаемом здесь случае. При большом k уравнение (2.5) становится сингулярно возмущенным и его приближенное решение может быть получено методом сращиваемых асимптотических разложений. Положим $k = \varepsilon^{-1}$. Тогда уравнение (2.5) можно записать в виде

$$\frac{\varepsilon}{\pi}\int_{-a}^{+a}\frac{s(t)dt}{(x - t)^2} = 2s(x) + \varepsilon f(x). \tag{2.9}$$

Представляя решение этого уравнения как ряд по степеням ε

$$s(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon^n s_n(x),$$

получим, что $s_0(x) = 0$,

$$s_1(x) = -\frac{1}{2}f(x), \quad s_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-a}^{+a}\frac{s_{n-1}(t)dt}{(x - t)^2}, \quad n > 1,$$

и поэтому граничные условия обращения $s(x)$ в нуль при $x = \pm a$ выполнить невозможно. Подробно методика построения асимптотики решения уравнения (2.9) при малом ε описана в [5].

Отметим, что в этой задаче, в отличие от обычных задач теории трещин, только касательное напряжение τ_1 имеет корневую особенность при $x = \pm a$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Самарский А.А., Андреев В.Б. Разностные методы для эллиптических уравнений. — М.: Наука, 1976.
2. Sanchez-Palencia E. Non-homogeneous media and vibration theory. — Berlin: Springer, 1980. — (Lect. not. phys.; 127).
3. Wendland W.L., Stephan E.P. A hypersingular boundary integral method for two-dimensional screen and crack problems // Arch. rat. mech. anal. — 1990. — V. 112. — P. 363—390.

4. Александров В.М., Коваленко Е.В. Задачи механики сплошных сред со смешанными граничными условиями. — М.: Наука, 1986.
5. Nemat-Nasser S., Willis J.R. Singular perturbation solution of a class of singular integral equations // Quart. Appl. Math. — 1990. — V. 48, N 4. — P. 741—754.

г. Новосибирск *Поступила 14/XII 1993 г.*

УДК 539.376

М.Н. Кирсанов, В.Д. Клюшников

ОСОБЫЕ ТОЧКИ ПРОЦЕССА ДЕФОРМИРОВАНИЯ И ВЫПУЧИВАНИЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ В УСЛОВИЯХ ПОЛЗУЧЕСТИ

Для анализа выпучивания реологических систем в [1] предложен вариант псевдобифуркационного подхода, уточняющий в постановочной части раннюю версию [2]. Основой подхода явилось понятие особой (или псевдобифуркационной) точки процесса деформирования. При достижении этой точки система критическим образом реагирует на задание в качестве начальных данных для возмущенного движения приращений высших производных прогиба. Низшие производные и сам прогиб при этом неограниченно растут. Первая точка получившейся последовательности совпадает с критерием [3].

В настоящей работе критерий [1] используется для решения трехмерных задач. Основа решения — метод упругого эквивалента [2], суть которого состоит в разделении поставленной задачи на две. В первой вычисляется критическая нагрузка соответствующей упругой конструкции. Во второй задаче, которая связана только с определяющим соотношением, отыскивается некоторый модуль, выражающий приращение напряжений через приращение деформаций в момент достижения особой точки. Замена модуля Юнга в первой задаче на найденный (модуль упругого эквивалента) дает окончательное решение.

Для выявления особых точек составляется система уравнений, которую будем называть определяющей. При непосредственном нахождении особых точек (что возможно в простейших случаях) такая система составляется для приращений прогиба и его производных, для чего используется уравнение равновесия. В методе упругого эквивалента определяющая система связывает приращения деформации ползучести и ее производные по времени.

Нумерацию особых точек, в отличие от [1], будем вести с первого порядка. Таким образом, точка псевдобифуркации порядка N (в уточненной постановке) соответствует особой точке порядка $N + 1$.

1. Запишем соотношение теории деформаций [4]

$$\varepsilon_{ij} = (\varepsilon/S)S_{ij}. \tag{1.1}$$

Здесь ε_{ij} — деформация; S_{ij} — девиатор напряжений:

$$S_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma_{kk}/3; \tag{1.2}$$

S и ε — интенсивности соответствующих величин

$$S^2 = S_{ij}S_{ij},\ \varepsilon^2 = \varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}. \tag{1.3}$$

Определяющее соотношение выберем в степенной форме

$$\dot{p}p^{\alpha} = AS^{n}, \tag{1.4}$$