УДК 519.634

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕЧЕНИЯ В УДАРНОМ ВЯЗКОМ СЛОЕ

А. Л. Анкудинов

Центральный аэрогидродинамический институт им. Н. Е. Жуковского,
140180 Жуковский, Россия
E-mail: ankudin1@yandex.ru

Рассмотрена существующая в теории вязких гиперзвуковых течений и сформулированная на основе макрокинетических 13-моментных уравнений Греда с использованием приближения двухслойного тонкого вязкого ударного слоя (ТВУС) вблизи нетонких тел двумерная задача о высокоскоростном поступательно-неравновесном обтекании поверхности одноатомным газом. Предложен класс переменных подобия, позволяющих исследуемую кинетическую задачу о ТВУС свести к хорошо изученной задаче Навье — Стокса о ТВУС.

Ключевые слова: одноатомный газ, поступательная неравновесность, тонкий вязкий ударный слой, 13-моментные уравнения Греда.

DOI: 10.15372/PMTF20180516

1. Кинетический тонкий вязкий ударный слой. Исследование высокоскоростных неравновесных течений газа является важной для практики задачей аэродинамики высоких скоростей и больших высот, что объясняется в первую очередь необходимостью обеспечивать надежную тепловую защиту гиперзвуковых и воздушно-космических летательных аппаратов, совершающих вход в атмосферу, суборбитальный полет и т. д.

В работах [1–3] показана возможность адекватного описания неравновесного течения в гиперзвуковом тонком ударном слое (т. е. в узкой области между набегающим высокоскоростным невозмущенным потоком и поверхностью обтекаемого тела) с использованием макроскопических моментных уравнений кинетической теории газов в модели гиперзвукового тонкого вязкого ударного слоя, при этом в [2] рассматривался случай многоатомного газа (неравновесность по внутренним и поступательным степеням свободы), в [1] — случай одноатомного газа (поступательная неравновесность).

Макрокинетические 13-моментные уравнения Греда, используемые при изучении высокоскоростного обтекания тел, позволяют описывать течение одноатомного газа, состояние которого (поступательные степени свободы) существенно отличается от равновесного состояния. В рамках двухслойного приближения тонкого вязкого ударного слоя (ТВУС) эти уравнения в физических переменных x, y имеют следующий вид [1–3]:

$$\rho u\,\frac{\partial u}{\partial x} + \rho v\,\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\,\frac{1}{\mathrm{Re}}\,\frac{P_{22}}{p}\,\mu\,\frac{\partial u}{\partial y}, \qquad \rho u^2\,\frac{1}{R_w} = \frac{\partial P_{22}}{\partial y},$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 14-08-00960).

$$\rho u\,\frac{\partial H}{\partial x}+\rho v\,\frac{\partial H}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\,\frac{1}{\operatorname{Re}\operatorname{Pr}}\,\frac{P_{22}}{p}\mu\,\frac{\partial}{\partial y}\,\Big(H+(\operatorname{Pr}-1)\,\frac{u^2}{2}\Big),\qquad \frac{\partial\,r^\nu\rho u}{\partial x}+\frac{\partial\,r^\nu\rho v}{\partial y}=0,\qquad(1)$$

$$p=2\varepsilon\rho h,\quad \mu=\mu(h),\quad H=h+\frac{u^2}{2},\quad \frac{p}{P_{22}}=1+\frac{2}{3}\Big(\frac{1}{\operatorname{Re}}\,\frac{\mu}{p}\,\frac{\partial u}{\partial y}\Big)^2.$$

Условия на внешней границе ударного слоя при $y=y_e(x)$ (неизвестная величина $y_e(x)$ должна определяться в процессе решения задачи) записываются в виде

$$\rho_\infty v_\infty(u-u_\infty)=\frac{1}{\operatorname{Re}}\,\frac{P_{22}}{p}\,\mu\,\frac{\partial u}{\partial y},\qquad P_{22}=\rho_\infty v_\infty^2,$$
$$\rho_\infty v_\infty(H-H_\infty)=\frac{1}{\operatorname{Re}\operatorname{Pr}}\,\frac{P_{22}}{p}\,\mu\,\frac{\partial}{\partial y}\Big(H+(\operatorname{Pr}-1)\,\frac{u^2}{2}\Big),\qquad \rho v=\rho_\infty v_\infty,\qquad(2)$$

условия на поверхности тела ($y=0$) при заданной температуре стенки — в виде

$$u=v=0,\qquad H-H_w(x)=0.\qquad(3)$$

Уравнения (1)–(3) записаны в безразмерных переменных, которым соответствуют следующие размерные переменные: xL^*, yL^* — расстояния, отсчитываемые в рассматриваемой плоскости от передней критической точки затупленного тела вдоль его поверхности и от поверхности вдоль нормали к ней соответственно; uU_∞^*, vU_∞^* — компоненты скорости в направлениях x, y соответственно; R_wL^* — радиус кривизны поверхности в продольном направлении; rL^* — расстояние от оси (плоскости) симметрии осесимметричного (плоского) тела до его поверхности; $p\rho_\infty^*U_\infty^{*2}$, $\rho\rho_\infty^*$, TU_∞^{*2}/c_p^* — давление, плотность и температура соответственно; hU_∞^{*2}, HU_∞^{*2} — удельная статическая и удельная полная энтальпия соответственно; $\mu\mu_0^*$ — коэффициент вязкости; $P_{22}=p+p_{22}$; $p_{22}\rho_\infty^*U_\infty^{*2}$ — компонента девиатора напряжений $p_{ij}\rho_\infty^*U_\infty^{*2}$ ($i=1,2$, $j=1,2$; индексы 1, 2 соответствуют направлениям x, y); $q_2\rho_\infty^*U_\infty^{*3}$ — компонента вектора теплового потока в поперечном (y) направлении; $\varepsilon=(\gamma-1)/(2\gamma)$; $\gamma=c_p^*/c_v^*$ — отношение удельных теплоемкостей; c_p^*, c_v^* — удельные теплоемкости газа при постоянных давлении и объеме соответственно; $\operatorname{Re}=U_\infty^*L^*\rho_\infty^*/\mu_0^*$ — число Рейнольдса; $\operatorname{Pr}=c_p^*\mu\mu_0^*/\lambda^*$ — число Прандтля; μ_0^* — значение коэффициента вязкости μ^* при температуре торможения T_0^* набегающего потока; λ^* — теплопроводность; L^* — характерный линейный размер (например, радиус кривизны носка тела: $L^*\equiv(R_w^*)|_{x=0}$); U_∞^* — скорость набегающего невозмущенного потока; ρ_∞^* — плотность в набегающем невозмущенном потоке; ν — безразмерный параметр (в плоской задаче $\nu=0$, в осесимметричной — $\nu=1$); звездочкой отмечены размерные величины; индексы w, e, ∞ соответствуют величинам на поверхности тела, на внешней границе ударного слоя и в невозмущенном набегающем потоке.

Введем новые независимые переменные ξ, η и зависимую переменную U:

$$\frac{\partial U}{\partial y}=\rho u\quad(U(x,0)=0),\qquad \xi=x,\quad \frac{\partial\eta}{\partial y}=\rho\theta\quad(\eta(x,0)=0).\qquad(4)$$

Здесь ξ, η — продольная и поперечная координаты соответственно; предполагается, что величина θ является некоторой функцией величин C, x, u, H, U ($C=\mathrm{const}$):

$$\theta=\theta(C,x,u,H,U).\qquad(5)$$

Рассмотрим задачу Навье — Стокса о ТВУС (аналог задачи Греда о ТВУС (1)–(3), построенной на основе приближения Навье — Стокса) и покажем, что в новых переменных ξ,η кинетическая задача Греда о ТВУС для вычисления искомых величин U, u, H, P_{22} и задача Навье — Стокса о ТВУС для вычисления искомых величин U, u, H, p соответственно имеют одинаковую структуру и совпадающие решения.

Иными словами, покажем, что в переменных ξ, η выполняется соответствие вида

$$(U, u, H)_g,\ P_{22} \quad \Rightarrow \quad (U, u, H)_n,\ (p)_n, \tag{6}$$

где индексы g, n обозначают, что соответствующие величины являются решениями кинетической задачи Греда о ТВУС и задачи Навье — Стокса о ТВУС; величина P_{22} содержится только в кинетической задаче, поэтому у нее индекс g отсутствует. Величины с индексами g, n используются в тех случаях, когда не очевидна принадлежность этих величин к одной из двух рассматриваемых задач о ТВУС (Греда либо Навье — Стокса).

Следует отметить, что соответствие решений (6) имеет место только в уравнениях, записанных в переменных вида ξ, η, и отсутствует в уравнениях, записанных в исходных физических переменных x, y. Заметим также, что соответствие (6) позволяет построить решение кинетической задачи о ТВУС, используя решение задачи Навье — Стокса о ТВУС.

В переменных ξ, η (см. (4), (5)) уравнения исследуемой кинетической задачи о ТВУС (1)–(3) принимают следующий вид:

$$\begin{gathered}
u\,\frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial U}{\partial \xi}\,\frac{\partial u}{\partial \eta}\,\theta - \nu\,\frac{1}{r}\,\frac{dr}{dx}\,U\,\frac{\partial u}{\partial \eta}\,\theta = \frac{1}{\mathrm{Re}}\,\theta\,\frac{\partial}{\partial \eta}\,P_{22}\mu\,\frac{\rho}{p}\,\theta\,\frac{\partial u}{\partial \eta}, \\
\frac{\partial P_{22}}{\partial \eta}\,\theta = \frac{u^2}{R_w}, \\
u\,\frac{\partial H}{\partial \xi} - \frac{\partial U}{\partial \xi}\,\frac{\partial H}{\partial \eta}\,\theta - \nu\,\frac{1}{r}\,\frac{dr}{dx}\,U\,\frac{\partial H}{\partial \eta}\,\theta = \frac{1}{\mathrm{Re}\,\mathrm{Pr}}\,\theta\,\frac{\partial}{\partial \eta}\,P_{22}\mu\,\frac{\rho}{p}\,\theta\,\frac{\partial}{\partial \eta}\Big(H + (\mathrm{Pr} - 1)\,\frac{u^2}{2}\Big), \\
\frac{\partial U}{\partial \eta}\,\theta = u;
\end{gathered} \tag{7}$$

$$\frac{p}{\rho} = 2\varepsilon h, \qquad \mu = \mu(h), \qquad H = h + \frac{u^2}{2}; \tag{8}$$

$$\frac{p}{P_{22}} = 1 + \frac{2}{3}\Big(\frac{1}{\mathrm{Re}}\,\mu\,\frac{\rho}{p}\,\theta\,\frac{\partial u}{\partial \eta}\Big)^2. \tag{9}$$

Условия на внешней границе ТВУС ($\eta = \eta_e$) записываются в виде

$$\rho_\infty v_\infty (u - u_\infty) = \frac{1}{\mathrm{Re}}\,P_{22}\mu\,\frac{\rho}{p}\,\theta\,\frac{\partial u}{\partial \eta}, \qquad P_{22} = \rho_\infty v_\infty^2,$$

$$\rho_\infty v_\infty (H - H_\infty) = \frac{1}{\mathrm{Re}\,\mathrm{Pr}}\,P_{22}\mu\,\frac{\rho}{p}\,\theta\,\frac{\partial}{\partial \eta}\Big(H - (1 - \mathrm{Pr})\,\frac{u^2}{2}\Big),$$

$$\frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{u}{\theta}\,\frac{\partial \eta_e}{\partial \xi} + \rho_\infty v_\infty = 0,$$

условия на стенке ($\eta = 0$) — в виде

$$u = u_w = 0, \qquad H = H_w = \mathrm{const}, \qquad U = 0.$$

2. Тонкий вязкий ударный слой Навье — Стокса. Рассмотрим задачу Навье — Стокса о ТВУС (соотношения для ТВУС в физических переменных могут быть получены, если опустить последнее уравнение в системе (1) и заменить величину p/P_{22} на $p/P_{22} = 1$ в остальных соотношениях (1) и в (2)). Все введенные в п. **1** величины, за исключением величины P_{22}, в данном пункте соответствуют задаче Навье — Стокса о ТВУС.

Уравнения задачи Навье — Стокса о ТВУС в физических переменных x, y представляются следующим образом:

$$\rho u\,\frac{\partial u}{\partial x}+\rho v\,\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\,\frac{1}{\mathrm{Re}}\,\mu\,\frac{\partial u}{\partial y},\qquad \rho u^2\,\frac{1}{R_w}=\frac{\partial p}{\partial y},$$

$$\rho u\,\frac{\partial H}{\partial x}+\rho v\,\frac{\partial H}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\,\frac{1}{\mathrm{Re}\,\mathrm{Pr}}\,\mu\,\frac{\partial}{\partial y}\Big(H+(\mathrm{Pr}-1)\,\frac{u^2}{2}\Big),\qquad \frac{\partial\, r^\nu\rho u}{\partial x}+\frac{\partial\, r^\nu\rho v}{\partial y}=0, \tag{10}$$

$$p=2\varepsilon\rho h,\qquad \mu=\mu(h),\qquad H=h+u^2/2.$$

Условия на внешней границе ТВУС ($y=y_e(x)$) записываются в виде

$$\begin{gathered}\rho_\infty v_\infty(u-u_\infty)=\frac{1}{\mathrm{Re}}\,\mu\,\frac{\partial u}{\partial y},\qquad p=\rho_\infty v_\infty^2,\\ \rho_\infty v_\infty(H-H_\infty)=\frac{1}{\mathrm{Re}\,\mathrm{Pr}}\,\mu\,\frac{\partial}{\partial y}\Big(H+(\mathrm{Pr}-1)\,\frac{u^2}{2}\Big),\qquad \rho v=\rho_\infty v_\infty,\end{gathered} \tag{11}$$

условия на стенке ($y=0$) — в виде

$$u=v=0,\qquad H-H_w(x)=0. \tag{12}$$

Применим к задаче Навье — Стокса о ТВУС преобразование (4), (5).

В переменных ξ, η уравнения задачи Навье — Стокса о ТВУС (10)–(12) принимают следующий вид:

$$u\,\frac{\partial u}{\partial \xi}-\frac{\partial U}{\partial \xi}\,\frac{\partial u}{\partial \eta}\,\theta-\nu\,\frac{1}{r}\,\frac{dr}{dx}\,U\,\frac{\partial u}{\partial \eta}\,\theta=\frac{1}{\mathrm{Re}}\,\theta\,\frac{\partial}{\partial \eta}\,\mu\rho\theta\,\frac{\partial u}{\partial \eta},\qquad \frac{\partial p}{\partial \eta}\,\theta=\frac{u^2}{R_w},$$

$$u\,\frac{\partial H}{\partial \xi}-\frac{\partial U}{\partial \xi}\,\frac{\partial H}{\partial \eta}\,\theta-\nu\,\frac{1}{r}\,\frac{dr}{dx}\,U\,\frac{\partial H}{\partial \eta}\,\theta=\frac{1}{\mathrm{Re}\,\mathrm{Pr}}\,\theta\,\frac{\partial}{\partial \eta}\,\mu\rho\theta\,\frac{\partial}{\partial \eta}\Big(H+(\mathrm{Pr}-1)\,\frac{u^2}{2}\Big), \tag{13}$$

$$\frac{\partial U}{\partial \eta}\,\theta=u,\qquad \frac{p}{\rho}=2\varepsilon h,\qquad \mu=\mu(h),\qquad H=h+\frac{u^2}{2}.$$

Условия на внешней границе ТВУС ($\eta=\eta_e$) записываются в виде

$$\begin{gathered}\rho_\infty v_\infty(u-u_\infty)=\frac{1}{\mathrm{Re}}\,\mu\rho\theta\,\frac{\partial u}{\partial \eta},\qquad p=\rho_\infty v_\infty^2,\\ \rho_\infty v_\infty(H-H_\infty)=\frac{1}{\mathrm{Re}\,\mathrm{Pr}}\,\mu\rho\theta\,\frac{\partial}{\partial \eta}\Big(H-(1-\mathrm{Pr})\,\frac{u^2}{2}\Big),\qquad \frac{\partial U}{\partial \xi}+\frac{u}{\theta}\,\frac{\partial \eta_e}{\partial \xi}+\rho_\infty v_\infty=0,\end{gathered} \tag{14}$$

условия на стенке ($\eta=0$) — в виде

$$u=u_w=0,\qquad H=H_w=\mathrm{const},\qquad U=0. \tag{15}$$

3. Соответствие между решением кинетической задачи о ТВУС и решением задачи Навье — Стокса о ТВУС. В переменных ξ, η (см. (4), (5)) уравнения краевой задачи о кинетическом ТВУС для определения кинетических величин U, u, H, P_{22} имеют следующий вид:

$$u\,\frac{\partial u}{\partial \xi}-\frac{\partial U}{\partial \xi}\,\frac{\partial u}{\partial \eta}\,\theta-\nu\,\frac{1}{r}\,\frac{dr}{dx}\,U\,\frac{\partial u}{\partial \eta}\,\theta=\frac{1}{\mathrm{Re}}\,\theta\,\frac{\partial}{\partial \eta}\,P_{22}\mu\,\frac{\rho}{p}\,\theta\,\frac{\partial u}{\partial \eta},\qquad \frac{\partial P_{22}}{\partial \eta}\,\theta=\frac{u^2}{R_w},$$

$$u\,\frac{\partial H}{\partial \xi}-\frac{\partial U}{\partial \xi}\,\frac{\partial H}{\partial \eta}\,\theta-\nu\,\frac{1}{r}\,\frac{dr}{dx}\,U\,\frac{\partial H}{\partial \eta}\,\theta=\frac{1}{\mathrm{Re}\,\mathrm{Pr}}\,\theta\,\frac{\partial}{\partial \eta}\,P_{22}\mu\,\frac{\rho}{p}\,\theta\,\frac{\partial}{\partial \eta}\,\Big(H+(\mathrm{Pr}-1)\,\frac{u^2}{2}\Big), \tag{16}$$

$$\frac{\partial U}{\partial \eta}\,\theta = u, \qquad \frac{p}{\rho} = 2\varepsilon h, \qquad \mu = \mu(h), \qquad H = h + \frac{u^2}{2}.$$

Условия на внешней границе записываются в виде

$$\rho_\infty v_\infty (u - u_\infty) = \frac{1}{\mathrm{Re}}\, P_{22}\mu\, \frac{\rho}{p}\, \theta\, \frac{\partial u}{\partial \eta}, \qquad\qquad P_{22} = \rho_\infty v_\infty^2,$$

$$\rho_\infty v_\infty (H - H_\infty) = \frac{1}{\mathrm{Re}\,\mathrm{Pr}}\, P_{22}\mu\, \frac{\rho}{p}\, \theta\, \frac{\partial}{\partial \eta}\Big(H - (1 - \mathrm{Pr})\,\frac{u^2}{2}\Big), \tag{17}$$

$$\frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{u}{\theta}\,\frac{\partial \eta_e}{\partial \xi} + \rho_\infty v_\infty = 0,$$

условия на стенке — в виде

$$u = u_w = 0, \qquad H = H_w = \mathrm{const}, \qquad U = 0. \tag{18}$$

Заметим, что система уравнений (16) представляет собой систему уравнений (7)–(9), в которой уравнение (9) опущено.

Из сказанного выше следует, что задача о ТВУС (16)–(18) для определения кинетических величин $(U, u, H)_g$, P_{22} совпадает с задачей о ТВУС (13)–(15) для вычисления величин $(U, u, H, p)_n$ соответственно.

Так как в переменных ξ, η задача Навье — Стокса о ТВУС (10)–(12) принимает вид (13)–(15), то согласно (6) имеют место следующие соответствия:

$$(U)_g = (U)_n, \qquad (u)_g = (u)_n, \qquad (H)_g = (H)_n, \qquad P_{22} = (p)_n.$$

Давление $(p)_g$ можно вычислить из уравнения (9):

$$(p)_g = P_{22}\Big[1 + \frac{2}{3}\Big(\frac{1}{\mathrm{Re}}\,\mu\,\frac{\rho}{p}\,\theta\,\frac{\partial u}{\partial \eta}\Big)^2\Big]_g. \tag{19}$$

Здесь

$$\Big[\frac{\rho}{p}\Big]_g = \frac{1}{2\varepsilon(h)_g}, \qquad (h)_g = H - \frac{u^2}{2}.$$

Из уравнения состояния (первого соотношения в (8)) вычисляется плотность $(\rho)_g$ в кинетической задаче:

$$(\rho)_g = \frac{(p)_g}{2\varepsilon(h)_g}. \tag{20}$$

С использованием уравнения

$$\frac{\partial y}{\partial \eta} = (\rho\theta)^{-1}, \qquad y\big|_{\eta=0} = 0 \tag{21}$$

можно записать решение задачи о кинетическом ТВУС в физических координатах, полагая $\rho = (\rho)_g$ в (21) (величина $(\rho)_g$ определена в (20)), а решение задачи Навье — Стокса о ТВУС — полагая $\rho = (\rho)_n$ в (21).

Таким образом, описанные в (4), (5) функции ξ, η образуют новый класс переменных, которые позволяют установить соответствие между решением исследуемой кинетической задачи о ТВУС и решением задачи Навье — Стокса о ТВУС. Очевидно, что во введенном классе переменных содержатся известные переменные Лиза — Дородницына и переменные Мизеса.

Следует отметить, что получить численное решение задачи о кинетическом ТВУС значительно труднее, чем получить численное решение задачи Навье — Стокса о ТВУС, поскольку увеличивается число неизвестных (появляется новая неизвестная величина p/P_{22}) и усиливается нелинейность системы (перед старшей производной в уравнениях количества движения и энергии появляется дополнительный функциональный множитель p/P_{22}, нелинейно зависящий от функций решения).

Заключение. Для описания высокоскоростного поступательно-неравновесного двумерного течения одноатомного газа в рамках модели кинетического тонкого вязкого ударного слоя, сформулированной на основе кинетического 13-моментного приближения Греда, предложены новые переменные, позволяющие установить соответствие между решением исследуемой кинетической задачи о ТВУС и решением задачи Навье — Стокса о ТВУС.

Таким образом, показано, что для исследования течения в кинетическом ТВУС можно использовать решение хорошо изученной задачи Навье — Стокса о ТВУС.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Cheng H. K., Emanuel G.** Perspective on hypersonic nonequilibrium flow // AIAA J. 1995. V. 33, N 3. P. 385–400.
2. **Кузнецов М. М., Никольский В. С.** Кинетический анализ гиперзвуковых вязких течений многоатомного газа в тонком трехмерном ударном слое // Учен. зап. Центр. аэрогидродинам. ин-та. 1985. Т. 16, № 3. С. 38–49.
3. **Кузнецов М. М., Липатов И. И., Никольский В. С.** Реология течения разреженного газа в гиперзвуковом ударном и пограничном слоях // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2007. № 5. С. 189–196.

Поступила в редакцию 15/VIII 2017 г.,
в окончательном варианте — 9/I 2018 г.