Теплофизика и аэромеханика, 2008, том 15, № 2

УДК 536.21

Проектирование армированных композитов с заданным набором эффективных теплофизических характеристик и некоторые смежные задачи диагностики их свойств

Ю.В. Немировский, А.П. Янковский

Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН, Новосибирск

Предложена модель теплопроводности ортогонально армированной волокнистой среды с дисперсным упрочнением связующего материала. На ее основе решена задача проектирования композита с заданным набором эффективных теплофизических свойств, а также построены решения некоторых обратных задач диагностики теплофизических свойств фазовых материалов и структуры армирования волокнистого композита по известным эффективным теплофизическим характеристикам.

ВВЕДЕНИЕ

Предположим, что из каких-то соображений требуется обеспечить заданное распределение теплофизических характеристик (эффективных коэффициентов теплопроводности Λ_{ij} и теплоемкости C) в некотором теле. (Например, при решении обратных задач оптимального или рационального проектирования исследователи обычно ограничиваются определением распределения эффективных теплофизических и термомеханических характеристик материала в анизотропном теле [1], не задаваясь вопросом о том, как можно эти свойства обеспечить на практике.)

Определим структуру армирования этого тела, при которой характеристики $\Lambda_{ij}(\mathbf{x})$, $C(\mathbf{x})$ имеют заданное значение в каждой точке $\mathbf{x}$. (Здесь $\mathbf{x}=\{x_1, x_2, x_3\}$ — прямоугольная декартова система координат, в которой рассматривается тело.)

Согласно постулату Онзагера [2], тензор коэффициентов теплопроводности Λ_{ij} симметричен ($\Lambda_{ij}=\Lambda_{ji}$, i, j = 1, 2, 3), поэтому в каждой точке $\mathbf{x}$ можно определить такую локальную ортогональную систему координат $\mathbf{x}'=\mathbf{f}(\mathbf{x})$ ($\mathbf{x}'=\{x'_1, x'_2, x'_3\}$), в которой тензор Λ'_{ij} имеет диагональный вид ($\Lambda'_{ij}=\Lambda'_{ji}=0$, $j\neq i$), причем $\Lambda'_{ii}\equiv\Lambda'_i>0$ (i, j = 1, 2, 3).

Пусть $\mathbf{n}=\{n_1, n_2, n_3\}$ — единичный вектор в одном из направлений x'_i (i = 1, 2, 3), тогда $\mathbf{n}$ определяется из однородной системы уравнений [3]

$$\sum_{j=1}^{3}\left(\Lambda_{ij}-\Lambda\delta_{ij}\right)n_j=0,\quad i=1,\ 2,\ 3, \tag{1}$$

где δ_{ij} — символ Кронекера.

Поскольку величины n_j не могут одновременно обращаться в нуль, то определитель системы (1) должен быть равен нулю, раскрывая который, приходим к алгебраическому уравнению

$$\Lambda^3 - I_1\Lambda^2 + I_2\Lambda - I_3 = 0, \tag{2}$$

где

$$I_1 = \sum_{i=1}^{3}\Lambda_{ii}, \quad I_2 = \begin{vmatrix}\Lambda_{11} & \Lambda_{12}\\ \Lambda_{21} & \Lambda_{22}\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}\Lambda_{22} & \Lambda_{23}\\ \Lambda_{32} & \Lambda_{33}\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}\Lambda_{11} & \Lambda_{13}\\ \Lambda_{31} & \Lambda_{33}\end{vmatrix}, \quad I_3 = \begin{vmatrix}\Lambda_{11} & \Lambda_{12} & \Lambda_{13}\\ \Lambda_{21} & \Lambda_{22} & \Lambda_{23}\\ \Lambda_{31} & \Lambda_{32} & \Lambda_{33}\end{vmatrix}. \tag{3}$$

Обозначим через Λ_i' (i = 1, 2, 3) три корня уравнения (2). Эти корни являются действительными, положительными (в силу постулата Онзагера) и не зависят от системы координат. Точно так же величины I_i (см. (3)) являются инвариантами, т. к., будучи элементарными симметрическими функциями корней Λ_i' как коэффициенты уравнения (2), они однозначно выражаются через эти корни. Поочередно подставляя Λ_1', Λ_2', Λ_3' в уравнения (1), приходим, используя условие нормировки

$$\sum_{j=1}^{3} n_j^2 = 1, \tag{4}$$

к трем системам направляющих косинусов $n_j^{(1)}, n_j^{(2)}, n_j^{(3)}$. Эти направляющие косинусы определяют три оси локальных координат x_1', x_2', x_3' с ортами $\mathbf{n}^{(1)}, \mathbf{n}^{(2)}, \mathbf{n}^{(3)}$ соответственно, называемые главными осями тензора коэффициентов теплопроводности.

Покажем, что направляющие косинусы $n_j^{(i)}$, соответствующие разным корням Λ_i', относятся к взаимно перпендикулярным прямым. Если $n_j^{(1)}$ связаны с корнем Λ_1', а $n_j^{(2)}$ — с корнем Λ_2', то из уравнения (1) имеем

$$\sum_{j=1}^{3}\Lambda_{ij}n_j^{(1)} = \Lambda_1' n_i^{(1)}, \quad \sum_{j=1}^{3}\Lambda_{ij}n_j^{(2)} = \Lambda_2' n_i^{(2)}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Умножим первое соотношение на $n_i^{(2)}$, а второе на $n_i^{(1)}$ и просуммируем по i:

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\Lambda_{ij}n_j^{(1)}n_i^{(2)} = \sum_{i=1}^{3}\Lambda_1' n_i^{(1)}n_i^{(2)}, \quad \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\Lambda_{ij}n_j^{(2)}n_i^{(1)} = \sum_{i=1}^{3}\Lambda_2' n_i^{(2)}n_i^{(1)}.$$

Левые части этих уравнений идентичны в силу симметрии тензора Λ_{ij}. Вычитая одно уравнение из другого, имеем

$$\sum_{i=1}^{3}\left(\Lambda_1' - \Lambda_2'\right)n_i^{(1)}n_i^{(2)} = 0.$$

Предполагая $\Lambda_1' \neq \Lambda_2'$, получим

$$\sum_{i=1}^{3} n_i^{(1)}n_i^{(2)} = 0,$$

откуда и следует ортогональность главных осей.

Материал, в котором $\Lambda_1' \neq \Lambda_2' \neq \Lambda_3' \neq \Lambda_1'$, будем называть теплофизически локально ортотропным. В таком материале главные оси определяются однозначно.

Если, например, $\Lambda_1' \neq \Lambda_2' = \Lambda_3'$, то направляющие косинусы $n_j^{(1)}$ определяются однозначно, а направления $n_j^{(2)}, n_j^{(3)}$ могут быть заданы произвольно в плоскости, перпендикулярной первому главному направлению (задаваемому косинусами $n_j^{(1)}$). Аналогичные результаты получаем в случаях $\Lambda_2' \neq \Lambda_1' = \Lambda_3'$ и $\Lambda_3' \neq \Lambda_1' = \Lambda_2'$. Такие материалы будем называть теплофизически локально монотропными (трансверсально-изотропными).

Наконец, если $\Lambda_1' = \Lambda_2' = \Lambda_3'$, то материал является теплофизически изотропным (при этом $\Lambda_{ij} = \delta_{ij}\Lambda_1'$) и любые три взаимно ортогональных направления $n_j^{(1)}$, $n_j^{(2)}$, $n_j^{(3)}$ являются главными.

Для обеспечения заданного распределения функций $\Lambda_i'(\mathbf{x})$, $C(\mathbf{x})$, $n_j^{(i)}(\mathbf{x})$ ($i, j = 1, 2, 3$) потребуем, чтобы тело было изготовлено из гибридного композитного материала следующей структуры: материал связующей матрицы дисперсно упрочнен K_0 семействами включений и армирован в направлениях x_i' (или, что то же самое, $\mathbf{n}^{(i)}$) количеством K_i ($i = 1, 2, 3$) семейств волокон. Необходимо определить удельное объемное содержание всех фаз композиции, при которых эффективные характеристики $\Lambda_i'(\mathbf{x})$, $C(\mathbf{x})$ принимают заданные значения в каждой точке **x** тела.

ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ ОРТОГОНАЛЬНО АРМИРОВАННОЙ ВОЛОКНИСТОЙ СРЕДЫ С ДИСПЕРСНЫМ УПРОЧНЕНИЕМ СВЯЗУЮЩЕГО

Выделим из тела в произвольной точке **x** малый представительный элемент объема $dx_1' \times dx_2' \times dx_3'$, ребра которого параллельны направлениям $\mathbf{n}^{(i)}$ ($i = 1, 2, 3$). Поскольку установить фактическое распределение тепловых потоков и температурного поля в пространственно армированном материале весьма затруднительно, то при нахождении практически пригодных зависимостей для определения трех независимых теплофизических характеристик в виде компонент линейной теплопроводности необходимо сделать некоторые допущения, аналогичные тем, что были использованы в [4] для вывода формул, определяющих эффективные коэффициенты теплопроводности однонаправлено армированной среды, которые хорошо согласуются с экспериментом [5–7].

1. Ортогонально армированный и дисперсно упрочненный материал в пределах представительного элемента представляет собой сплошное квазиоднородное ортотропное тело.

2. В пределах представительного элемента материалы всех фаз композиции однородны, причем основной материал (связующее) и дисперсные включения теплофизически ортотропны и главные оси анизотропии в этих фазах композиции совпадают с направлениями x_i' локальной системы координат, в которой рассматривается представительный элемент; материалы армирующих волокон монотропны (трансверсально-изотропны), причем главные оси анизотропии совпадают с продольными осями волокон, уложенных в направлениях x_i' ($i = 1, 2, 3$).

3. Связь между вектором теплового потока и градиентом температуры во всех фазах композиции подчиняется линейному закону теплопроводности Фурье.

4. На границах между связующим и всеми армирующими элементами реализуются условия идеального теплового контакта.

5. Приращение усредненной температуры T вдоль произвольно ориентированного отрезка элементарной длины dl равно сумме приращений температур в фазах композиции, которые этот отрезок пересекают.

6. Усредненный тепловой поток через произвольно ориентированную элементарную площадку подсчитывается по правилу простой смеси тепловых потоков в фазах композиции.

Дальнейший ход рассуждений такой же, как в [4], поэтому здесь ограничимся кратким изложением.

Введем следующие обозначения: λ_i^m, $\lambda_{i,k}^0$ — коэффициенты теплопроводности связующей матрицы и k-го ($k = 1, 2, ..., K_0$) семейства дисперсных включений в направлениях x_i' соответственно, $\lambda_{i,k}$, $\lambda_{i,k}^*$ — продольные и поперечные коэффициенты теплопроводности монотропных волокон k-го ($k = 1, 2, ..., K_i$) семейства, уложенных в направлении x_i' (i = 1, 2, 3), $\omega_{0,k}$, $\omega_{i,n}$ — удельное объемное содержание дисперсных включений k-го семейства и волокон n-го семейства, уложенных в направлении x_i' соответственно ($1 \le k \le K_0$, $1 \le n \le K_i$, i = 1, 2, 3), a — удельное объемное содержание связующего в представительном элементе.

Выполняется условие нормировки

$$a + \sum_{i=0}^{3} \sum_{k=1}^{K_i} \omega_{i,k} = 1. \tag{5}$$

Согласно шестому допущению, для компонент q_i усредненного вектора теплового потока имеем

$$q_i = a q_i^{\mathrm{m}} + \sum_{j=0}^{3} \sum_{k=1}^{K_j} \omega_{j,k} q_i^{(j,k)}, \quad i = 1, 2, 3, \tag{6}$$

где q_i^m, $q_i^{(0,k)}$ — компоненты вектора теплового потока в связующей матрице и дисперсных включениях k-го ($1 \le k \le K_0$) семейства в направлениях x_i' (i = 1, 2, 3) соответственно, $q_i^{(j,k)}$ — компоненты вектора теплового потока в волокнах k-го ($1 \le k \le K_j$) семейства, уложенных в направлении x_j' (j = 1, 2, 3).

Из пятого допущения по аналогии с [4] вытекает равенство

$$\partial_i T = a \partial_i T_{\mathrm{m}} + \sum_{j=0}^{3} \sum_{k=1}^{K_j} \omega_{j,k} \partial_i T_{j,k}, \quad i = 1, 2, 3, \tag{7}$$

где T — усредненная температура композиции, T_{m}, $T_{0,k}$ — температура в связующей матрице и в дисперсных включениях k-го ($1 \le k \le K_0$) семейства соответственно, $T_{j,k}$ — температура в волокнах k-го ($1 \le k \le K_j$) семейства, уложенных в направлении x_j' (j = 1, 2, 3), ∂_i — оператор частного дифференцирования по направлению x_i'.

Согласно четвертой гипотезе, в пределах представительного элемента имеют место равенства, вытекающие из условий сопряжения,

$$\partial_i T_{i,k} = \partial_i T_{\mathrm{m}} \quad (1 \le k \le K_i, \ i = 1, 2, 3), \tag{8}$$

$$q_i^{(0,k)} = q_i^{\mathrm{m}} \quad (1 \le k \le K_0, \;\; i = 1, 2, 3), \tag{9}$$

$$q_i^{(j,k)} = q_i^{\mathrm{m}} \quad (1 \le k \le K_j, \;\; j \ne i, \;\; i, \; j = 1, 2, 3). \tag{10}$$

Подставим равенства (9), (10) в уравнения (6), тогда получим

$$q_i = \left(a + \sum_{j=0,\,3}^{j \ne i} \sum_{k=1}^{K_j} \omega_{j,k} \right) q_i^{\mathrm{m}} + \sum_{k=1}^{K_i} \omega_{i,k} q_i^{(i,k)}, \quad i = 1, 2, 3. \tag{11}$$

В силу второго и третьего допущений имеют место соотношения

$$q_i^{\mathrm{m}} = -\lambda_i^{\mathrm{m}} \partial_i T_{\mathrm{m}} \quad (i = 1, 2, 3), \tag{12}$$

$$q_i^{(0,k)} = -\lambda_{i,k}^0 \, \partial_i T_{0,k} \quad (1 \le k \le K_0, \;\; i = 1, 2, 3), \tag{13}$$

$$\begin{aligned} q_i^{(i,k)} &= -\lambda_{i,k} \partial_i T_{i,k} \quad (1 \le k \le K_i, \;\; i = 1, 2, 3), \\ q_i^{(j,k)} &= -\lambda_{j,k}^* \partial_i T_{j,k} \quad (1 \le k \le K_j, \;\; j \ne i, \;\; i, \; j = 1, 2, 3). \end{aligned} \tag{14}$$

Подставим в уравнение (11) соотношение (12) и первое равенство (14), тогда с учетом (5), (8) после элементарных преобразований получим

$$q_i = -\left(a_i \lambda_i^{\mathrm{m}} + \sum_{k=1}^{K_i} \omega_{i,k} \, \lambda_{i,k} \right) \partial_i T_{\mathrm{m}}, \quad i = 1, 2, 3, \tag{15}$$

где

$$a_i = 1 - \sum_{k=1}^{K_i} \omega_{i,k}, \quad i = 1, 2, 3. \tag{16}$$

Подставим в условия сопряжения (9), (10) соотношения (12)–(14), тогда будем иметь равенства

$$\begin{aligned} \partial_i T_{0,k} &= \frac{\lambda_i^{\mathrm{m}}}{\lambda_{i,k}^0} \partial_i T_{\mathrm{m}} \quad (1 \le k \le K_0, \;\; i = 1, 2, 3), \\ \partial_i T_{j,k} &= \frac{\lambda_i^{\mathrm{m}}}{\lambda_{j,k}^*} \partial_i T_{\mathrm{m}} \quad (1 \le k \le K_j, \;\; j \ne i, \;\; i, \; j = 1, 2, 3). \end{aligned} \tag{17}$$

Уравнение (7) после подстановки в него соотношений (8) и (17) примет вид

$$\partial_i T = \left(a + \sum_{k=1}^{K_0} \omega_{0,k} \frac{\lambda_i^{\mathrm{m}}}{\lambda_{i,k}^0} + \sum_{k=1}^{K_i} \omega_{i,k} + \sum_{j=1,\,3}^{j \ne i} \sum_{k=1}^{K_j} \omega_{j,k} \frac{\lambda_i^{\mathrm{m}}}{\lambda_{j,k}^*} \right) \partial_i T_{\mathrm{m}}, \quad i = 1, 2, 3. \tag{18}$$

Выразим из (18) производные $\partial_i T_{\mathrm{m}}$ и подставим в равенства (15), тогда получим

$$q_i = -\frac{a_i + \sum_{k=1}^{K_i} \omega_{i,k} \dfrac{\lambda_{i,k}}{\lambda_i^{\mathrm{m}}}}{\dfrac{a}{\lambda_i^{\mathrm{m}}} + \sum_{k=1}^{K_0} \dfrac{\omega_{0,k}}{\lambda_{i,k}^0} + \sum_{k=1}^{K_i} \dfrac{\omega_{i,k}}{\lambda_i^{\mathrm{m}}} + \sum_{j=1,\,3}^{j \ne i} \sum_{k=1}^{K_j} \dfrac{\omega_{j,k}}{\lambda_{j,k}^*}} \partial_i T, \quad i = 1, 2, 3. \tag{19}$$

Согласно первому допущению, закон Фурье для ортотропной среды имеет вид

$$q_i = -\Lambda_i' \partial_i T, \quad i = 1, 2, 3. \tag{20}$$

Из сравнения равенств (19), (20) следует, что эффективные коэффициенты теплопроводности рассматриваемого гибридного композита в главных осях анизотропии определяются формулой

$$\Lambda_i' = \frac{a_i + \sum\limits_{k=1}^{K_i} \omega_{i,k} \dfrac{\lambda_{i,k}}{\lambda_i^{\mathrm{m}}}}{\dfrac{a}{\lambda_i^{\mathrm{m}}} + \sum\limits_{k=1}^{K_0} \dfrac{\omega_{0,k}}{\lambda_{i,k}^0} + \sum\limits_{k=1}^{K_i} \dfrac{\omega_{i,k}}{\lambda_i^{\mathrm{m}}} + \sum\limits_{j=1,3}^{j\neq i} \sum\limits_{k=1}^{K_j} \dfrac{\omega_{j,k}}{\lambda_{j,k}^*}}, \quad i = 1, 2, 3, \tag{21}$$

где следует учесть уравнение (16).

Важной особенностью построенной модели является возможность определения по градиенту усредненной температуры $\partial_i T$ тепловых потоков и градиентов температур $\partial_i T_{\mathrm{m}}$, $\partial_i T_{j,k}$ во всех фазах композиции. Действительно, если из решения задачи теплопроводности для композитной среды известны производные усредненной температуры $\partial_i T$, то из (18) можно определить производные от температуры в связующем $\partial_i T_{\mathrm{m}}$, а затем из уравнений (8), (17) — градиенты температуры в армирующих элементах $\partial_i T_{j,k}$ ($1 \le k \le K_j$, $0 \le j \le 3$, i = 1, 2, 3), после чего, используя закон Фурье (12)–(14), определим тепловые потоки в фазах композиции.

Если композитный материал является лишь дисперсно упрочненным (т. е. $\omega_{j,k} = 0$, $1 \le k \le K_j$, j = 1, 2, 3, $\omega_{0,k} > 0$, $1 \le k \le K_0$), то из (21) с учетом (16) получаем

$$\frac{1}{\Lambda_i'} = \frac{a}{\lambda_i^{\mathrm{m}}} + \sum_{k=1}^{K_0} \frac{\omega_{0,k}}{\lambda_{i,k}^0}, \quad i = 1, 2, 3 \quad \left(a = 1 - \sum_{k=1}^{K_0} \omega_{0,k} \right). \tag{22}$$

В случае изотропных материалов связующей матрицы и всех дисперсных включений ($\lambda_i^{\mathrm{m}} = \lambda_{\mathrm{m}}$, $\lambda_{i,k}^0 = \lambda_k^0$, $1 \le k \le K_0$, i = 1, 2, 3) из (22) следует теплофизическая изотропность композитного материала ($\Lambda_1' = \Lambda_2' = \Lambda_3'$).

Если гибридный композит армирован лишь в одном направлении x_i' и не упрочнен дисперсно (т. е. $\omega_{j,k} = 0$, $1 \le k \le K_j$, $j \ne i$, j = 0, 1, 2, 3, $\omega_{i,k} > 0$, $1 \le k \le K_i$), то из (21) с учетом (16) следует

$$\begin{gathered} \Lambda_i' = a_i \lambda_i^{\mathrm{m}} + \sum_{k=1}^{K_i} \omega_{i,k} \lambda_{i,k}, \quad \frac{1}{\Lambda_j'} = \frac{a}{\lambda_j^{\mathrm{m}}} + \sum_{k=1}^{K_i} \frac{\omega_{i,k}}{\lambda_{i,k}^*}, \\ j \ne i, \quad j = 1, 2, 3 \quad \left(a_i = a = 1 - \sum_{k=1}^{K_i} \omega_{i,k} \right). \end{gathered} \tag{23}$$

В случае армирования одним семейством волокон ($K_i = 1$) соотношения (23) при соответствующих переобозначениях совпадают с формулами (1.20) в [4], которые согласуются с экспериментом с 9-процентной точностью, что значительно выше точности моделей, предложенных, например, в [8, 9] (см. [5, 6]).

Если гибридный композит армирован лишь в направлениях x_1', x_2' и не упрочнен дисперсно (т. е. $\omega_{j,k} = 0,\ 1 \le k \le K_j,\ \ j = 0, 3,\ \ \omega_{i,k} > 0,\ 1 \le k \le K_i$, i = 1, 2), то из (21) имеем

$$\Lambda_i' = \frac{a_i + \sum_{k=1}^{K_i} \omega_{i,k} \dfrac{\lambda_{i,k}}{\lambda_i^{\mathrm{m}}}}{\dfrac{a_j}{\lambda_i^{\mathrm{m}}} + \sum_{k=1}^{K_j} \dfrac{\omega_{j,k}}{\lambda_{j,k}^{*}}}, \qquad j = 3 - i, \quad i = 1, 2,$$
$$\frac{1}{\Lambda_3'} = \frac{a}{\lambda_3^{\mathrm{m}}} + \sum_{i=1}^{2} \sum_{k=1}^{K_i} \frac{\omega_{i,k}}{\lambda_{i,k}^{*}}, \qquad a = 1 - \sum_{i=1}^{2} \sum_{k=1}^{K_i} \omega_{i,k}. \tag{24}$$

Выражение для Λ_3' в (24) при соответствующих переобозначениях совпадает с полученной ранее в [4] формулой (2.23) для Λ_{33}, которая хорошо согласуется с экспериментом из работы [7], обеспечивая 9-процентную точность. Выражения для Λ_i' в (24) не совпадают с полученными в [4] формулами (2.23) для Λ_{ii} (i = 1, 2) при плоском ортогональном армировании, так как в [4] использовались другие допущения для определения эффективных теплофизических характеристик перекрестно армированного композита (а именно, там осреднение проводилось по монотропным регулярно чередующимся слоям).

Для ортогонально армированного органопластика на основе эпоксисвязующего DER-332 / Джеффамин Т-403 и органических волокон кевлар-49 (теплофизические характеристики фаз композиции приведены в табл. 1) значение Λ_1', рассчитанное по формуле (24), равно $0{,}784$ Вт/(м $\cdot$ К) (тип ткани 143, $\omega_{1,1} = 0{,}383$, $\omega_{2,1} = 0{,}077$, $\omega_{1,1} + \omega_{2,1} = 0{,}46$), что на 13,8 % меньше экспериментального значения $0{,}91$ Вт/(м $\cdot$ К), приведенного в табл. 2. Для других типов тканей наблюдается худшее согласование расчетных характеристик с экспериментом. (Подчеркнем, что структурные формулы, полученные в [4], лучше согласуются с экспериментом для типа ткани 243 (см. табл. 14 в работе [7]), однако, как уже отмечалось в [7], в справочнике [10], откуда взяты экспериментальные значения, приведенные в табл. 2, не указано при каком типе ткани проводился эксперимент.) Расчетное же значение $\Lambda_{33} = \Lambda_3' = 0{,}24$ Вт/(м $\cdot$ К) всего на 8,9 % отличается от экспериментального значения, приведенного в табл. 2.

Помимо эффективных коэффициентов теплопроводности Λ_i' (i = 1, 2, 3) важной интегральной теплофизической характеристикой композита является теплоемкость, которая для армированного материала определяется по правилу простой смеси [11]

$$C = a\rho_{\mathrm{m}} c_{\mathrm{m}} + \sum_{i=0}^{3} \sum_{k=1}^{K_i} \omega_{i,k} \rho_{i,k} c_{i,k}, \tag{25}$$

Таблица 1

Коэффициенты теплопроводности фазовых материалов органопластика

Направление	Значение λ_i^{m}, Вт/м·К для эпоксисвязующего DER 332 / Джеффамин Т–403 ([10], с. 106)	Значения $\lambda_{i,1}$, $\lambda_{i,1}^{*}$, Вт/м·К для волокон кевлар–49 ([10], с. 352)
Вдоль волокон	0,133	4,816 ($\lambda_{i,1}$,)
Поперек волокон	0,133	4,110 ($\lambda_{i,1}^{*}$)

Таблица 2

Коэффициенты теплопроводности волокнистого композита на основе ткани кевлар-49 и эпоксидной системы DER-332/Джеффамин Т-403 с объемным содержанием волокон 46 % ($\omega_{1,1} + \omega_{2,1} = 0{,}46$)

Характеристика	Эксперимент [10]	Расчет по формуле (24)	Отклонение от эксперимента, %
Λ_{33}, Вт/(м·К) (поперек слоев ткани)	0,22	0,240	8,9
Λ_{11}, Вт/(м·К) (вдоль волокон)	0,91	0,784	13,8

где ρ_{m}, $\rho_{0,k}$ — объемные плотности материалов связующей матрицы и k-го семейства дисперсных включений, c_{m}, $c_{0,k}$ — удельные теплоемкости материалов связующего и k-го ($1 \le k \le K_0$) семейства дисперсных включений соответственно, $\rho_{j,k}$, $c_{j,k}$ — объемная плотность и удельная теплоемкость материала волокон k-го ($1 \le k \le K_j$) семейства, уложенных в направлении x'_j (j = 1, 2, 3) соответственно.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ПРОЕКТИРОВАНИЯ АРМИРОВАННЫХ КОМПОЗИТОВ С ЗАДАННЫМ НАБОРОМ ЭФФЕКТИВНЫХ ТЕПЛОФИЗИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК

Для решения рассматриваемой проблемы проектирования перепишем равенства (21), (25) с учетом (5), (16), тогда после элементарных преобразований получим систему четырех уравнений:

$$\Lambda'_i(\mathbf{x}')\left[\sum_{k=1}^{K_0}\left(\frac{1}{\lambda^0_{i,k}}-\frac{1}{\lambda^{\mathrm{m}}_i}\right)\omega_{0,k}+\sum_{\underline{j=1,\,3}}^{j\ne i}\sum_{k=1}^{K_j}\left(\frac{1}{\lambda^*_{j,k}}-\frac{1}{\lambda^{\mathrm{m}}_i}\right)\omega_{j,k}\right]+$$
$$+\sum_{k=1}^{K_i}\left(1-\frac{\lambda_{i,k}}{\lambda^{\mathrm{m}}_i}\right)\omega_{i,k}=1-\frac{\Lambda'_i(\mathbf{x}')}{\lambda^{\mathrm{m}}_i},\quad i=1,\,2,\,3, \tag{26}$$
$$\sum_{j=0}^{3}\sum_{k=1}^{K_j}\left(\rho_{j,k}c_{j,k}-\rho_{\mathrm{m}}c_{\mathrm{m}}\right)\omega_{j,k}=C(\mathbf{x}')-\rho_{\mathrm{m}}c_{\mathrm{m}}.$$

Система (26) представляет собой систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) относительно плотностей (интенсивностей) армирования $\omega_{i,k}$ ($1 \le k \le K_i$, $0 \le i \le 3$). В силу того, что эта система состоит только из четырех уравнений, из нее можно однозначно определить лишь четыре функции $\omega_{i,k}(\mathbf{x}')$, при том, что материалы всех фаз композиции и структурные параметры остальных семейств армирующих элементов заданы.

Так, если предположить, что в каждом направлении x'_j внедрено лишь одно семейство волокон и связующее усилено лишь одним семейством дисперсных включений ($K_i = 1$), то система (26) замкнута относительно разыскиваемых интенсивностей армирования $\omega_{i,1}(\mathbf{x}')$ ($0 \le i \le 3$, $1 \le j \le 3$).

Решение СЛАУ (26) с учетом условия нормировки (5) должно удовлетворять физическим ограничениям

$$\omega_{i,k} \ge 0 \quad (1 \le k \le K_i,\ 0 \le i \le 3),\quad 1-\sum_{j=0}^{3}\sum_{k=1}^{K_j}\omega_{j,k} > 0, \tag{27}$$

которые означают, что удельное объемное содержание каждой фазы композиции в каждой точке тела не может быть отрицательным.

Если решения системы (26) не удовлетворяют неравенствам (27), то выполнения последних можно добиться управлением правых частей в преобразованной системе (26). Действительно, предположим, что композит армирован более чем четырьмя семействами усиливающих элементов. Плотности армирования четырех из этих семейств будем разыскивать, а интенсивности армирования других семейств зададим с учетом неравенств (27). После чего перенесем все известные слагаемые из левых частей равенств (26) в правые и определим разыскиваемые интенсивности армирования четырех семейств. Варьируя заданные изначально плотности армирования избыточного количества семейств арматуры, можно добиться, в конечном итоге, выполнения всех неравенств (27).

Так как существует возможность управления структурой армирования при внедрении в связующее более чем четырех семейств арматуры, то для активного задействования в процессе решения обратной задачи неравенств (27) можно сформулировать дополнительно задачу линейного программирования. С этой целью, например, можно потребовать, чтобы в каждой точке $\mathbf{x}'$ тела эффективная объемная плотность композита

$$R = \sum_{j=0}^{3} \sum_{k=1}^{K_j} \left(\rho_{j,k} - \rho_{\mathrm{m}}\right)\omega_{j,k} + \rho_{\mathrm{m}} \tag{28}$$

принимала минимальное (максимальное) значение. Тогда в каждой точке $\mathbf{x}'$ тела необходимо решить задачу линейного программирования по минимизации (максимизации) функции (28) при ограничениях-неравенствах (27) и ограничениях-равенствах (26).

Целевая функция может быть выбрана и из других соображений. В частности, можно потребовать минимума содержания армирующих элементов определенного семейства (например, изготовленных из дорогостоящего материала), максимума содержания связующего и т. п.

Если требуется обеспечить заданные значения лишь эффективных коэффициентов теплопроводности Λ_i', то можно сформулировать задачу линейного программирования о минимизации (максимизации) в каждой точке $\mathbf{x}'$ тела эффективной теплоемкости композита. В этом случае целевая функция определяется последним равенством (26), а первые три уравнения образуют систему ограничений-равенств, поэтому такая постановка задачи требует внедрения более трех семейств армирующих элементов. Кроме того, если требуется обеспечить заданные значения эффективных теплофизических характеристик $\Lambda_i'(\mathbf{x}')$, $C(\mathbf{x}')$, $R(\mathbf{x}')$, то соотношения (26), (28) выступают в качестве ограничений-равенств, а минимизации подлежит, например, удельное объемное содержание какого-либо семейства арматуры или максимизация содержания связующего и т. п. При этом требуется внедрять в связующее более пяти семейств усиливающих элементов.

Предположим, что разыскиваемая структура армирования уже определена. Так как траектории армирования волокнами, задаваемые направляющими косинусами $n_i^{(j)}$, $i, j = 1, 2, 3$ (см. (1)–(4)), разыскивались независимо от плотностей армирования $\omega_{j,k}$, то волокна будут иметь переменные площади поперечных сечений $F_{j,k}$ по длине l_j $(1 \le k \le K_j,\ j = 1, 2, 3)$.

С точки зрения технологии изготовления рассматриваемого композита важно знать закон изменения площадей поперечных сечений $F_{j,k}\left(l_j\right)$ вдоль их траекторий.

Изменение интенсивности армирования $\omega_{j,k}$ волокнами в теле может происходить по двум причинам: 1) сближение или расхождение траекторий армирования; 2) уменьшение или увеличение площадей поперечных сечений волокон по сравнению с краевым значением $F^0_{j,k}=F_{j,k}(0)$, заданным на той части (обозначим ее S_j) поверхности, ограничивающей тело, на которой волокна, уложенные по направлениям $\mathbf{n}^{(j)}$ ($1\le k\le K_j$, $j=1,2,3$), входят в конструкцию.

Чтобы определить долю изменения $\omega_{j,k}$ за счет сближения или расхождения траекторий армирования, поступим следующим образом. Предположим, что в тело условно внедрены по заданным траекториям (по направлениям $\mathbf{n}^{(j)}$) волокна постоянного поперечного сечения. Площади этих сечений зададим равными $F^0_{j,k}$ и внедрим такое количество волокон, чтобы на поверхности S_j, где волокна входят в конструкцию, плотности армирования имели определенные из решения обратной задачи (26)–(28) значения

$$\omega^0_{j,k}\left(S_j\right)=\omega_{j,k}(\mathbf{x}),\ \ \mathbf{x}\in S_j,\ \ 1\le k\le K_j,\ \ j=1,2,3. \tag{29}$$

Поскольку фиктивные волокна имеют постоянные площади поперечных сечений $F^0_{j,k}$, то интенсивности армирования $\varpi_{j,k}$, им соответствующие, связаны с направлениями армирования уравнением [12]

$$\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\varpi_{j,k}n_i^{(j)}\right)=0,\ \ 1\le k\le K_j,\ \ j=1,2,3. \tag{30}$$

Проинтегрировав уравнение (30) при краевом условии (29), получим всюду в теле функции $\varpi_{j,k}(\mathbf{x})$, которые как раз и характеризуют долю изменения $\omega_{j,k}$ за счет сближения или расхождения траекторий армирования. Зная $\omega_{j,k}$, $\varpi_{j,k}$, можно определить и закон изменения площадей поперечных сечений реальных волокон

$$F_{j,k}\left(l_j\right)=F^0_{j,k}\omega_{j,k}(\mathbf{x})/\varpi_{j,k}(\mathbf{x}),\ \ 1\le k\le K_j,\ \ j=1,2,3, \tag{31}$$

где l_j — длина криволинейного отрезка вдоль выбранной траектории армирования (определяемой направляющими косинусами $n_i^{(j)}$) между рассматриваемой точкой $\mathbf{x}$ и точкой пересечения траектории с поверхностью S_j, на которой задано краевое условие (29), в этой же точке поверхности S_j выбирается и значение $F^0_{j,k}$.

Методы интегрирования краевой задачи (29), (30) хорошо разработаны, т. к. при каждом j уравнение (30) является линейным уравнением в частных производных первого порядка [13], характеристики которого совпадают с траекториями армирования, поэтому не будем останавливаться на этом вопросе более подробно.

На основе равенств (26), (28) можно решать и другие обратные задачи по определению структуры армирования композита, например задачи диагностики, когда по известным из эксперимента эффективным теплофизическим характеристикам Λ_i', C, R и дополнительной информации о структуре армирования или о характеристиках некоторых фаз композиции требуется определить недостающие параметры армирования и свойства неизвестных фазовых материалов. В таких задачах диагностики уравнения (26), (28) могут оказаться нелинейными относительно разыскиваемых параметров, поэтому могут иметь не единственное решение. В качестве критериев отбора физически допустимых решений служат, например, неравенства (27) и аналогичные им ограничения, накладываемые на теплофизические характеристики материалов фаз композиции, т. е.

$$\begin{gathered}\lambda_i^{\mathrm{m}}>0,\ \lambda_{i,n}^{0}>0,\ \lambda_{j,k}>0,\ \lambda_{j,k}^{*}>0\ \ (1\le n\le K_0,\ 1\le k\le K_j,\ i,\ j=1,2,3),\\ c_{\mathrm{m}}>0,\ c_{j,k}>0,\ \rho_{\mathrm{m}}>0,\ \rho_{j,k}>0\ \ (1\le k\le K_j,\ \ j=0,1,2,3).\end{gathered} \tag{32}$$

В качестве примеров рассмотрим некоторые задачи диагностики однонаправлено и перекрестно армированных композитов.

Пусть известно, что композитный образец армирован одним семейством волокон в направлении $x_1'\equiv x_1$ ($K_0=K_2=K_3=0$, $K_1=1$). Из эксперимента известны также эффективные коэффициенты теплопроводности композиции Λ_1', $\Lambda_2'=\Lambda_3'$ (монотропный материал) и коэффициент теплопроводности λ_{m} изотропного связующего. Требуется определить плотность армирования ω и коэффициент теплопроводности λ_{a} волокон в предположении, что последние являются изотропными.

Согласно формулам (23), с учетом обозначений $\lambda_i^{\mathrm{m}}=\lambda_{\mathrm{m}}$, $\lambda_{1,1}$ = $\lambda_{1,1}^{*}=\lambda_{\mathrm{a}}$, $\omega_{1,1}=\omega$, имеем

$$\Lambda_1'=\lambda_{\mathrm{m}}(1-\omega)+\lambda_{\mathrm{a}}\omega,\qquad \frac{1}{\Lambda_2'}=\frac{1}{\Lambda_3'}=\frac{\omega}{\lambda_{\mathrm{a}}}+\frac{1-\omega}{\lambda_{\mathrm{m}}}. \tag{33}$$

Из этих равенств следует

$$(\lambda_{\mathrm{a}}-\lambda_{\mathrm{m}})\omega=\Lambda_1'-\lambda_{\mathrm{m}},\ \ \frac{\lambda_{\mathrm{a}}-(\lambda_{\mathrm{a}}-\lambda_{\mathrm{m}})\omega}{\lambda_{\mathrm{a}}\lambda_{\mathrm{m}}}=\frac{1}{\Lambda_2'}, \tag{34}$$

где правые части — известные величины.

Подставим первое равенство (34) во второе, тогда после элементарных преобразований получим

$$\lambda_{\mathrm{a}}=\frac{\Lambda_1'-\lambda_{\mathrm{m}}}{\Lambda_2'-\lambda_{\mathrm{m}}}\Lambda_2', \tag{35}$$

а из первого равенства (34) при известном из (35) значении λ_{a} будем иметь

$$\omega=\frac{\Lambda_1'-\lambda_{\mathrm{m}}}{\lambda_{\mathrm{a}}-\lambda_{\mathrm{m}}}. \tag{36}$$

Таким образом, равенства (35), (36) однозначно определяют разыскиваемые величины λ_{a} и ω.

Если по-прежнему из эксперимента известны величины Λ_1', $\Lambda_2' = \Lambda_3'$ и, кроме того, коэффициент теплопроводности λ_a изотропных волокон, то из уравнений (33) по схеме, аналогичной рассуждениям (34)–(36), можно определить коэффициент теплопроводности изотропного связующего и плотность армирования

$$\lambda_\text{m} = \frac{\Lambda_1' - \lambda_\text{a}}{\Lambda_2' - \lambda_\text{a}} \Lambda_2', \quad \omega = 1 - \frac{\Lambda_1' - \lambda_\text{a}}{\lambda_\text{m} - \lambda_\text{a}}. \tag{37}$$

Как уже отмечалось (см. табл. 1), армирующие волокна могут быть монотропными, т. е. имеют разные коэффициенты теплопроводности в продольном и поперечном направлениях. Пусть композит получен внедрением в изотропную матрицу одного семейства монотропных волокон, уложенных в направлении x_1', и из эксперимента известны эффективные характеристики Λ_1', $\Lambda_2' = \Lambda_3'$, а также коэффициенты теплопроводности волокон в продольном λ_a и поперечном λ_a^* направлениях. Требуется определить плотность армирования ω и коэффициент теплопроводности λ_m изотропного связующего.

Следуя формулам (23), с учетом обозначений $\lambda_i^\text{m} = \lambda_\text{m}$, $\lambda_{1,1} = \lambda_\text{a}$, $\lambda_{1,1}^* = \lambda_\text{a}^*$, $\omega_{1,1} = \omega$, получим

$$\Lambda_1' = \lambda_\text{m} a + \lambda_\text{a}(1-a), \qquad \frac{1}{\Lambda_2'} = \frac{1}{\Lambda_3'} = \frac{1-a}{\lambda_\text{a}^*} + \frac{a}{\lambda_\text{m}} \qquad (a = 1-\omega), \tag{38}$$

отсюда после элементарных преобразований следует

$$(\lambda_\text{m} - \lambda_\text{a})a = \Lambda_1' - \lambda_\text{a}, \qquad \frac{(\lambda_\text{a}^* - \lambda_\text{m})a}{\lambda_\text{a}^* \lambda_\text{m}} = \frac{1}{\Lambda_2'} - \frac{1}{\lambda_\text{a}^*} \qquad (\lambda_\text{a} \neq \lambda_\text{a}^*), \tag{39}$$

где правые части — известные величины.

Исключим из равенств (39) величину a, тогда получим равенство

$$\frac{\lambda_\text{a}^* \lambda_\text{m}}{\lambda_\text{a}^* - \lambda_\text{m}} \left(\frac{1}{\Lambda_2'} - \frac{1}{\lambda_\text{a}^*} \right) = \frac{\Lambda_1' - \lambda_\text{a}}{\lambda_\text{m} - \lambda_\text{a}},$$

которое приводится к квадратному уравнению относительно λ_m:

$$(\lambda_\text{a}^* - \Lambda_2')\lambda_\text{m}^2 + (\Lambda_1'\Lambda_2' - \lambda_\text{a}\lambda_\text{a}^*)\lambda_\text{m} - \Lambda_2'\lambda_\text{a}^*(\Lambda_1' - \lambda_\text{a}) = 0. \tag{40}$$

Зная из (40) значение λ_m, из первого равенства (39) с учетом $a = 1-\omega$ можно определить и плотность армирования

$$\omega = 1 - \frac{\Lambda_1' - \lambda_\text{a}}{\lambda_\text{m} - \lambda_\text{a}}. \tag{41}$$

Поскольку квадратное уравнение может иметь два различных корня, то рассматриваемая обратная задача может иметь два набора решений $\lambda_\text{m}^{(i)}$, $\omega^{(i)}$ (i = 1, 2). Реальному композиту соответствуют лишь действительные решения, удовлетворяющие физическим ограничениям (27), (32).

Для конкретного расчета используем известные из эксперимента эффективные характеристики однонаправлено армированного органопластика

($\Lambda_{11} = \Lambda_1' = 3,22$ Вт/м·К, $\Lambda_{22} = \Lambda_2' = 0,35$ Вт/м·К при $\omega = 0,6$, см. [10]), усиленного волокнами кевлар-49, коэффициенты теплопроводности которых приведены в табл. 1.

При таких входных данных по формулам (40), (41) получаем два набора действительных решений

$$\lambda_{\mathrm{m}}^{(1)} = 0,1262 \text{ Вт/м}\cdot\text{К}, \quad \omega^{(1)} = 0,6597, \tag{42}$$

$$\lambda_{\mathrm{m}}^{(2)} = 4,8384 \text{ Вт/м}\cdot\text{К}, \quad \omega^{(2)} = 72,3642. \tag{43}$$

Во втором наборе решений (43) значение плотности армирования $\omega^{(2)}$ не удовлетворяет последнему физическому ограничению (27), поэтому решением рассматриваемой задачи диагностики является лишь первый набор решений (42). Сравним эти значения с известными из эксперимента данными: $\lambda_{\mathrm{m}} = 0,133$ Вт/м·К (см. табл. 1), $\omega = 0,6$. Значение $\lambda_{\mathrm{m}}^{(1)}$ отличается от экспериментального на 5,11 %, а значение $\omega^{(1)}$ превышает экспериментальное на 9,95 %, т. е. точность решения этой обратной задачи имеет тот же порядок, что и точность используемой модели теплопроводности (см. [5, 6]).

Полученные выше результаты можно интерпретировать несколько иначе, а именно, несовпадение расчетных и экспериментальных данных можно объяснить следующим образом. В процессе изготовления рассматриваемой композиции произошла некоторая усадка связующего (что в действительности и имеет место при затвердевании эпоксисвязующего), поэтому к концу технологического процесса изготовления композита плотность армирования стала несколько больше, чем в исходном состоянии при начале изготовления. Некоторое изменение значения коэффициента теплопроводности связующего может произойти в результате химического взаимодействия материалов связующей матрицы и волокон, что также имеет место на практике.

Обычно взаимодействие связующего и волокон приводит к возникновению переходных зон на границах контакта фазовых материалов. Учитывая это обстоятельство, задачу диагностики можно сформулировать следующим образом: необходимо определить удельное объемное содержание материала переходной зоны и его теплофизические свойства по известным эффективным теплофизическим характеристикам композиции, характеристикам исходных фазовых материалов и плотности армирования.

Предположим, что исходная плотность армирования в течение технологического процесса изготовления не изменяется или каким-то способом ее можно определить в уже изготовленном композите, т. е. она известна. Обозначим через ω_* удельное объемное содержание материала переходной зоны, а через λ_{m}^* — коэффициент теплопроводности этой зоны, считая, что материал в ней изотропен. Тогда из равенств (23) с учетом обозначений $\lambda_i^{\mathrm{m}} = \lambda_{\mathrm{m}}$, $\lambda_{1,1} = \lambda_{\mathrm{a}}$, $\lambda_{1,2} = \lambda_{\mathrm{m}}^*$, $\lambda_{1,1}^* = \lambda_{\mathrm{a}}^*$, $\lambda_{1,2}^* = \lambda_{\mathrm{m}}^*$, $\omega_{1,1} = \omega$, $\omega_{1,2} = \omega_*$ для однонаправленно армированного гибридного композита ($K_1 = 2$) получим

$$\Lambda_1' = \lambda_{\mathrm{m}}\left(a_0 - \omega_*\right) + \lambda_{\mathrm{m}}^*\omega_* + \lambda_{\mathrm{a}}\omega, \qquad \frac{1}{\Lambda_2'} = \frac{a_0 - \omega_*}{\lambda_{\mathrm{m}}} + \frac{\omega_*}{\lambda_{\mathrm{m}}^*} + \frac{\omega}{\lambda_{\mathrm{a}}^*}, \tag{44}$$

где $a_0 = 1 - \omega$ — удельное объемное содержание связующего до возникновения переходной зоны. (Величины a_0, ω предполагаются известными.)

Из равенств (44) следует

$$\left(\lambda_{\mathrm{m}}^{*}-\lambda_{\mathrm{m}}\right)\omega_{*}=\Lambda_{1}^{*}, \quad \left(\frac{1}{\lambda_{\mathrm{m}}^{*}}-\frac{1}{\lambda_{\mathrm{m}}}\right)\omega_{*}=\frac{1}{\Lambda_{2}^{*}}, \tag{45}$$

где

$$\Lambda_{1}^{*}=\Lambda_{1}'-\lambda_{\mathrm{m}}a_{0}-\lambda_{\mathrm{a}}\omega, \quad 1/\Lambda_{2}^{*}=1/\Lambda_{2}'-a_{0}/\lambda_{\mathrm{m}}-\omega/\lambda_{\mathrm{a}}^{*}. \tag{46}$$

Правые части в (45) – известные величины, поэтому из соотношений (45) имеем

$$\lambda_{\mathrm{m}}^{*}=-\frac{\Lambda_{1}^{*}\Lambda_{2}^{*}}{\lambda_{\mathrm{m}}}, \quad \omega_{*}=\frac{\Lambda_{1}^{*}}{\lambda_{\mathrm{m}}^{*}-\lambda_{\mathrm{m}}}, \tag{47}$$

где нужно учесть выражения (46).

Используя входные данные для рассмотренного выше однонаправлено армированного органопластика, по формулам (46), (47) при $\omega=0,6$ получим

$$\lambda_{\mathrm{m}}^{*}=7,033\ \text{Вт/м}\cdot\text{K}, \quad \omega_{*}=0,0697. \tag{48}$$

Значение ω_{*} в (48) составляет всего 11,6 % от $\omega=0,6$, т. е. переходная зона действительно занимает малую область в окрестности боковой поверхности волокон.

Если известны плотность армирования ω однонаправленно армированного композита, его эффективные характеристики Λ_{1}', $\Lambda_{2}'=\Lambda_{3}'$ и коэффициент теплопроводности изотропного связующего λ_{m}, то непосредственно из равенств (38) можно определить коэффициенты теплопроводности монотропных волокон в продольном λ_{a} и поперечном λ_{a}^{*} направлениях.

Выше рассматривались случаи, когда теплофизические характеристики одной из фаз композиции известны и требуется определить структуру ее армирования и характеристики другой фазы. Задачу диагностики можно сформулировать иначе: например, нужно определить коэффициенты теплопроводности изотропных фаз композиции однонаправленно армированного материала, если известны эффективные коэффициенты теплопроводности Λ_{1}', $\Lambda_{2}'=\Lambda_{3}'$ и плотность армирования ω. При этом остаются справедливыми равенства (33), причем из первого равенства имеем

$$\frac{\omega}{\lambda_{\mathrm{a}}}=\frac{\omega^{2}}{\Lambda_{1}'-a\lambda_{\mathrm{m}}} \quad (a=1-\omega).$$

Подставим это соотношение во второе равенство (33), тогда после элементарных преобразований получим квадратное уравнение относительно λ_{m}:

$$a\lambda_{\mathrm{m}}^{2}+\left[\left(\omega^{2}-a^{2}\right)\Lambda_{2}'-\Lambda_{1}'\right]\lambda_{\mathrm{m}}+a\Lambda_{1}'\Lambda_{2}'=0, \tag{49}$$

а из первого равенства (33) при известном из (49) значении λ_{m} следует

$$\lambda_{\mathrm{a}}=\frac{\Lambda_{1}'-a\lambda_{\mathrm{m}}}{\omega} \quad (a=1-\omega). \tag{50}$$

Поскольку квадратное уравнение (49) может иметь два действительных различных корня относительно λ_{m}, то система (49), (50) в общем случае может иметь два набора решений $\lambda_{\rm m}^{(i)}$, $\lambda_{\rm a}^{(i)}$ (i = 1, 2), из которых реальному композиту соответствуют лишь характеристики, удовлетворяющие физическим ограничениям (32).

Аналогичные задачи диагностики можно решить и для ортогонально армированных в плоскости композитов. В этом случае нужно исходить из трех равенств (24), поэтому в качестве неизвестных могут выступать лишь три параметра.

Например, пусть композит армирован в каждом из направлений $x_1' \equiv x_1$, $x_2' \equiv x_2$ одним семейством волокон ($K_0 = K_3 = 0,\ \ K_1 = K_2 = 1$). Из эксперимента известны эффективные коэффициенты теплопроводности $\Lambda_1',\ \Lambda_2',\ \Lambda_3'$ и коэффициенты теплопроводности армирующих волокон (λ_i, λ_i^* — продольный и поперечный коэффициенты теплопроводности волокон, уложенных в направлении x_i'). Требуется определить плотности армирования ω_i волокон, уложенных в направлении x_i' (i = 1, 2), и коэффициент теплопроводности $\lambda_{\rm m}$ связующей матрицы в предположении, что последняя является изотропным материалом.

Согласно формулам (24), с учетом (16) и обозначений $\lambda_j^{\rm m} = \lambda_{\rm m}$, $\lambda_{i,1} = \lambda_i$, $\lambda_{i,1}^* = \lambda_i^*$, $\omega_{i,1} = \omega_i$ (i = 1, 2, j = 1, 2, 3), имеем

$$\left(\frac{1-\omega_j}{\lambda_{\rm m}} + \frac{\omega_j}{\lambda_j^*}\right)\Lambda_i' = 1 + \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_{\rm m}} - 1\right)\omega_i, \quad j = 3-i, \quad i = 1,\ 2, \tag{51}$$

$$\frac{1-\omega_1-\omega_2}{\lambda_{\rm m}} + \frac{\omega_1}{\lambda_1^*} + \frac{\omega_2}{\lambda_2^*} = \frac{1}{\Lambda_3'}. \tag{52}$$

Из последнего равенства следует

$$\frac{1-\omega_j}{\lambda_{\rm m}} + \frac{\omega_j}{\lambda_j^*} = \frac{1}{\Lambda_3'} + \left(\frac{1}{\lambda_{\rm m}} - \frac{1}{\lambda_i^*}\right)\omega_i, \quad j = 3-i, \quad i = 1,\ 2. \tag{53}$$

Подставим соотношения (53) в равенства (51), тогда после элементарных преобразований получим

$$\omega_i = \left(1 - \frac{\Lambda_i'}{\Lambda_3'}\right)\left[\frac{\Lambda_i'}{\lambda_i^*}\left(\frac{\lambda_i^*}{\lambda_{\rm m}} - 1\right) - \frac{\lambda_i}{\lambda_{\rm m}} + 1\right]^{-1}, \quad i = 1,\ 2. \tag{54}$$

После подстановки выражений (54) в соотношения (52) получим разрешающее уравнение

$$\frac{1}{\lambda_{\rm m}} + \sum_{i=1}^{2}\left(\frac{1}{\lambda_i^*} - \frac{1}{\lambda_{\rm m}}\right)\left(1 - \frac{\Lambda_i'}{\Lambda_3'}\right)\left[\frac{\Lambda_i'}{\lambda_i^*}\left(\frac{\lambda_i^*}{\lambda_{\rm m}} - 1\right) - \frac{\lambda_i}{\lambda_{\rm m}} + 1\right]^{-1} = \frac{1}{\Lambda_3'}. \tag{55}$$

Это уравнение определяет коэффициент теплопроводности связующего $\lambda_{\rm m}$. При известном из (55) значении $\lambda_{\rm m}$ плотности армирования ω_i (i = 1, 2) однозначно задаются равенствами (54).

Если в (55) все слагаемые привести к единому знаменателю, то получим кубическое уравнение относительно $\lambda_{\rm m}$, которое может иметь три различных корня. Следовательно, рассматриваемая задача диагностики может иметь три набора решений $\lambda_{\text{m}}^{(j)}, \omega_1^{(j)}, \omega_2^{(j)}$ (j = 1, 2, 3). Из этого набора решений реальному композиту будут соответствовать лишь действительные решения, удовлетворяющие физическим ограничениям (27), (32).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Баничук Н.В., Кобелев В.В., Рикардс Р.Б.** Оптимизация элементов конструкций из композиционных материалов. — М.: Машиностроение, 1988. — 224 с.
2. **Гуров К.П.** Феноменологическая термодинамика необратимых процессов. — М.: Наука, 1978. — 128 с.
3. **Гантмахер Ф.Р.** Теория матриц / 5 изд. — М.: Физматлит, 2004. — 560 с.
4. **Немировский Ю.В., Янковский А.П.** Теплопроводность волокнистых оболочек // Теплофизика и аэромеханика. — 1998. — Т. 5, № 2. — С. 215–235.
5. **Немировский Ю.В., Янковский А.П.** Сравнительный анализ структурных моделей теплопроводности волокнистых сред и сведение трехмерной задачи теплопроводности армированных пластин к двумерной // Конструкции из композиционных материалов. — 2004. — № 3. — С. 36–51.
6. **Немировский Ю.В., Янковский А.П.** Эффективные физико-механические характеристики композитов, однонаправленно армированных монотропными волокнами. Сообщение 2. Сопоставление расчетных характеристик с экспериментальными данными // Изв. вузов. Строительство. — 2006. — № 6. — С. 10–19.
7. **Немировский Ю.В., Янковский А.П.** Определение эффективных физико-механических характеристик гибридных композитов, перекрестно армированных трансверсально-изотропными волокнами, и сопоставление расчетных характеристик с экспериментальными данными // Механика композиционных материалов и конструкций. — 2007. — Т. 13, №. 1. — С. 3–32.
8. **Ванин Г.А.** Микромеханика композитных материалов. — Киев: Наук. думка, 1985. — 304 с.
9. **Шленский О.Ф.** Тепловые свойства стеклопластиков. — М.: Химия, 1973. — 220 с.
10. **Справочник** по композитным материалам: В 2-х кн. Кн. 1 / Под ред. Дж. Любина, Б.Э. Геллера. — М.: Машиностроение, 1988. — 448 с.
11. **Композиционные** материалы. Справочник / Под ред. Д.М. Карпиноса. — Киев: Наук. думка, 1985. — 592 с.
12. **Немировский Ю.В., Янковский А.П.** Рациональное проектирование армированных конструкций. — Новосибирск: Наука, 2002. — 488 с.
13. **Камке Э.** Справочник по дифференциальным уравнениям в частных производных первого порядка. — М.: Наука, 1966. — 260 с.

Статья поступила в редакцию 19 сентября 2007 г.