

УДК 533; 517.92517.944

ЗАВИХРЕННЫЕ УСТАНОВИВШИЕСЯ ТЕЧЕНИЯ САМОГРАВИТИРУЮЩЕГО ГАЗА

Д. В. Паршин*, А. А. Черевко^{*,**}, А. П. Чупахин^{*,**}

* Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск

** Новосибирский государственный университет, 630090 Новосибирск

E-mails: danilo.skiman@gmail.com, cherevko1@ngs.ru, chupakhin@hydro.nsc.ru

Найдено и исследовано точное решение уравнений установившегося движения самогравитирующего газа, описывающее завихренное течение газа с поверхности сферического источника и являющееся частично инвариантным относительно группы вращений (вихрь Овсянникова, особый вихрь). Фактор-система решения сводится к конечным формулам и одному обыкновенному дифференциальному уравнению третьего порядка. Определены различные режимы движения газа, описываемые данным решением: неограниченный разлет газа с закруткой с поверхности сферического источника, истечение газа с образованием сферы повышенной плотности на конечном расстоянии от указанного источника.

Ключевые слова: самогравитирующий газ, вихрь Овсянникова, частично инвариантное решение, группа вращений, завихренное истечение газа, сферический источник.

Введение. Уравнения газовой динамики с учетом самогравитации лежат в основе различных моделей астрофизики, описывающих истечение газа из звезд, спиральные структуры галактик, звездные скопления и т. д. [1–4]. Эти модели, учитывающие разнообразные физические факторы, достаточно сложны. Представляется важной и интересной задача определения влияния гравитации в чисто газодинамических моделях, описывающих многомерные движения газа, а также аналитическое исследование точных решений этих моделей. Естественным обобщением классических центрально-симметричных движений газа является вихрь Овсянникова (особый вихрь) [5] при наличии гравитации. Вихрь Овсянникова (ВО) является точным частично инвариантным решением [6, 7] уравнений газовой динамики. В этом вихре все термодинамические величины (давление, плотность, энтропия), а также модуль радиальной компоненты U и модуль H касательной к сферам $r = |\mathbf{x}| = \text{const}$ компоненты скорости \mathbf{u}_τ ($\mathbf{u} = U(r)\mathbf{u}_n + \mathbf{u}_\tau$) являются инвариантами группы вращений $SO(3)$. В то же время угол $\omega = \omega(r, \varphi, \theta)$, определяющий отклонение вектора \mathbf{u}_τ от меридиана сферы, зависит как от радиуса r , так и от широты θ ($0 \leq \theta \leq \pi$) и долготы φ ($0 \leq \varphi \leq 2\pi$) на сфере (рис. 1). Добавление к этой модели гравитационного потенциала Φ , зависящего только от радиуса, является естественным. Подобное обобщение для сферического газового источника в поле массивного притягивающего центра выполнено в [8]. В данной работе с использованием модели ВО исследуется завихренное установившееся течение самогравитирующего газа с поверхности сферы.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 11-01-00026а), Президиума СО РАН (Интеграционный проект № 44), Отделения энергетики, машиностроения, механики и процессов управления РАН (грант № 2.13.4).

© Паршин Д. В., Черевко А. А., Чупахин А. П., 2014

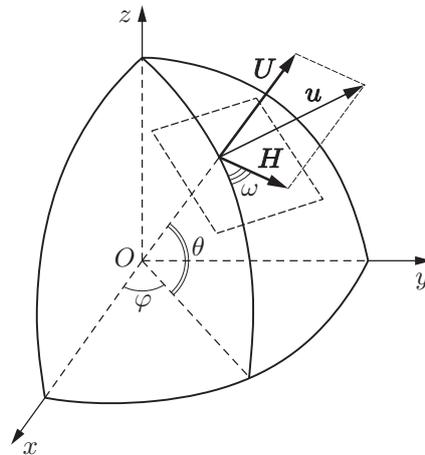


Рис. 1. Разложение вектора скорости в сферической системе координат

Задачи астрофизики с учетом вращения [1] рассматриваются начиная со второй половины XX в., когда, в частности, было показано, что они оказывают существенное влияние на результаты спектрального анализа. Так, для короткопериодических звезд уширение спектральных линий обусловлено, главным образом, наличием вращения. В работах, посвященных изучению газовой динамики с учетом самогравитации, рассматриваются в основном одномерные или автомодельные движения газа [9–13] или исследуются свойства таких моделей [14] и корректность постановок начально-краевых задач [15]. Изучение точных решений, обусловленных теоретико-групповыми свойствами исходной модели, позволяет получить подробную информацию о решении, допускающую физическую интерпретацию.

1. Вывод уравнений модели. Уравнения установившихся движений самогравитирующего газа [2, 10] имеют вид

$$\begin{aligned} D\rho + \rho \operatorname{div}(\mathbf{u}) &= 0, \\ D\mathbf{u} + \rho^{-1}\nabla p &= \nabla\Phi, \\ \Delta\Phi &= -4\pi G\rho, \end{aligned} \quad (1.1)$$

где скорость газа \mathbf{u} , давление p , плотность ρ и гравитационный потенциал Φ — функции пространственных переменных \mathbf{x} ; $D = \mathbf{u} \cdot \nabla$; ∇ — градиент; Δ — лапласиан; G — гравитационная постоянная. Система (1.1) дополняется уравнением состояния газа, который будем считать политропным: $p = S\rho^\gamma$ (S — энтропия; $\gamma > 1$ — показатель адиабаты). Система (1.1) допускает группу вращений $SO(3)$, действующую на прямом произведении пространств $\mathbb{R}^3(\mathbf{x}) \times \mathbb{R}^3(\mathbf{u})$. Задача нахождения наиболее широкой группы Ли инвариантности системы (1.1) является интересной и в настоящее время не решена. В таком представлении инвариантами группы $SO(3)$ являются радиус-вектор $r = |\mathbf{x}|$, модули касательной $H = |\mathbf{u}_\tau|$ и радиальной U компонент вектора скорости соответственно. Этих величин недостаточно для построения инвариантного решения, поэтому на группе $SO(3)$ реализуется частично инвариантное решение ранга и дефекта один [6], имеющее представление

$$\begin{aligned} U &= U(r), & \rho &= \rho(r), & H &= H(r), \\ p &= p(r), & S &= S_0, & \omega &= \omega(r, \theta, \varphi), \end{aligned} \quad (1.2)$$

где $S_0 = \text{const}$. Подставляя представление (1.2) в систему (1.1), согласно общей теории

частично инвариантных решений [6] получаем объединение двух подсистем. Переопределенная подсистема для функции ω имеет вид

$$\begin{aligned} k \sin \omega U \omega_r + \sin \theta \cos \omega \omega_\theta + \sin \omega \omega_\varphi &= -\cos \theta \sin \omega, \\ \sin \theta \sin \omega \omega_\theta - \cos \omega \omega_\varphi &= \cos \theta \cos \omega + h \sin \theta, \end{aligned} \quad (1.3)$$

где функция h задается формулой

$$h = k(U(\ln \rho)' + r^{-2}(r^2 U)'), \quad k = r/H, \quad (1.4)$$

штрих обозначает производную по r . Инвариантная подсистема для инвариантных функций имеет вид

$$UU' + \rho^{-1}p' = H^2/r + \Phi'; \quad (1.5)$$

$$U(rH)' = 0; \quad (1.6)$$

$$kUh' = h^2 + 1; \quad (1.7)$$

$$(r^2\Phi')'/r^2 = g_0\rho, \quad (1.8)$$

где $g_0 = -4\pi G$, причем уравнение (1.7) является условием совместности [6] системы (1.3). Включение гравитации в систему (1.5)–(1.8) приводит к изменению инвариантной подсистемы для ВО. Во-первых, в (1.5) добавляется слагаемое Φ' , учитывающее действие гравитационной силы, во-вторых, система дополняется уравнением (1.8) для гравитационного потенциала.

Система (1.3) интегрируется в конечном виде [5], геометрическая интерпретация решения представлена в [14]. Таким образом, исследование стационарного вихря Овсянникова (СВО) при наличии самогравитации сведено к анализу системы уравнений (1.5)–(1.8). Анализ СВО в отсутствие гравитации выполнен в [16].

Предположим, что $U \neq 0$. В этом случае из (1.6) следует представление для $|u_\tau|$

$$H = a_0/r, \quad a_0 = \text{const} > 0. \quad (1.9)$$

Тогда $k = r^2/a_0$. Из уравнения (1.7) можно выразить величину U через вспомогательную функцию h — своеобразный обобщенный потенциал решения — и ее производную:

$$U = a_0(h^2 + 1)/(h'r^2). \quad (1.10)$$

Для политропного газа с постоянной энтропией имеем $p = S_0\rho^\gamma$, $c^2 = \gamma p/\rho = \gamma S_0\rho^{\gamma-1}$ (c — скорость звука), $S_0 = \text{const}$. Подставляя эти выражения в уравнение (1.5) и интегрируя его, получаем интеграл Бернулли (энергии), выраженный через плотность:

$$\frac{1}{2}U^2 + \frac{\gamma S_0}{\gamma - 1}\rho^{\gamma-1} + \frac{a_0^2}{2r^2} = \Phi + b_0 \quad (1.11)$$

или скорость звука:

$$\frac{1}{2}U^2 + \frac{c^2}{\gamma - 1} + \frac{a_0^2}{2r^2} = \Phi + b_0$$

(b_0 — константа). Подставляя в уравнение (1.4) представление (1.10) для U и выражение для c через ρ , имеем

$$\frac{1}{\gamma - 1}(\ln c^2)' + \frac{h'}{1 + h^2} \left(\frac{1 + h^2}{h'} \right)' = \frac{hh'}{1 + h^2}.$$

Интегрируя это выражение и преобразуя его, находим представление для c через функции h , h' :

$$\left(\frac{c}{q_0} \right)^{2/(\gamma-1)} = \frac{h'}{\sqrt{1 + h^2}}, \quad (1.12)$$

где $q_0 = \text{const}$. Преобразуя формулы (1.8), (1.10), (1.12), получаем следующее утверждение.

Лемма. Система (1.5)–(1.8) эквивалентна системе

$$\frac{1}{2} \left(U^2 + \frac{a_0^2}{r^2} \right) + \frac{c^2}{\gamma - 1} = \Phi + b_0; \quad (1.13)$$

$$\rho = \frac{\rho_0 |h'|}{\sqrt{1 + h^2}}, \quad c^2 = \frac{q_0^2 |h'|^{\gamma-1}}{(1 + h^2)^{(\gamma-1)/2}}; \quad (1.14)$$

$$\Phi'' + \frac{2}{r} \Phi' = \frac{g_0 c^{2/(\gamma-1)}}{(\gamma S_0)^{1/(\gamma-1)}}, \quad (1.15)$$

определяющей инвариантные функции СВО с учетом самогравитации через обобщенный потенциал h и его производные.

В случае классического СВО подстановка (1.10)–(1.14) в интеграл Бернулли приводит к неявному дифференциальному уравнению для h [16], что в рассматриваемом случае дает представление для Φ через h, h' . Функция Φ определяется из обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка (1.15). В результате получаем более сложную задачу, чем в случае отсутствия самогравитации.

2. Свойства решения. Формулы (1.13)–(1.15) позволяют определить некоторые свойства решения. Будем рассматривать лишь ограниченные решения, т. е. такие, в которых функции $U(r), \Phi(r), \rho(r), h(r)$ ограничены в области определения.

Свойство 1. На любом конечном интервале существования ограниченного решения производная $h_r \neq 0$.

Доказательство следует из уравнения (1.10). Предположим, что $h'(r_0) = 0$, тогда $U \rightarrow 0$ при $r \rightarrow r_0$.

Свойство 2. Решение определено в области $r \geq \tilde{r} > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим обратное. Тогда из интеграла Бернулли следует, что при $r \rightarrow 0$ $\Phi \rightarrow \infty$, т. е. получаем противоречие условию.

Свойства 1, 2 являются также свойствами СВО без самогравитации [16]. Как и в классической газовой динамике, из свойства 2 следует, что источник газа имеет конечный радиус [7]. Таким образом, задача о СВО с учетом самогравитации формулируется следующим образом: с поверхности сферы или ее части (например, сферического пояса) газ стекает таким образом, что имеет место закрутка: $H = |\mathbf{u}_\tau| = a_0/r \neq 0$, причем распределение вектора \mathbf{u}_τ задается решением системы (1.3).

Свойство 3. Закрутка максимальна вблизи источника и уменьшается с увеличением r .

Доказательство следует непосредственно из (1.9).

Свойство 4. В СВО при наличии самогравитации существует не более двух режимов течения.

Свойство 4 является аналогом свойства классического источника, определяющего как дозвуковое, так и сверхзвуковое течение газа. Схема доказательства свойства 4 такая же, как и в [8].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Подставим в интеграл Бернулли представление (1.10) для U и (1.14) для c^2 . В результате получаем уравнение, связывающее функции h, h', Φ . Ниже это уравнение используется в двух формах, первая из которых имеет вид

$$|h'|^{\gamma+1} + \frac{(\gamma-1)(b_0 + \Phi)}{c_0^2} \left(\frac{a^2}{2(b_0 + \Phi)r^2} - 1 \right) (1 + h^2)^{(\gamma-1)/2} (h')^2 + \frac{(\gamma-1)a^2(1 + h^2)^{(\gamma+3)/2}}{2c_0^2 r^4} = 0. \quad (2.1)$$

Обозначим $h' = q$ и рассмотрим случай, когда показатель адиабаты $\gamma = m/n$ является рациональным (m, n — натуральные числа, причем $m > n$, поскольку $\gamma > 1$). Пусть $z = q^{1/n}$, тогда уравнение (2.1) записывается в виде алгебраического уравнения относительно z :

$$z^{m+n} + Az^{2n} + B = 0. \quad (2.2)$$

Здесь

$$A = \frac{\gamma - 1}{c_0^2} \left(\frac{a^2}{2r^2} - (b_0 + \Phi) \right) (1 + h^2)^{(\gamma-1)/2}; \quad (2.3)$$

$$B = \frac{(\gamma - 1)a^2(1 + h^2)^{(\gamma+3)/2}}{2c_0^2 r^4} > 0. \quad (2.4)$$

Справедливо правило Декарта, в соответствии с которым количество положительных корней многочлена либо совпадает с количеством перемен знаков его коэффициентов, либо на четное число меньше его [17]. Согласно (2.3), (2.4) количество перемен знаков в коэффициентах (2.2) определяется сигнатурой $(+, \text{sign}(A), +)$ и равно либо нулю, либо двум. При $A > 0$ уравнение (2.2) не имеет корней, при $A < 0$ число таких корней не больше двух. Из интеграла Бернулли (1.11) следует, что $A < 0$, поэтому количество корней не более двух.

3. Сведение системы уравнений (1.13)–(1.15) к одному уравнению более высокого порядка. Систему (1.13)–(1.15) можно свести к одному обыкновенному дифференциальному уравнению третьего порядка для функции h . Выразим из уравнения (2.1) гравитационный потенциал Φ через функции h, h' :

$$\Phi = \frac{c_0^2 |h'|^{\gamma-1}}{(\gamma - 1)(1 + h^2)^{(\gamma-1)/2}} + \frac{a(1 + h^2)^2}{2r^4 (h')^2} + \frac{a^2}{2r^2} - b_0. \quad (3.1)$$

Подставляя (3.1) в левую часть (1.15), а представление (1.14) для c^2 — в правую часть, получаем искомое уравнение третьего порядка. Вследствие его громоздкости получение каких-либо аналитических данных о свойствах его решения существенно затруднено. Дальнейший анализ решений этого уравнения выполняется численно. Для расчетов выбирается значение $\gamma = 5/3$, соответствующее одноатомному газу [7]. В этом случае уравнение третьего порядка имеет вид

$$\begin{aligned} -rY^{3/2}h'(12h(h')^2 + Y(-6h'' + rh''')) + 3r^2\sqrt{Y}((2Y - 1)(h')^4 + 3r^2(h'')^2Y^{5/2} - \\ - k_0r^6(h')^5 + 6Y^{3/2}(h')^2(Y - r^2hh'')) = 0, \end{aligned} \quad (3.2)$$

где $Y = 1 + h^2$. Для получения численного решения уравнения (3.2) необходимо задавать данные Коши: $h_0 = h(R_0), h'_0 = h'(R_0), h''_0 = h''(R_0)$. По формулам (1.10), (1.14) вычисляются значения физических величин на поверхности сферы-источника $U_0 = U(R_0), \rho_0 = \rho(R_0), c_0 = c(R_0)$. Значение потенциала $\Phi_0 = \Phi(R_0)$ и производная Φ' вычисляются по формуле (3.1). Для того чтобы задать $\Phi'_0 = \Phi'(R_0)$, нужно задать $h''_0 = h''(R_0)$.

4. Результаты численных расчетов. Численно исследованы свойства двух возможных режимов течения газа, которые соответствуют СВО при наличии самогравитации и существование которых было доказано при доказательстве свойства 4.

Для первого режима решение определено на конечном интервале $r \in [R_0, R_1)$. При $r \rightarrow R_1$ плотность газа неограниченно возрастает. Этот факт можно трактовать как образование на некотором расстоянии от источника сферы с повышенной плотностью, на которой наблюдается сгущение частиц газа. По мере удаления от источника плотность

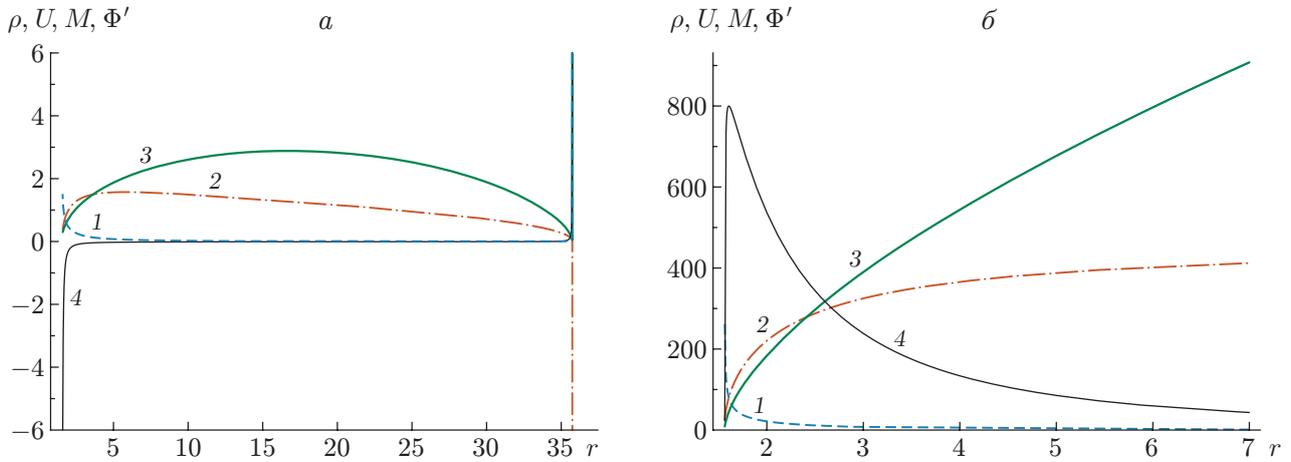


Рис. 2. Графики функций ρ, U, M, Φ' для решения (3.2):

$a - h(2) = 2, h'(2) = 1, h''(2) = -1, b - h(1,7) = 2, h'(1,7) = 1, h''(1,7) = -3,64; 1 - \rho,$
 $2 - U, 3 - M, 4 - \Phi'$

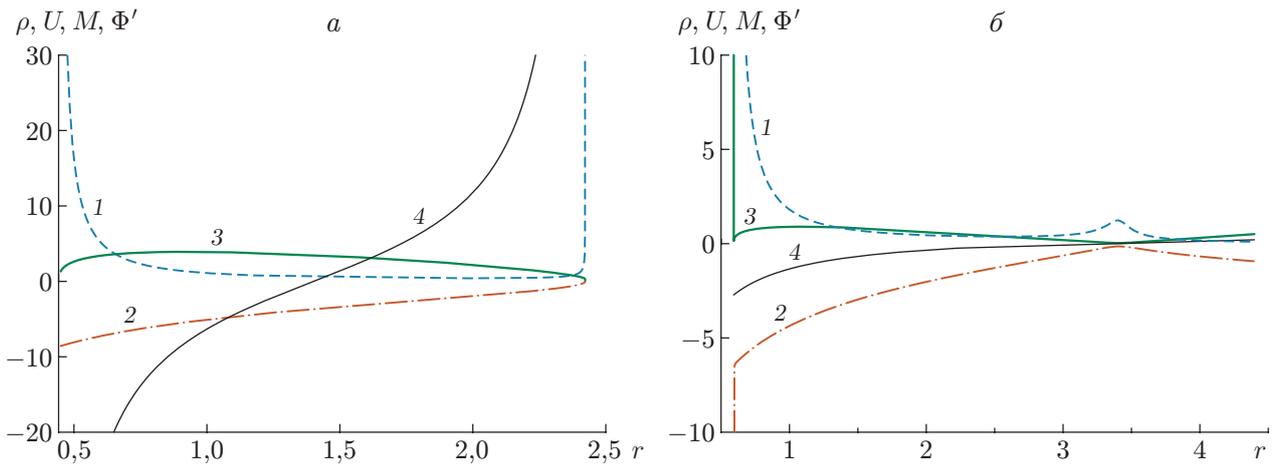


Рис. 3. Графики функций ρ, U, M, Φ' для решения (3.2):

$a - h(1,7) = 2, h'(1,7) = -1, h''(1,7) = 1, b - h(2) = 2, h'(2) = -1, h''(2) = 1; 1 - \rho,$
 $2 - U, 3 - M, 4 - \Phi'$

потока газа уменьшается, а радиальная скорость и число Маха достигают максимальных значений. Решение заканчивается градиентной катастрофой функций ρ, Φ' при конечном значении $r = R_2$ (рис. 2,а).

Для второго режима решение определено при всех $r \geq R_0$. Такой поток газа развивается при начальных данных (U_0, c_0) , когда $U_0 > c_0$, т. е. течение заведомо является сверхзвуковым. Поведение физических величин аналогично поведению соответствующих величин при классическом разлете газа: в удаляющемся на бесконечность потоке происходит разрежение газа, что приводит к увеличению числа Маха, при этом радиальная скорость монотонно возрастает (рис. 2,б).

Оба режима течения газа имеют место и в случае пространственного стока, т. е. при $h'(R_0) < 0$, когда согласно (1.10) газ натекает на сферу извне. Из (3.2) следует, что уравнение не допускает замену h' на $-h'$, поэтому поведение решения в данном случае не должно соответствовать его поведению в случае источника. Изменение расчетных физических величин в случае стока показано на рис. 3. На рис. 3,а решение соответствует случаю, когда

сток локализован в области $R_1 < r < R_2$, а на рис. 3,б — случаю, когда газ затягивается в коллапсирующее облако из бесконечности. Для получения более подробного описания подобных объектов, как правило, требуется учитывать электродинамику и излучение.

Режимы течения при наличии самогравитации и в случае ее отсутствия (см. [16]) качественно различаются. В частности, для случая, когда присутствует самогравитация, имеет место режим течения с локальным максимумом плотности внутри области течения. В целом обе модели имеют решения, существующие на конечном расстоянии от источника, и решения, соответствующие разлету газа в вакуум. Как и в [16], решения могут быть дозвуковыми и сверхзвуковыми и определяются на сферическом поясе $\theta_1 < \theta < \theta_2$.

5. Истечение газа без вращения. При движении газа без закрутки $a_0 = 0$, $H = 0$, интеграл Бернулли принимает вид

$$\frac{U^2}{2} + \frac{c^2}{\gamma - 1} = \Phi + b_0. \quad (5.1)$$

Уравнение неразрывности (1.4) интегрируется следующим образом:

$$\rho U = q_0/r^2. \quad (5.2)$$

Уравнение Пуассона для гравитационного потенциала записывается в виде

$$\Phi_{rr} + 2\Phi_r/r = -4\pi G\rho \quad (5.3)$$

и замыкает систему.

Выражая ρ из интеграла (5.2), подставляя полученные значения в (5.1), (5.3) и используя уравнение состояния для политропного газа, получаем систему, состоящую из конечного интеграла и обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка:

$$\frac{U^2}{2} + \frac{\gamma q_0^{\gamma-1} S_0}{(\gamma - 1)(r^2 U)^{\gamma-1}} = \Phi + b_0; \quad (5.4)$$

$$R^2 \Phi_{rr} + 2R\Phi_r = -4\pi Gq_0/U. \quad (5.5)$$

Подставим в (5.5) представление для Φ из (5.4). Тогда система (5.4), (5.5) приводится к одному дифференциальному уравнению второго порядка для функции U :

$$5q_0^{2/3} S_0 (2U^2 + 5r^2(U')^2 + rU(2U' - 3rU'')) + \\ + 9U(r^2U)^{2/3} (4\pi Gq_0 + rU(2UU' + r(U')^2 + rU(U''))) = 0. \quad (5.6)$$

В результате изменения масштабов переменных уравнение (5.6) преобразуется к уравнению с одним управляющим параметром \tilde{k} :

$$(2U^2 + 5r^2(U')^2 + rU(2U' - 3rU'')) + \\ + \tilde{k}U(r^2U)^{2/3} (1 + rU(2UU' + r(U')^2 + rU(U''))) = 0, \quad (5.7)$$

которое исследуется численно аналогично уравнению (3.2).

Определены два режима течения газа.

Режим первого типа может быть как дозвуковым, так и сверхзвуковым и определен для любых $r \geq R_0$ (рис. 4,а). По мере удаления от источника плотность газа уменьшается и происходит разгон потока с выходом на режим сверхзвукового течения газа.

Режим второго типа возникает в ограниченной области $r \in [R_0, R_1]$ и является сверхзвуковым (рис. 4,б). На конечном расстоянии от источника число Маха имеет минимум, а плотность — максимум. Решение заканчивается на конечном расстоянии от источника, когда неограниченно возрастают производная потенциала Φ' и радиальная скорость U .

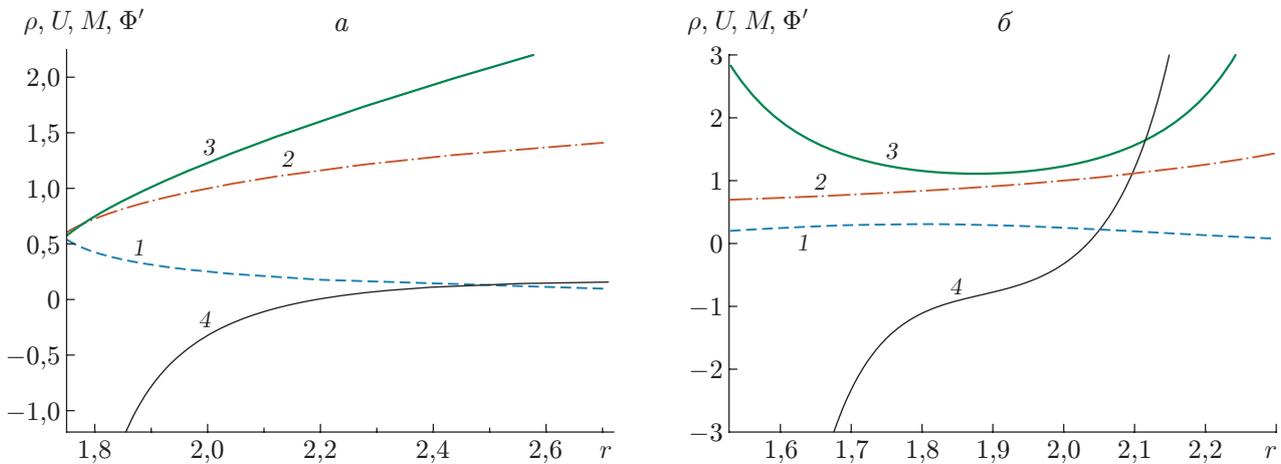


Рис. 4. Графики функций ρ , U , M , Φ' для решения (5.7) в случае отсутствия вращения:

a — $U(2) = 1$, $U'(2) = 1$, $\tilde{k} = 6,4934 \cdot 10^{-5}$, b — $U(2) = 1$, $U'(2) = 1$, $\tilde{k} = 1,62336$; 1 — ρ , 2 — U , 3 — M , 4 — Φ'

В случае исключения вращения у решения отсутствует локальный максимум плотности (см. рис. 4). Таким образом, добавление вращения в модель пространственного движения самогравитирующего газа не только усложняет модель по сравнению со случаем его отсутствия, но и дает более интересное решение.

Заключение. Вихрь Овсянникова при наличии самогравитации как точное решение уравнений газовой динамики является более сложным для анализа по сравнению с классическим случаем стационарного вихря Овсянникова. При аналитическом исследовании инвариантной подсистемы задача сводится к одному дифференциальному уравнению третьего порядка. В результате численных расчетов определены два возможных режима движения, описывающие завихренное движение самогравитирующего газа из области на поверхности сферы. В случае режима первого типа решение определено на конечном расстоянии от источника, при этом плотность в потоке газа становится не ограниченной на некоторой сфере конечного радиуса, окружающей источник. Такое решение можно трактовать как образование пространственного стока или сгущение частиц газа на сфере. В случае реализации режима второго типа источник является сверхзвуковым, решение определено всюду и описывает разлет газа в вакуум. Величина закрутки в течении изменяется по закону r^{-1} .

ЛИТЕРАТУРА

1. Тассуль Ж. Л. Теория вращающихся звезд. М.: Мир, 1982.
2. Пиблс Ф. Дж. Э. Структура Вселенной в больших масштабах. М.: Мир, 1983.
3. Зельдович Я. Б. Теория тяготения и эволюция звезд / Я. Б. Зельдович, И. Д. Новиков. М.: Наука, 1975.
4. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. М.: Наука, 1981.
5. Овсянников Л. В. Особый вихрь // ПМТФ. 1995. Т. 36, № 3. С. 45–52.
6. Овсянников Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
7. Овсянников Л. В. Лекции по основам газовой динамики. М.; Ижевск: Ин-т компьютер. исслед., 2003.

8. **Паршин Д. В., Чупахин А. П.** Стационарный вихрь Овсянникова в поле массивного притягивающего центра // Журн. Сиб. федерал. ун-та. Сер. Математика и физика. 2010. Т. 3, вып. 2. С. 228–243.
9. **Богоявленский О. И.** Методы качественной теории динамических систем в астрофизике и газовой динамике. М.: Наука, 1980.
10. **Станюкович К. П.** Неустановившиеся движения сплошной среды. М.: Наука, 1971.
11. **Баутин С. П.** Математическое моделирование истечения идеального газа в вакуум / С. П. Баутин, С. Л. Дерябин. Новосибирск: Наука. Сиб. издат. фирма, 2005.
12. **Арафайлов С. И., Краснобаев К. В., Тагирова Р. Р.** Одномерное сжатие ограниченных объемов самогравитирующего газа // Изв РАН. Механика жидкости и газа. 2012. № 3. С. 7–17.
13. **Барская И. С., Мухин С. И., Чечеткин В. М.** Математическое моделирование равновесных конфигураций самогравитирующего газа. М., 2006. (Препр. / РАН. Ин-т прикл. математики им. М. В. Келдыша; № 41).
14. **Golovin S. V.** Singular vortex in magnetohydrodynamics // J. Phys. A. 2005. V. 38, N 20. P. 4501–4516.
15. **Luo T., Smoller J.** Existence and non-linear stability of rotating stars solutions of the compressible Euler — Poisson equations // Arch. Rat. Mech. Anal. 2009. V. 191. P. 447–496.
16. **Черевко А. А., Чупахин А. П.** Стационарный вихрь Овсянникова. Новосибирск, 2005. С. 228–243. (Препр. / СО РАН. Ин-т гидродинамики; № 1).
17. **Прасолов В. В.** Многочлены. М.: Моск. центр непрерыв. мат. образования, 2003.

Поступила в редакцию 30/IX 2013 г.
