

УДК 533.951

СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ЖИДКОСТИ КОНЕЧНОЙ ЭЛЕКТРОПРОВОДИМОСТИ ПРИ НАЛИЧИИ ВНЕШНЕГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ

А. И. Задорожный, Р. А. Грунтфест

Ростовский государственный университет, 344007 Ростов-на-Дону

Исследовано влияние конечной электрической проводимости (конечности магнитного числа Рейнольдса) как диссипативного фактора на малые собственные колебания тяжелой невязкой несжимаемой жидкости бесконечной глубины, свободная поверхность которой граничит с вакуумом. На жидкость действует внешнее постоянное горизонтальное магнитное поле. Получено уравнение баланса энергии, и доказана теорема о затухании волн во времени. Проведенные численные расчеты и построенные асимптотические формулы дают полную картину спектра, включающую и его непрерывную часть. Приведены амплитудно-частотные характеристики волновых мод.

В магнитной гидродинамике (МГД) жидкость принято называть идеальной, если она одновременно является невязкой и бесконечно проводящей. Конечное значение коэффициента электропроводности является диссипативным фактором, приводящим к затуханию волн. При исследовании колебаний, как правило, рассматривается два предельных случая длинных и коротких волн, причем в качестве коротковолнового приближения принята модель жидкости бесконечной глубины со свободной поверхностью. Исследования влияния вязкости на свободные поверхностные волны, начатые работами Г. Ламба [1] в конце XIX в., в настоящее время имеют заверченный математический вид [2]. Теория МГД-волн в проводящей жидкости еще далека от завершения. Имеется ряд исследований по этой теме (см., например, [3–7]). В указанных работах спектр свободных колебаний диссипативных МГД-волн в канонических областях подробно не рассматривался. В предлагаемой работе теоретически и численно изучен указанный спектр для жидкости бесконечной глубины. Рассмотрены дискретный и сплошной спектры колебаний тяжелой жидкости конечной электропроводности при действии внешнего горизонтального магнитного поля.

1. Постановки задачи. Рассмотрим невязкую электропроводную жидкость, занимающую нижнее полупространство. Над жидкостью находится вакуум. Введем декартову систему координат, плоскость Oxy которой совпадает с невозмущенной горизонтальной поверхностью жидкости, а ось z направлена вертикально вниз. Пусть на жидкость действуют сила тяжести $(0, 0, g)$ и постоянное магнитное поле $(H_0, 0, 0)$. В работе исследуются двумерные собственные колебания жидкости в плоскости xz . Движение жидкости и электромагнитное поле описываются уравнениями, приведенными, например, в [8]. Разделим пространство на две области:

1. Жидкость ($z \geq 0$). Пусть $\mathbf{V}(V_x, 0, V_z)$ — вектор скорости, ρ — плотность, σ — электропроводность, $\mathbf{h}(h_x, 0, h_z)$, $\mathbf{e}(0, e_y, 0)$ — возмущения напряженностей магнитного и электрического полей, вызываемые движением жидкости. Предполагая колебания малыми, запишем линеаризованные уравнения импульсов и уравнения индукции [8] в безразмерном виде

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} = -\text{grad}(p^*) + \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial x}, \quad \text{div } \mathbf{V} = 0, \quad \text{div } \mathbf{h} = 0, \quad \frac{\partial h_x}{\partial t} = -\frac{\partial V_z}{\partial z} + \frac{1}{\text{Re}_m} \Delta h_x, \quad (1)$$

$$\frac{\partial h_z}{\partial t} = -\frac{\partial V_z}{\partial x} + \frac{1}{\text{Re}_m} \Delta h_z, \quad e_y = \frac{1}{c} \left[\frac{1}{\text{Re}_m} \left(\frac{\partial h_x}{\partial z} - \frac{\partial h_z}{\partial x} \right) - V_z \right], \quad p^* = p_a + \frac{z}{\text{Al}} + p_d + h_x,$$

где $p_a = \text{const}$ — давление на свободной поверхности; p_d — гидродинамическое давление; Δ — оператор Лапласа.

2. Вакуум ($z < 0$). Обозначим через $\mathbf{h}_1(h_{1x}, 0, h_{1z})$, $\mathbf{e}_1(e_{1x}, e_{1y}, e_{1z})$ возмущения напряженности электромагнитного поля. Эти функции удовлетворяют уравнениям Максвелла (током смещения пренебрегаем)

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{h}_1 = 0, \quad \text{div } \mathbf{h}_1 = 0, \quad \frac{\partial e_{1y}}{\partial z} = \frac{1}{c} \frac{\partial h_{1x}}{\partial t}, \quad \frac{\partial e_{1y}}{\partial x} = -\frac{1}{c} \frac{\partial h_{1z}}{\partial t}, \\ \frac{\partial e_{1x}}{\partial z} - \frac{\partial e_{1z}}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial e_{1x}}{\partial x} + \frac{\partial e_{1z}}{\partial z} = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

В уравнениях (1), (2) $c = c_\nu \sqrt{4\pi\rho}/H_0$ — скорость; c_ν — размерная скорость света; $\nu_m = c_\nu^2/(4\pi\sigma)$ — магнитная вязкость; $\text{Re}_m = LH_0/(\nu_m \sqrt{4\pi\rho})$ — магнитное число Рейнольдса; $\text{Al} = H_0^2/(4\pi\rho gL)$ — число Альфвена; $L = \Lambda/(2\pi)$; Λ — длина волны; $L\sqrt{4\pi\rho}/H_0$ — масштаб времени.

Пусть $z = \zeta(x, t)$ — уравнение для возвышения свободной поверхности (СП). Введем на СП нормальные (индекс n) и касательные (индекс τ) компоненты вектора \mathbf{H} и тензора T напряженности магнитного поля, а также тензора полных напряжений P в линеаризованной форме:

$$\begin{aligned} H_n = h_z - \frac{\partial \zeta}{\partial x}, \quad H_\tau = 1 + h_x, \quad T_{nn} = -0,5 - h_x, \quad T_{n\tau} = h_z - \frac{\partial \zeta}{\partial x}, \\ P_{nn} = -p + T_{nn}, \quad P_{n\tau} = T_{n\tau}, \quad p = p_a + z/\text{Al} + p_d. \end{aligned}$$

Для систем (1), (2) зададим следующие граничные условия:

1) на СП (граница раздела жидкость — вакуум) $z = 0$:

$$\begin{aligned} V_z = \frac{\partial \zeta}{\partial t}, \quad [H_n] = 0 \rightarrow h_z = h_{1z}, \\ [e_\tau] = 0 \rightarrow e_y = e_{1y} = \frac{1}{c} \left[\frac{1}{\text{Re}_m} \left(\frac{\partial h_x}{\partial z} - \frac{\partial h_z}{\partial x} \right) - V_z \right], \quad e_x = e_{1x} = 0, \\ [P_{nn}] = 0 \rightarrow p^* + \zeta/\text{Al} = h_{1x}, \quad [T_{n\tau}] = 0 \rightarrow h_x - h_{1x} = 0; \end{aligned} \quad (3)$$

2) на бесконечности $|z| \rightarrow \infty$. Здесь возможны два случая:

а) затухание полей в жидкости (дискретный спектр);

б) ограниченность полей в жидкости (сплошной спектр).

Необходимость рассмотрения сплошного спектра состоит в том, что в рамках модели слоя бесконечной глубины находятся решения, имеющие смысл и для слоя конечной глубины.

2. Сведение к краевым задачам для обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), теорема о диссипации. Для нахождения свободных колебаний применим обычное разделение переменных. Пусть

$$(V_x, V_z, h_x, h_z, e_x, e_y, e_z, p^*, \zeta) = (U, W, X, Z, E_x, E_y, E_z, Q, S) \exp(-\lambda t + ix),$$

где λ — искомый спектральный параметр, вещественная часть которого есть декремент затухания, а мнимая часть — фазовая скорость бегущей волны. Аналогичные обозначения введены для вакуума (добавлен нижний индекс 1). Подставляя последнее выражение в (1), (2), получаем системы ОДУ.

1. Жидкость:

$$-\lambda U(z) = -iQ(z) + iX(z), \quad -\lambda W(z) = -Q'(z) + iZ(z),$$

$$\begin{aligned}
 -\lambda X(z) &= -W'(z) + [X''(z) - X(z)]/\text{Re}_m, & iX(z) + Z'(z) &= 0, \\
 -\lambda Z(z) &= -W(z) + [Z''(z) - Z(z)]/\text{Re}_m, & iU(z) + W'(z) &= 0, \\
 E_y &= \frac{1}{c} \left[\frac{1}{\text{Re}_m} (X'(z) - iZ(z)) - W(z) \right].
 \end{aligned} \tag{4}$$

2. Вакуум:

$$\begin{aligned}
 X_1'(z) - iZ_1(z) &= 0, & iX_1(z) + Z_1'(z) &= 0, & E_{1y}'(z) &= -(\lambda/c)X_1(z), & E_{1x}'(z) &= iE_{1z}(z), \\
 iE_{1y}(z) &= (\lambda/c)Z_1(z), & iE_{1x}(z) + E_{1z}'(z) &= 0.
 \end{aligned}$$

Преобразуем граничные условия (3) на СП:

$$\begin{aligned}
 Q(0) + S/\text{Al} &= X_1(0), & X(0) &= X_1(0), & Z(0) &= Z_1(0), & W(0) &= -\lambda S, \\
 E_{1x}(0) &= 0, & E_{1y}(0) &= \frac{1}{c} \left[\frac{1}{\text{Re}_m} (X'(0) - iZ(0)) - W(0) \right].
 \end{aligned} \tag{5}$$

Задача для вакуума легко решается. С учетом затухания волн на бесконечности ($z \rightarrow \infty$) имеем

$$\begin{aligned}
 Z_1(z) &= Z(0) \exp(z), & X_1(z) &= iZ(0) \exp(z), \\
 E_{1y}(z) &= -i(\lambda/c) Z(0) \exp(z), & E_{1x}(z) &= 0, & E_{1z}(z) &= 0.
 \end{aligned}$$

Рассмотрим систему (4) для жидкости. Дополнительные преобразования условий (5) на СП дают

$$W(0) + \lambda S = 0, \quad Q(0) + S/\text{Al} = iZ(0), \quad X(0) = iZ(0). \tag{6}$$

С учетом (4) и (6) можно доказать следующую теорему о диссипации.

Теорема. *Все колебания жидкости затухают при $0 < \text{Re}_m < \infty$ и $\text{Al} > 0$, т. е. собственные числа дискретного спектра лежат в правой комплексной полуплоскости ($\text{Re}(\lambda) > 0$).*

Умножим первые четыре уравнения системы (4) на комплексно-сопряженные величины и проинтегрируем по z от 0 до ∞ . Затем проинтегрируем по частям, учитывая условия затухания на бесконечности, и сложим полученные выражения. В результате имеет место уравнение баланса энергии

$$\begin{aligned}
 \lambda(\|U\|^2 + \|W\|^2) + \bar{\lambda}(\|X\|^2 + \|Z\|^2) &= \left(\frac{1}{\text{Re}_m} - \bar{\lambda} \right) |Z(0)|^2 + \\
 + \frac{1}{\text{Re}_m} (\bar{X}'(0)X(0) + \bar{Z}'(0)Z(0) - \bar{Z}''(0)Z(0)) &+ \frac{1}{\text{Re}_m} (\|X'\|^2 + \|Z'\|^2 + \|X\|^2 + \|Z\|^2).
 \end{aligned}$$

Здесь норма имеет смысл $\|F\|^2 = \int_0^\infty |F(z)|^2 dz$; черта сверху обозначает комплексную сопряженность.

Далее, с учетом граничных условий (6) на СП получаем

$$\begin{aligned}
 \lambda(\|U\|^2 + \|W\|^2) + \bar{\lambda}(\|X\|^2 + \|Z\|^2 + |Z(0)|^2) &+ \frac{1}{\text{Al}\lambda} |W(0)|^2 = \\
 = \frac{2}{\text{Re}_m} |Z(0)|^2 + \frac{1}{\text{Re}_m} (\|X'\|^2 + \|Z'\|^2 + \|X\|^2 + \|Z\|^2).
 \end{aligned}$$

Положим $\lambda = \alpha + i\beta$ и отделим действительные и мнимые части:

$$\begin{aligned} \alpha\{\|U\|^2 + \|W\|^2 + (\|X\|^2 + \|Z\|^2 + |Z(0)|^2)\} + \frac{\alpha}{(\alpha^2 + \beta^2)\text{Al}} |W(0)|^2 = \\ = \frac{2}{\text{Re}_m} |Z(0)|^2 + \frac{1}{\text{Re}_m} (\|X'\|^2 + \|Z'\|^2 + \|X\|^2 + \|Z\|^2), \\ \beta(\|U\|^2 + \|W\|^2) = \beta(\|X\|^2 + \|Z\|^2 + |Z(0)|^2) + \frac{\beta}{(\alpha^2 + \beta^2)\text{Al}} |W(0)|^2. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что $\alpha > 0$. Теорема доказана.

Пусть $\beta \neq 0$, тогда после исключения β для декремента затухания получим

$$\alpha(\|U\|^2 + \|W\|^2) = \frac{1}{\text{Re}_m} \left(|Z(0)|^2 + \frac{1}{2} (\|X'\|^2 + \|Z'\|^2 + \|X\|^2 + \|Z\|^2) \right).$$

Эту формулу удобно переписать в виде $\alpha = D/(4K)$. Используя формулу для плотности джоулева тепла (МГД-приближение)

$$D_\tau = (\text{rot } \mathbf{H})^2 / \text{Re}_m,$$

можно показать, что D есть суммарное джоулево тепло, K — суммарная кинетическая энергия. Этот результат дает физическую интерпретацию теоремы о диссипации.

После несложных преобразований выражения (4), (5) сводятся к одному ОДУ четвертого порядка

$$Z^{(IV)}(z) - 2Z''(z) + Z(z) + \text{Re}_m(\lambda + 1/\lambda)(Z''(z) - Z(z)) = 0 \quad (7)$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} Z'''(0) - Z'(0) - \frac{1}{\text{Al}\lambda^2} (Z''(0) - Z(0)) + \text{Re}_m \left(\lambda + \frac{1}{\lambda} \right) Z'(0) - \text{Re}_m \frac{1 + \text{Al}}{\text{Al}\lambda} Z(0) = 0, \\ Z'(0) - Z(0) = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

При $z \rightarrow \infty$ ставится условие либо затухания $Z = 0$, либо ограниченности $|Z| < \infty$. Полученная краевая задача является нелинейной относительно спектрального параметра λ .

3. Бесконечно проводящая жидкая среда (идеальная жидкость). Данный случай представляет интерес как асимптотически предельный для жидкости конечной проводимости при $\text{Re}_m = \infty$. Из (7) и (8) следует (второе условие (8) можно не учитывать)

$$(\lambda + 1/\lambda)(Z''(z) - Z(z)) = 0, \quad \text{Al}(\lambda + 1/\lambda)Z'(0) - (1 + \text{Al})Z(0)/\lambda = 0.$$

Возможны два варианта:

1. При $\lambda_0 = \pm i \sqrt{(1 + 2\text{Al})/\text{Al}}$, $Z(z) = C \exp(-z)$ (убывание по глубине) получаем незатухающую по времени поверхностную волну, распространяющуюся с фазовой скоростью λ_0 в горизонтальном направлении.

2. При $\lambda_0 = \pm i \forall |Z''(z) - Z(z)| < \infty, |Z'(0)| < \infty, Z(0) = 0, W(0) = 0$ имеем прогрессивную внутреннюю альфвеновскую волну, форма которой может быть произвольной, а на свободной поверхности выполняется условие «твердой крышки». При этом спектр задачи имеет бесконечную алгебраическую кратность.

Ниже показано, что первый вариант является предельным для жидкости конечной проводимости в случае дискретного спектра, а второй — в случае сплошного спектра.

4. Жидкая среда конечной проводимости. Сплошной спектр. Рассмотрим среду конечной проводимости (краевая задача (7), (8) при условии ограниченности на бесконечности). Для нее характеристическое уравнение имеет вид

$$(\mu^2 - 1)(\mu^2 - (1 - m^2)) = 0, \quad m^2 = \text{Re}_m(\lambda + 1/\lambda).$$

Требую ограниченности решения по глубине, найдем общее решение

$$Z(z) = C_1 \exp(-z) + C_2 \sin(\eta z) + C_3 \cos(\eta z),$$

где η — произвольный вещественный параметр. Из условий на СП следует

$$C_2 = \frac{\lambda^4 Al + \lambda^2 + 2}{(1 - \lambda^2 Al)\eta} C_1, \quad C_3 = \frac{\lambda^2(\lambda^2 Al + 1 + 2Al)}{(1 - \lambda^2 Al)Al} C_1, \quad \lambda^2 Al \neq 1, \quad \lambda = \alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 1}, \quad (9)$$

$$\alpha = \frac{1 + \eta^2}{2\text{Re}_m}, \quad Z(z) = C_1 \left(\exp(-z) + \frac{\lambda^4 Al + \lambda^2 + 2}{(1 - \lambda^2 Al)\eta} \sin(\eta z) + \frac{\lambda^2(\lambda^2 Al + 1 + 2Al)}{(1 - \lambda^2 Al)} \cos(\eta z) \right).$$

По терминологии [1] структура волны по глубине ячеистая (с увеличением глубины переходит в периодическую). При $\lambda = 1/\sqrt{Al}$ (случай $\lambda = -1/\sqrt{Al}$ невозможен) имеем периодическую структуру волны

$$C_1 = 0, \quad C_3 = C_2/\eta, \quad \eta^2 = \text{Re}_m(1 + Al)/\sqrt{Al} - 1,$$

$$Z(z) = C_2(\cos(\eta z) + \sin(\eta z)/\eta), \quad \eta \neq 0, \quad \text{Re}_m > \sqrt{Al}/(1 + Al).$$

Отметим следующие свойства сплошного спектра:

1) для $\alpha < 1$ существует бегущая, затухающая по времени волна, при этом $\alpha = (1 + \eta^2)/(2\text{Re}_m)$, $\beta = \sqrt{1 - \alpha^2}$, $|\lambda| = 1$ (правая полуокружность в комплексной плоскости λ , $\text{Re}(\lambda) > 0$);

2) в случае $\alpha > 1$ имеют место два неколебательных режима (моды), причем $\lambda_m = \alpha - \sqrt{\alpha^2 - 1}$ — декремент медленно затухающей моды; $\lambda_b = \alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1}$ — декремент быстро затухающей моды;

3) существует кратный вещественный корень $\lambda^* = 1$;

4) волны носят характер внутренних: СП не деформируется, и выполняется условие «твердой крышки» $Z(0) = 0$;

5) магнитное поле в вакууме не возмущается;

6) предельное решение при $\text{Re}_m \rightarrow \infty$ есть внутренняя альфвеновская волна

$$\lambda = \pm i, \quad Z(z) = C(\exp(-z) + \sin(\eta z)/\eta - \cos(\eta z)),$$

структура которой определяется произвольным вещественным параметром η . Этот результат уточняет полученный в п. 3 для жидкости бесконечной проводимости.

Проанализируем детально случай кратного корня, а именно процесс слияния вещественных корней и возникновения пары комплексно-сопряженных ($\lambda^* = 1$, $\text{Re}_m^* = (1 + \eta^2)/2$). Используя процедуру разделения переменных, будем искать решения вида

$$\Phi(z, t) = \exp(-\lambda t) \sum \frac{\Phi_{k-m}(z)t^m}{m!}.$$

Подстановка этого выражения в уравнения исходной краевой задачи и приравнивание коэффициентов при одинаковых степенях t дают цепочку краевых задач для определения функций $\Phi_j(z, \lambda)$. Эта цепочка обрывается при $j = 2$, т. е. сумма содержит только два члена и имеет вид

$$\Phi(z, t) = (tZ(z, \lambda) + Z'_\lambda(z, \lambda)) \exp(-\lambda t),$$

где собственная функция $Z(z, \lambda)$ задана выражением (9), а присоединенная функция Z'_λ определяется производной от собственной по спектральному параметру λ , что характерно для голоморфных операторных пучков [2]. Появление временного степенного множителя в последней формуле приводит к возможному начальному возрастанию амплитуды с последующим переходом к экспоненциальному затуханию.

5. Жидкость конечной проводимости. Дискретный спектр. Поставив для общей краевой задачи (7), (8) условие затухания по глубине ($z \rightarrow \infty$), получим

$$Z(z) = C_1 \exp(-z) + C_2 \exp(-\varkappa z), \quad \varkappa = \sqrt{1 - \operatorname{Re}_m(\lambda + 1/\lambda)}, \quad \operatorname{Re}(\varkappa) > 0, \quad \lambda \neq \pm i. \quad (10)$$

Вырожденный случай $\lambda = \pm i$ соответствует двукратному корню $\varkappa = 1$. Далее можно показать, что затухающий по глубине режим отсутствует. Для остальных значений λ , удовлетворяя граничным условиям на СП, приходим к дисперсионному уравнению

$$\sqrt{1 - \operatorname{Re}_m\left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right)} = -\frac{\lambda^4 \operatorname{Al} + \lambda^2 + 2}{\lambda^2(\lambda^2 \operatorname{Al} + 1 + 2\operatorname{Al})}. \quad (11)$$

При этом справедлива зависимость $C_1 = -0,5(1 + \varkappa)C_2$. Очевидно, что уравнение (11) не имеет действительных положительных корней. Оно содержит также два посторонних корня $\lambda = \pm i$. После исключения этих корней получаем

$$\sqrt{1 - \operatorname{Re}_m\left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right)} = \frac{\operatorname{Re}_m}{2} \frac{\lambda(\lambda^2 \operatorname{Al} + 1 + 2\operatorname{Al})}{\lambda^2 \operatorname{Al} + 1} - 1.$$

Это уравнение равносильно полиному

$$P(\lambda, \operatorname{Al}, \operatorname{Re}_m) = \lambda^3(\lambda^2 \operatorname{Al} + 1 + 2\operatorname{Al})^2 - \frac{4}{\operatorname{Re}_m} (\lambda^4 \operatorname{Al}^2 - 1) = 0$$

с условием для отбора посторонних корней

$$\operatorname{Re}\left(\operatorname{Re}_m \frac{\lambda(\lambda^2 \operatorname{Al} + 1 + 2\operatorname{Al})}{2(\lambda^2 \operatorname{Al} + 1)} - 1\right) \geq 0.$$

Поведение корней дисперсионного уравнения в комплексной плоскости $\lambda = \alpha + \beta i$ при фиксированных числах Альфвена показано на рис. 1 (Al меняется от 0,7 до 1,9 с шагом 0,2). Возможно существование двух колебательных затухающих режимов, которые назовем высоко- и низкочастотным. При $\operatorname{Re}_m \rightarrow \infty$ для высокочастотной моды наблюдаем непрерывный предельный переход к случаю жидкости бесконечной проводимости, рассмотренному в п. 3. Приведем соответствующее асимптотическое разложение, заметив, что оно и все последующие получаются с помощью диаграммы Ньютона [9]:

$$\lambda = \pm i \sqrt{\frac{1 + 2\operatorname{Al}}{\operatorname{Al}}} \left(1 - \sqrt{\frac{2}{\operatorname{Re}_m}} \frac{\operatorname{Al}^{5/4}(1 + \operatorname{Al})^{1/2}}{(1 + 2\operatorname{Al})^{7/4}}\right) + \sqrt{\frac{2}{\operatorname{Re}_m}} \frac{\operatorname{Al}^{3/4}(1 + \operatorname{Al})^{1/2}}{(1 + 2\operatorname{Al})^{5/4}} + O\left(\frac{1}{\operatorname{Re}_m}\right).$$

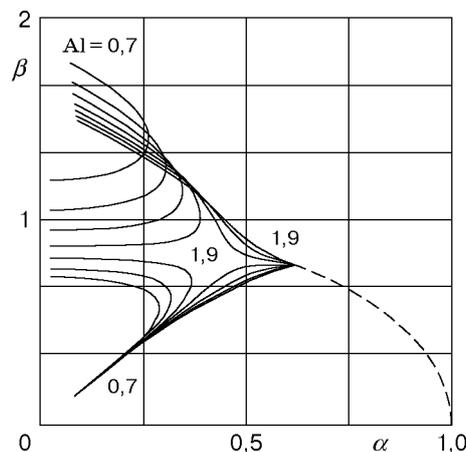


Рис. 1

Низкочастотная мода в случае жидкости бесконечной проводимости (см. п. 3) отсутствует. Для $Al/Re_m \ll 1$ имеем асимптотику

$$\lambda = \sqrt[3]{\frac{4Al}{Re_m}} \left(-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i \right) + O\left(\frac{Al}{Re_m}\right)^{2/3}.$$

При $Al < Al^*$ дисперсионные линии высокочастотной моды имеют точки максимума декремента затухания. Этим свойством обладает низкочастотная мода при $Al > Al^*$. Обратим также внимание на точки «обрыва» решений, которые образуют линию «обрыва» (штриховая линия на рис. 1). Такое сложное поведение дисперсионных кривых связано с существованием двукратного комплексного корня. Для его нахождения имеем алгебраическую систему (уравнения разветвления)

$$P(\lambda, Al, Re_m) = 0, \quad P'_\lambda(\lambda, Al, Re_m) = 0.$$

Исследования показывают, что система в правой полуплоскости $Re(\lambda) > 0$ при $Al > 0$ и $Re_m > 0$ имеет единственное решение, которое найдено численным методом:

$$\lambda^* = 0,417\,498 \pm i \cdot 0,818\,077, \quad Al^* = 1,417\,677, \quad Re_m^* = 0,925\,158.$$

Заметим, что возникновение двукратного комплексного корня достаточно редкий случай в гидромеханике [2], что вызывает повышенный интерес к нему. Асимптотика в окрестности данного корня имеет вид

$$\lambda = \lambda^* \pm (0,418\,427 \mp i \cdot 0,024\,987) \sqrt{\frac{1}{Re_m} - \frac{1}{Re_m^*}}.$$

Можно взять любую ветвь корня. Отсюда следует, что корни сближаются при $Re_m > Re_m^*$ и расходятся при $Re_m < Re_m^*$. Комплексная амплитуда, как и в случае кратного вещественного корня (см. п. 4), равна

$$Z(z, t, \lambda^*) = (tZ(z, \lambda^*) + Z'_\lambda(z, \lambda^*)) \exp(-\lambda^* t).$$

Собственная функция $Z(z, \lambda)$ задается формулой (10). Появление временного множителя t также может привести к начальному возрастанию амплитуды волны, которое затем переходит в экспоненциальное затухание.

Определение линии «обрыва» сводится к численному решению следующей системы:

$$P(\lambda, Al, Re_m) = 0, \quad Re\left(Re_m \frac{\lambda(\lambda^2 Al + 1 + 2Al)}{2(\lambda^2 Al + 1)} - 1\right) = 0.$$

В результате получаем универсальную зависимость $Re_m(Al)$, изображенную на рис. 2. График имеет горизонтальную асимптоту $Re_m = 4/3$ при $Al \rightarrow \infty$. В области, лежащей выше графика, имеем два колебательных затухающих по времени режима (высоко- и низкочастотный). В правой половине области, лежащей ниже графика ($Al > Al^*$), остается высокочастотный режим, в левой ($Al < Al^*$) — низкочастотный. Численный расчет показывает, что на линии «обрыва» в формуле (10) показатель λ равен нулю и собственная функция становится незатухающей (по глубине). При дальнейшем уменьшении магнитного числа Рейнольдса Re_m происходит переход из дискретного спектра в сплошной, а дисперсионная кривая имеет вид дуги окружности единичного радиуса вплоть до кратной точки $\lambda = 1$ (штриховая кривая на рис. 1), после чего наступают режимы медленного и быстрого аperiодического затухания (см. п. 4).

При экспериментальных исследованиях колебаний представляют интерес амплитудно-частотные характеристики, соответствующие монохроматической волне возбуждающего давления $p = p_0 \cos(x + \omega t)$, бегущей по СП ($\omega \in [0, \infty)$, $Im(p_0) = 0$). Результаты расчета

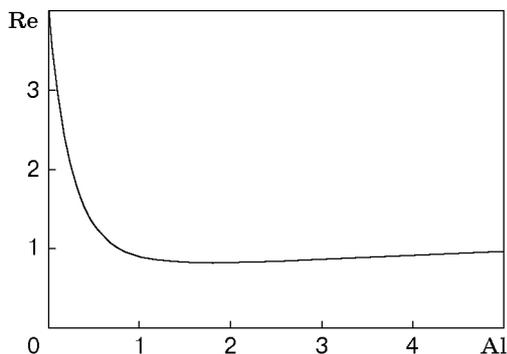


Рис. 2

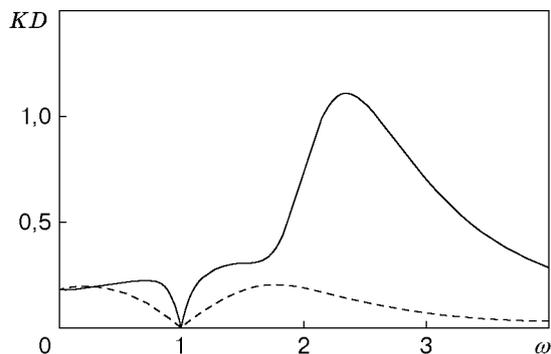


Рис. 3

зависимости коэффициента динамичности KD для амплитуды вертикальной магнитной напряженности от параметра ω при $Al = 0,5$ показаны на рис. 3 (сплошная кривая — $Re_m = 5$, штриховая — $Re_m = 1$). Как и следовало ожидать, наиболее отчетливо квази-резонансный всплеск выражен при достаточно больших магнитных числах Рейнольдса и скоростях бегущей волны, близких к спектральным: $\beta = \text{Im}(\lambda)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ламб Г. Гидродинамика. М.; Л.: Гостехтеоретиздат, 1947.
2. Копачевский Н. Д., Крейн С. Г., Нго Зуй Кан. Операторные методы в линейной гидродинамике. М.: Наука, 1989.
3. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982.
4. Ладиков Ю. Л., Ткаченко В. Ф. Гидродинамические неустойчивости в металлургических процессах. М.: Наука, 1983.
5. Кирко И. М. Жидкий металл в электромагнитном поле. М.; Л.: Энергия, 1964.
6. Брагинский С. И. К магнитной гидродинамике слабопроводящих жидкостей // Журн. эксперим. и теорет. физики. 1959. Т. 37, № 5. С. 1417–1430.
7. Баринов В. А., Тактаров Н. Г. Математическое моделирование магнитогидродинамических волн. Саранск: Изд-во Мордов. ун-та, 1991.
8. Куликовский А. Г., Любимов Г. А. Магнитная гидродинамика. М.: Физматгиз, 1962.
9. Вайнберг М. М., Треногин В. А. Теория ветвления решений нелинейных уравнений. М.: Наука, 1969.

*Поступила в редакцию 3/VI 1998 г.,
в окончательном варианте — 20/I 1999 г.*