

УДК 533.6.011:518.12

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ГАЗОДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ С ПОВЕРХНОСТНЫМ МАССООБМЕНОМ ПРИ НЕСТАЦИОНАРНОМ ОБТЕКАНИИ

Н.И. СИДНЯЕВ

*Московский государственный технический университет
им. Н.Э. Баумана*

Предложена методика расчета газодинамических параметров в ударном слое при обтекании колеблющегося осесимметричного тела вращения с изломами образующей в условиях интенсивного поверхностного массообмена. С использованием разработанного метода проведены численные расчеты для оценки влияния числа Маха и интенсивности массообмена на обтекание тела сложной геометрической формы. Получены зависимости, позволяющие определять время затухания скорости и давления в ударном слое около установочного угла атаки.

В настоящей работе представлены результаты расчетов обтекания проницаемых стенок колеблющихся конусов с интенсивным поверхностным массообменом, который может быть обусловлен уносом материала теплозащитных покрытий либо вдувом охладителя через проницаемые участки боковой поверхности.

Анализ опубликованных работ [1–6] по обтеканию тел потоком газа показывает, что поверхностный массообмен приводит к существенным изменениям распределенных сил трения и давления. Следует отметить, что при этом указанные изменения носят весьма сложный характер и зависят не только от интенсивности массообмена, но и от его распределения по поверхности тела. Интенсивный поверхностный массообмен уже при сравнительно небольших параметрах вдува отесняет пограничный слой от поверхности тела и формирует слой вдуваемого газа, отделенный от внешнего потока вязкой областью смешения [1, 6]. Это приводит к формированию так называемого эффективного тела. На рис. 1 представлена схема обтекания модели с интенсивным поверхностным массообменом.

Существующие методы решения нестационарных уравнений основаны на упрощающих их допущениях [2–4, 5, 7]. Одним из наиболее распространенных является метод последовательных приближений, подробно рассмотренный в работах [6, 7].

Нестационарное течение описывается уравнениями неразрывности и движения:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0,$$
$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\gamma M_\infty^2} \frac{dp}{dx} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right).$$

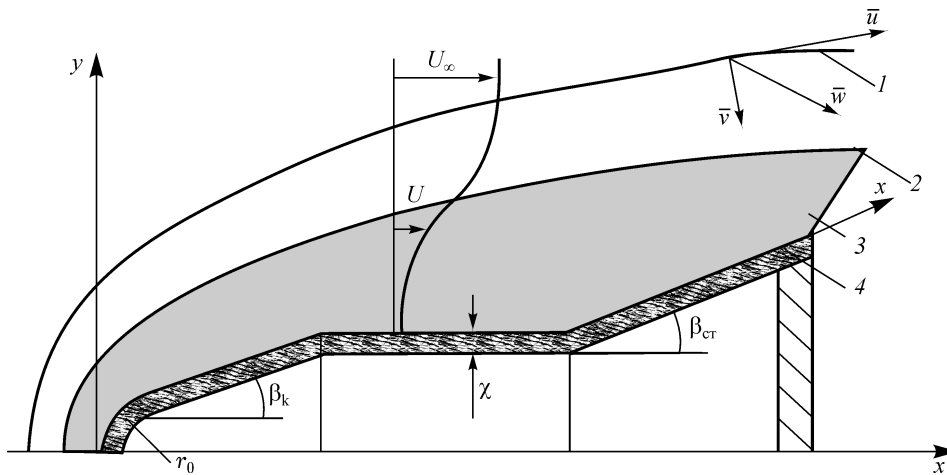


Рис. 1. Схема обтекания модели с интенсивным поверхностным массообменом.

1 — ударная волна, 2 — разделяющая линия тока, 3 — область вдуваемого газа, 4 — затупленный конус с пронизаемой стенкой толщиной $\chi = 0,004$ и затуплением $r_0 = 0,008$ м.

В общем случае граничные условия для нестационарного течения можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} u = u_{\text{вд}}(x, t) = 0, \quad v = v_{\text{вд}}(x, t) \quad \text{при } y = 0, \\ u = u_{\infty}(x, t), \quad v = v_{\infty}(x, t) \quad \text{при } y = \infty, \end{aligned} \quad (1)$$

здесь $u_{\text{вд}}(x, t)$, $v_{\text{вд}}(x, t)$ — продольная и поперечная скорости движения поверхности тела (если оно движется) с учетом интенсивности вдува, $u_{\infty}(x, t)$, $v_{\infty}(x, t)$ — скорость внешнего течения (набегающего потока). Граничные условия в уравнениях (1) зависят от выбора системы координат. Рассматривалась система координат, жестко связанная с телом, в которой $u_{\text{вд}}(x, t) = 0$, $v_{\text{вд}}(x, t) = v_{\text{вд}} = \text{const}$. В случае колеблющейся поверхности тела и стационарного внешнего течения можно также использовать и другие координаты, в которых внешнее течение является стационарным. Примененный в расчетах метод последовательных приближений [7] состоит в том, что решение нестационарного уравнения записывается в виде разложения в ряд вектор-функции:

$$\begin{aligned} f(x, y, t) = \langle u(x, y, t), v(x, y, t), p(x, y, t), \rho(x, y, t), \mu(x, y, t) \rangle^T = \\ = f_0(x, y) + \Delta f^{(1)}(x, y, t) + \Delta f^{(2)}(x, y, t) + \Delta f^{(3)}(x, y, t) + \dots \end{aligned}$$

где индекс “0” соответствует стационарному течению, а штрихи означают порядок малости колеблющихся составляющих скоростей, давления и плотности. Подставляя эти выражения в уравнения движения и неразрывности, получим в первом приближении:

$$\begin{cases} \frac{\partial(\Delta\rho^{(1)})}{\partial t} + \frac{\partial(\Delta\rho^{(1)}\Delta u^{(1)})}{\partial x} + \frac{\partial(\Delta\rho^{(1)}\Delta v^{(1)})}{\partial y} = 0, \\ \Delta\rho^{(1)}\frac{\partial\Delta u^{(1)}}{\partial t} = -\frac{1}{\gamma M_{\infty}^2}\frac{d\Delta p^{(1)}}{dx} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\Delta\mu^{(1)}\frac{\partial\Delta u^{(1)}}{\partial y}\right) \end{cases} \quad (2)$$

и т. д. Решение уравнений (2) для гармонических граничных условий

$$\begin{aligned} \Delta u = 0, \quad \Delta v = v_{\text{вд}} = \text{const} \quad \text{при } y = 0, \\ \Delta u = \Delta u_{\infty}(x, t) = \Delta u_{0\infty}(x) \cdot \exp(i\omega t) \quad \text{при } y = \infty \end{aligned}$$

в комплексной форме имеет вид [7]:

$$\begin{aligned}\Delta u(x, y, t) &= \Delta u_0(x, y) \cdot \exp(i\omega t), \\ \Delta v(x, y, t) &= \Delta v_0(x, y) \cdot \exp(i\omega t),\end{aligned}\quad (3)$$

где амплитуды колебаний продольной и поперечной составляющих скоростей:

$$\begin{aligned}\Delta u_{\text{относ}} &= \frac{\Delta u_0(x, y, t)}{\Delta u_{0\infty}(x)} = 1 - \exp\left(- (1-i) \frac{y}{\delta}\right), \\ \Delta v_{\text{относ}} &= \frac{\Delta u_0(x, y, t)}{\frac{\partial \Delta u_{0\infty}}{\partial t} \delta} = - \left[\frac{y}{\delta} + \frac{\exp\left(- (1-i) \frac{y}{\delta}\right) - 1}{(1-i)} \right].\end{aligned}\quad (4)$$

Здесь δ — толщина колеблющегося слоя вдуваемого газа, определяемая расчетным путем, ω — круговая частота колебаний затупленного конуса (см. рис. 1).

Предполагалось, что обтекание боковой поверхности конуса происходит в условиях вынужденных затухающих колебаний с частотой 5–10 Гц.

Расчет газодинамических параметров при стационарном обтекании проводится в ударном слое, ограниченном головным скачком уплотнения и поверхностью тела. Дозвуковая область вдуваемого газа отделена от внешнего сверхзвукового потока разделяющей линией тока в меридиональном сечении тела. Будем рассматривать осесимметричное сверхзвуковое обтекание тела вращения с образующей произвольной формы и введем ортогональную систему координат (x, r) , начало которой расположено в передней критической точке тела, а ось Ox направлена вдоль его образующей. Примем обозначения: u, v — составляющие вектора скорости \bar{V} в соответствии с принятой системой координат; β_k — угол наклона образующей тела вращения к его продольной оси.

Система уравнений, описывающих течение идеального газа, имеет вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{V}}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \text{grad} P = 0, \\ \frac{\partial P}{\partial t} - a^2 \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \text{div} \bar{V} = 0 \end{cases}$$

и должна быть дополнена уравнением состояния:

$$P = \rho RT,$$

где P, ρ, a, T — давление, плотность, скорость звука и температура соответственно, R — газовая постоянная. Граничные условия на поверхности тела для случая стационарного обтекания:

$$(\bar{\rho v})_{\text{вд}} = \frac{(\rho_u v_u)}{(\rho u)_{\infty}} = m(x); \quad T(x, 0) = \text{const}; \quad u(x, 0) = 0; \quad v(x, 0) = \frac{m(x)}{\rho(x, 0)}.$$

Здесь ρ, u, v — безмерные величины, отнесенные к соответствующим параметрам набегающего потока. Индекс ∞ относится к параметрам в набегающем потоке.

На ударной волне должны выполняться условия сохранения массы, импульса и энергии [8]:

$$\begin{aligned} V_{n_\infty} &= V_{\tau_s}, \quad \rho_\infty (V_{n_\infty} - N) = \rho (V_{n_s} - N), \\ P_\infty + \rho_\infty (V_{n_\infty} - N)^2 &= P + \rho (V_{n_s} - N)^2, \\ \frac{2\gamma}{\gamma-1} \frac{P_\infty}{\rho_\infty} + (V_{n_\infty} - N)^2 &= \frac{2\gamma}{\gamma-1} \frac{P}{\rho} + (V_{n_s} - N)^2, \end{aligned} \quad (5)$$

где индекс ∞ относится к параметрам в набегающем потоке, а s — к параметрам за ударной волной; V_n и V_τ — нормальная и тангенциальная составляющие скорости к поверхности ударной волны; N — скорость движения ударной волны по нормали к ее поверхности.

Введем следующие обозначения:

$$V_{n_\infty} = V_{n_\infty} - N, \quad V_n = V_{n_s} - N, \quad h_\infty = \frac{P_\infty}{\rho_\infty} \frac{2\gamma}{\gamma-1},$$

запишем условия:

$$\begin{cases} \mathbf{V}_{\tau_\infty} = \mathbf{V}_{\tau_s}, \\ \rho \mathbf{V}_{n_\infty} = \rho \mathbf{V}_n, \\ P_\infty + \rho_\infty \mathbf{V}_{n_\infty}^2 = P + \rho \mathbf{V}_n^2, \\ h_\infty + \mathbf{V}_{n_\infty}^2 = h + \mathbf{V}_n^2, \end{cases}$$

где \mathbf{V}_{n_∞} и \mathbf{V}_n — проекции вектора скорости \bar{V} на нормаль к головной ударной волне. Переход к новым переменным $\pi = \ln P$ и $\varepsilon = \ln \rho$ позволяет на той же разностной сетке значительно повысить точность расчета, так как линейная интерполяция функций не дает в этом случае большой погрешности. После соответствующих преобразований система уравнений примет вид:

$$\begin{cases} \frac{d\bar{V}}{dt} + \frac{1}{\varepsilon} \text{grad} \pi = 0, \\ \frac{d\pi}{dt} - a^2 \frac{d\varepsilon}{dt} = 0, \\ \frac{d\varepsilon}{dt} + \varepsilon \text{div} \bar{V} = 0. \end{cases} \quad (6)$$

При численных расчетах для удобства интегрирования системы уравнений в ударном слое, целесообразно ввести новую независимую переменную:

$$\xi = \frac{y - G(x)}{F(t, x) - G(x)},$$

где $G(x)$ и $F(t, x)$ — уравнения поверхности тела и головной ударной волны, при этом $G(x)$ — известная функция, а $F(t, x)$ должна быть определена.

Задача решалась методом установления с применением конечно-разностной схемы [9], требующей приведения гиперболической системы уравнений к характеристическому виду. Для подробной скалярной записи системы (6) целесообразна специальная форма ее представления с искомыми функциями в ортогональных координатах (t, ξ, x) . Учитывая, что система является симметрической, для ее

записи в матричной форме необходимо использовать матрицы T , A , B и C , элементами которых являются переменные и коэффициенты системы:

$$T \frac{\partial X}{\partial t} + A \frac{\partial X}{\partial \xi} + B \frac{\partial X}{\partial x} + C = 0, \quad (7)$$

где $A = \xi_y T + \xi_y D + \xi_x B$;

$$T = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \gamma \end{vmatrix}, \quad X = \begin{vmatrix} U \\ v \\ \pi \\ \varepsilon \end{vmatrix}, \quad B = H_1^{-1} \begin{vmatrix} U & 0 & \gamma^{-1} a^2 & 0 \\ 0 & U & 0 & 0 \\ \gamma & 0 & U & 0 \\ 0 & 0 & -U & \gamma U \end{vmatrix},$$

$$D = H_2^{-1} \begin{vmatrix} v & 0 & 0 & 0 \\ 0 & v & \gamma^{-1} a^2 & 0 \\ 0 & \gamma & v & 0 \\ 0 & 0 & -v & \gamma v \end{vmatrix}, \quad C = (H_1 H_2 H_3)^{-1} \begin{vmatrix} v H_3 (U H_{1y} - v H_{2x}) \\ U H_3 (v H_{2x} - U H_{1y}) \\ \gamma [U (H_2 H_3)_x + v (H_1 H_3)_y] \\ 0 \end{vmatrix},$$

где x , y и t — обозначают дифференцирование по соответствующим координатам; H_1 , H_2 , H_3 — коэффициенты Ляме. Если в расчетной области течения выполняется условие $U > a$, то система (7) является x — гиперболической системой Коши — Ковалевской. Введем сетку с узлами (t^n, ξ_m, x_l) . Положим $f(t^n, \xi_m, x_l) = f_{m,l}^n$ при $m, n, l \in \overline{1, 2, 3, 4, \dots, N}$, $m \in \overline{1, 2, 3, 4, \dots, M}$, $l \in \overline{1, 2, 3, 4, \dots, L}$. Предполагается, что на некотором луче $x = x_l$ полностью задан вектор X и положение скачка уплотнения. Тогда для определения параметров течения в области $t > t_0$, $0 \leq \xi \leq 1$, нужно решать смешанную задачу для системы (7) с начальными данными при $x = x_0$ и граничными условиями на поверхности тела и ударной волны [3]. Структуру разностных уравнений выберем так, чтобы цикл вычисления итерации естественным образом распадался на циклы вычисления каждого луча отдельно.

Сведем краевую задачу, определяющую X_n и $F(t, x)$, к краевой задаче для вектор-функции $X_{m,l}^n$ и F_1^n расчетной сетке [9]. С этой целью аппроксимируем дифференциальные уравнения и граничные условия разностными уравнениями. Примем следующие правила для замены производных разностными соотношениями в точках $(n+\frac{1}{2}, m+\frac{1}{2}, l)$:

$$\left\{ \begin{aligned} \left(\frac{\partial X}{\partial t} \right)_{m+\frac{1}{2}, l}^{n+\frac{1}{2}} &= \frac{1}{2\Delta t} (X_{m+1, l}^{n+1} - X_{m+1, l}^n + X_{m, l}^{n+1} - X_{m, l}^n) + \\ &\frac{\sigma}{2\Delta x} \left(X_{m+\frac{1}{2}, l+1}^n - 2X_{m+\frac{1}{2}, l}^n + X_{m+\frac{1}{2}, l-1}^n \right), \\ \left(\frac{\partial X}{\partial \xi} \right)_{m+\frac{1}{2}, l}^{n+\frac{1}{2}} &= \frac{1}{\Delta \xi} \left[\alpha (X_{m+1, l}^{n+1} - X_{m, l}^{n+1}) + \beta (X_{m+1, l}^n - X_{m, l}^n) \right], \\ \left(\frac{\partial X}{\partial x} \right)_{m+\frac{1}{2}, l}^{n+\frac{1}{2}} &= \frac{1}{2\Delta x} \left[\alpha \left(X_{m+\frac{1}{2}, l+1}^{n+1} - X_{m+\frac{1}{2}, l-1}^{n+1} \right) + \beta \left(X_{m+\frac{1}{2}, l}^n - X_{m+\frac{1}{2}, l-1}^n \right) \right], \end{aligned} \right.$$

где α и β — свободные параметры условия устойчивости Куранта [7], $\sigma \geq 0$ — параметр сглаживания (усреднения), $\alpha \geq \beta \geq 0$ — весовые коэффициенты, причем $\alpha + \beta = 1$, $\mathbf{X}_{m+1/2, l}^n = \frac{1}{2}(\mathbf{X}_{m+1, l}^n + \mathbf{X}_{m, l}^n)$. Подставляя соотношения в точки $(t^{n+1/2}, \xi_{m+1/2}, x_1)$, получим систему разностных уравнений в виде:

$$a_{m+1/2, l}^{n+1/2} X_{m+1, l}^{n+1} + b_{m+1/2, l}^{n+1/2} X_{m, l}^{n+1} = c_{m+1/2, l}^{n+1/2}, \quad (8)$$

где $a = T + 2\alpha\tau_1 A$; $b = T - 2\alpha\tau_1 A$,

$$\begin{aligned} c = & -2\Delta t C + (T - 2\beta\tau_1 A) X_{m+1}^n + (T + 2\beta\tau_1 A) X_m^n - \tau - \\ & - \frac{1}{2} B \left[\alpha (X_{l+1}^{n+1} - X_{l-1}^{n+1}) + \beta (X_{l+1}^n - X_{l-1}^n) \right] + \\ & + \sigma \tau \frac{1}{2} (X_{l+1}^n - 2X_l^n + X_{l-1}^n), \quad \tau_1 = \frac{\Delta t}{\Delta \xi}, \quad \tau_2 = \frac{\Delta t}{\Delta x}. \end{aligned}$$

Краевая задача для этой системы уравнений решается с начальными данными при $X = X_0$ и граничными условиями на поверхности тела и ударной волне. Из структуры системы видно, что она распадается на $(l + 1)$ независимых подсистем, и поэтому достаточно рассмотреть решение разностных уравнений на луче $t = \text{const}$ и $x = \text{const}$. Для этого на каждом луче применим метод прогонки. Рассмотрим также систему уравнений:

$$\tilde{a} \cdot \tilde{X}_{m+1}^n + \tilde{b} \cdot \tilde{X}_m^n = \tilde{c}, \quad (9)$$

которая получается из предыдущей путем отбрасывания последнего ее уравнения, а \tilde{X} полагается равным $[U, v, \pi]$. Граничное условие на поверхности тела можно представить в виде скалярного выражения

$$g_0 = \mu_0^{n+1} \tilde{X}_0^{n+1}, \quad (10)$$

где

$$\mu_0^{n+1} = \left[\frac{H_1^{-1} G_x}{\sqrt{1 + (H_1^{-1} G_x)^2}}, -\frac{1}{\sqrt{1 + (H_1^{-1} G_x)^2}}, 0 \right]^{n+1}.$$

С помощью уравнений (9) и (10) можно получить рекуррентные соотношения для вычислений μ и g при $m = 1, 2, 3, 4, \dots, M$:

$$\mu_{m+1}^{n+1} = \frac{\mu_m^{n+1} \left[(b_{m+1/2}^{n+1/2})^{-1} a_{m+1/2}^{n+1/2} \right]}{\left[\mu_m^{n+1} \left[(b_{m+1/2}^{n+1/2})^{-1} a_{m+1/2}^{n+1/2} \right] \right]}, \quad g_{m+1}^{n+1} = \frac{\mu_m^{n+1} \left[(b_{m+1/2}^{n+1/2})^{-1} c_{m+1/2}^{n+1/2} \right] - g_m^{n+1}}{\left[\mu_m^{n+1} \left[(b_{m+1/2}^{n+1/2})^{-1} c_{m+1/2}^{n+1/2} \right] \right]}. \quad (11)$$

После того, как по формулам (11) выполнена прямая прогонка до точки $m = M$ и получено соотношение

$$\mu_M^{n+1} X_M^{n+1} = g_M, \quad (12)$$

может быть решена система уравнений (5) на ударной волне, предварительно приведенная к виду:

$$\left\{ \begin{array}{l} N = -\frac{F_t}{\sqrt{(H_1^{-1}F_x)^2 + H_2^{-2}}}; V_{n_\infty} = \frac{U_\infty H_1^{-1}F_x - v_\infty H_2^{-1}}{\sqrt{(H_1^{-1}F_x)^2 + H_2^{-2}}}; \\ v_M = v_\infty + \frac{(V_{n_\infty} - V_{nM})}{\sqrt{(H_1^{-1}F_x)^2 + H_2^{-2}}}; V_{nM} = \frac{\rho_\infty V_{n_\infty}}{\rho_M}; \\ P_M = P_\infty - \rho_\infty V_{n_\infty} (V_{n_\infty} - V_{nM}); h_M = h_\infty + \frac{V_{n_\infty}}{2} \left[1 - \left(\frac{\rho_\infty}{\rho_M} \right)^2 \right]; \\ U_M = U_\infty + (v_\infty - v_M) H_1^{-1} H_2 F_x, \end{array} \right. \quad (13)$$

где индексы $n + 1$ и l опущены.

Положение ударной волны F^{n+1} и производные $F_{x,l}^{n+1}$ определяются по формулам:

$$F^{n+1} = F^n + \Delta t \frac{F_t^n + F_t^{n+1}}{2}, \quad F_{x,l}^{n+1} = \frac{F_{l+1}^{n+1} - F_{l-1}^{n+1}}{2\Delta x}.$$

Для решения системы уравнений (13) в данной работе применен метод Ньютона с подбором значений F_t , по которому определяются величины X_m^{n+1} . При этом на крайнем луче $l = L(x + x_B)$ для аппроксимации производных по x используются разностные соотношения:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\partial X}{\partial x} \right)_{m+1/2}^{n+1/2} = \frac{1}{2\Delta x} \left[\alpha (3X_{m+1/2,L}^{n+1} - 4X_{m+1/2,L-2}^{n+1}) + \beta (3X_{m+1/2,L-1}^n + X_{m+1/2,L-2}^n) \right], \\ \left(\frac{\partial X}{\partial x} \right)_{m,L}^{n+1/2} = \frac{1}{2\Delta x} \left[\alpha (3X_{m,L}^{n+1} - 4X_{m,L-1}^{n+1} + X_{m,L-2}^{n+1}) + \beta (3X_{m,L}^n - 4X_{m,L-1}^n + X_{m,L-2}^n) \right], \\ F_{x,L}^{n+1} = \frac{(3F_{L-1}^{n+1} - 4F_{L-2}^{n+1} + F_{L-3}^{n+1})}{2\Delta x}, \end{array} \right.$$

обеспечивающие тот же порядок точности всей схемы в целом.

Для точки $m = M$ на ударной волне уравнения (13) вместе с прогоночным соотношением (12) решаются также методом Ньютона путем подбора F_t^{n+1} . Сначала задаются начальные приближения для F_t , по значению которого рассчитываются V_{n_∞} , затем решается система четырех уравнений относительно переменных ρ_M , P_M , V_{nM} , h_M . Далее определяются величины, v_M , U_M . Найденный вектор X_M^{n+1} подставляется в прогоночное соотношение и уточняется значение F_t . Расчет заканчивается, когда прогоночное соотношение (12) в точке $m = M$ будет удовлетворено с заданной степенью точности. Зная вектор X_M , можно последовательно найти его значения для $m = M-1, M-2, M-3, \dots, 0$, т. е. произвести обратную прогонку по системе

$$d_{m+1/2}^{n+1/2} = b_{m+1/2}^{n+1/2} X_m^{n+1} = c_{m+1/2}^{n+1/2} - a_{m+1/2}^{n+1/2} X_{m+1}^{n+1},$$

которая получается из (8) путем замены третьего уравнения прогоночным соотношением $g_m = \mu_m \tilde{X}_m$. Разрешая это уравнение относительно \tilde{X}_m , получим:

$$\pi_m = \frac{gb_{11} - \mu_U d_1 - \mu_v d_2}{\mu_\pi b_{11} - \mu_U b_{13} - \mu_v b_{23}}, \quad \varepsilon_m = \frac{d_3 + b_{11} \pi_m}{hb_{11}}, \quad U_m = \frac{d_1 + b_{13} \pi_m}{b_{11}}, \quad v_m = \frac{d_2 + b_{23} \pi_m}{b_{11}},$$

где b_{ik} и d_i — элементы матриц b и d ; μ_U, μ_v, μ_π — компоненты вектор-строки $\mu = [\mu_U, \mu_v, \mu_\pi]$. Переходя от слоя к слою и определяя на каждом из них параметры газа для $l = \overline{1, 2, 3, 4, \dots, L}$, можно найти вектор X во всей области интегрирования $t > t_0, 0 \leq \xi \leq 1, 0 \leq x \leq x_0$. Последний луч $l = L$ выбирается так, чтобы нормальная составляющая вектора скорости на нем всегда была больше скорости звука. Производные по направлениям на этом луче определяют по формулам односторонних разностей. Коэффициент давления в точках поверхности тела

$$\bar{p} = C_p = \frac{P - P_\infty}{q_\infty}.$$

Предельные расчеты позволили найти распределение основных параметров потока в поле течения между ударной волной и поверхностью тела. В качестве примера (см. рис. 2, *a, b*) представлены распределения параметров потока P, ρ, T, u, v, M по нормали к поверхности тела. Толщина δ слоя двухазного газа определяется по координате изменения знака нормальной составляющей скорости.

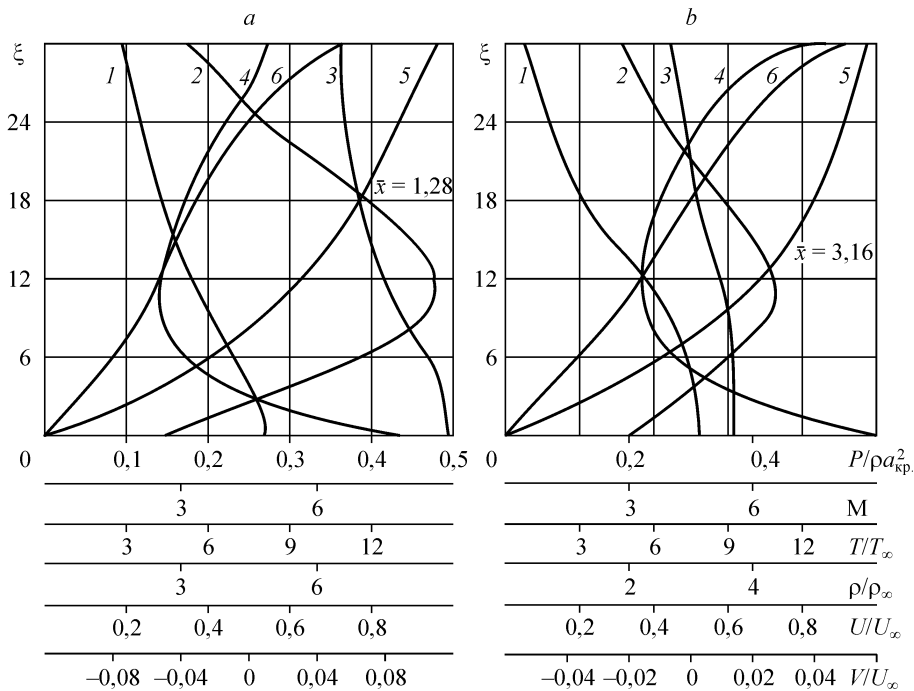
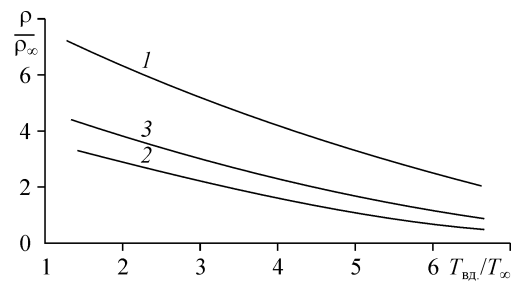


Рис. 2. Распределение параметров потока по нормали к поверхности тела при распределенном вдуве для различных \bar{x} при $M_\infty = 16, (\rho v)_{\text{вд.}} = 1,64 \%$.

$$u/u_\infty (1), T/T_\infty (2), P/\rho a_{\text{кр}}^2 (3), \rho/\rho_\infty (4), v/u_\infty (5), M (6).$$

Рис. 3. Зависимость плотности от температурного фактора $T/T_{вд.}$ при $(\bar{\rho}v)_{вд.} = 1,64\%$, $M_\infty = 5,95$.
 Значения $\bar{x}_{вд.} = x/R_3$ (кривые): 1,52 (1), 2,32 (2), 5,36 (3).



Давление, температура, плотность и составляющие вектора скорости представлены в безразмерной форме (плотность и составляющие скорости отнесены соответственно к плотности и скорости набегающего потока ρ_∞ , U_∞ , давление — к $\rho_\infty a_{кр}^2$, линейные размеры — к радиусу мишеля R_m .

Удовлетворительное согласование результатов расчетов с экспериментальными данными [1, 6] позволяет сделать вывод о корректности принятых при разработке данного метода допущений и его эффективности при проведении расчетов сверхзвукового обтекания тел сложной геометрической формы в условиях интенсивного поверхностного массообмена при произвольном законе его распределения. Результаты расчета по данному методу приведены на рис. 2 – 4.

Рассмотрим режим нестационарного обтекания, возникающего вследствие колебаний осесимметричного тела вращения с поверхностным массообменом в собственной плоскости. Следует отметить, что нестационарные течения также могут возникать по разным причинам, например, если условия на проницаемой стенке меняются во времени (нестационарный вдув, непостоянная температура вдуваемого газа), либо изменяются условия во внешнем потоке (например, скорость или температура).

Выражения (3) характеризуют изменения колебательных скоростей в ударном слое (см. рис. 1). Как следует из выражений (4), амплитуда возбуждаемой проницаемой стенкой конуса волны экспоненциально убывает по направлению нормали к поверхности стенки. Следует отметить, что основное влияние массообмена в потоке около колеблющейся стенки сказывается вблизи ее на расстоянии, равном δ . Это следует из графика, представленного на рис. 5, на котором приведены зависимость

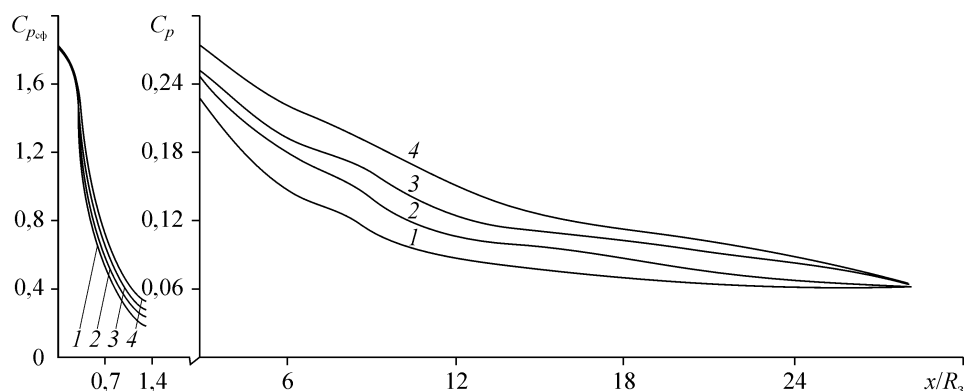


Рис. 4. Распределение давления по поверхности сложного тела при различных значениях температурного фактора $T/T_{вд.}$ при $(\bar{\rho}v)_{вд.} = 2,1\%$; $M_\infty = 5,95$.
 Значения \bar{T} (кривые): 7,2 (1), 4,6 (2), 2,5 (3), 1,4 (4).

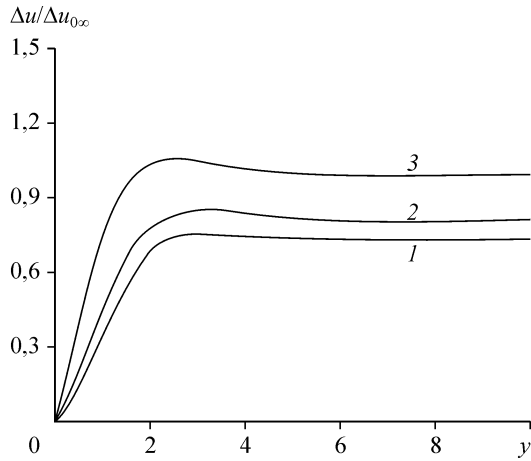


Рис. 5. Зависимости относительной амплитуды колебания $\Delta u/\Delta u_{\infty}$ от безразмерного расстояния y для относительной координаты x .

$$\bar{x}_{\text{вд.}} = 3 (1), 2 (2), 1,5 (3).$$

относительной амплитуды колебания $\Delta u/\Delta u_{\infty}$ от безразмерного расстояния y/δ при $1-x = 10, 2-x = 6, 3-x = 1$. Из приведенного графика видно, что амплитуда колебания скорости изменяется от нуля на стенке до амплитуды колебания внешнего

потока, причем это изменение в основном происходит в пределах слоя толщиной $y \approx \delta$. На рис. 6 показано распределение поперечной скорости v для различных значений $\xi = 0,4$ (a) и $\xi = 0,6$ (b) при $(\bar{\rho v})_{\text{вд.}} = 10\%$. Распределение давления около колеблющегося в газе тела [10, 11] $P(x, t)$ принималось в виде суммы распределения давления, полученного расчетным путем, при стационарном обтекании $p(x)$ и нестационарного члена $p'(x, t)$, т. е. $P(x, t) = p(x) + p'(x, t)$. Нестационарная компонента $p'(x, t)$ определяется из соотношения для течения Прандтля — Майера [6, 11] вдоль линии тока в виде

$$p'(x, t) = \frac{\rho(x)u(x)^2}{\sqrt{M(x)^2 - 1}} \Delta \epsilon_p(x).$$

Здесь $\Delta \epsilon_p(x)$ — изменение угла наклона касательной к линии тока (траектории), лежащей в плоскости колебаний, Φ — угловая координата, в связанной с телом цилиндрической системе координат. Для изменения угла наклона линии тока

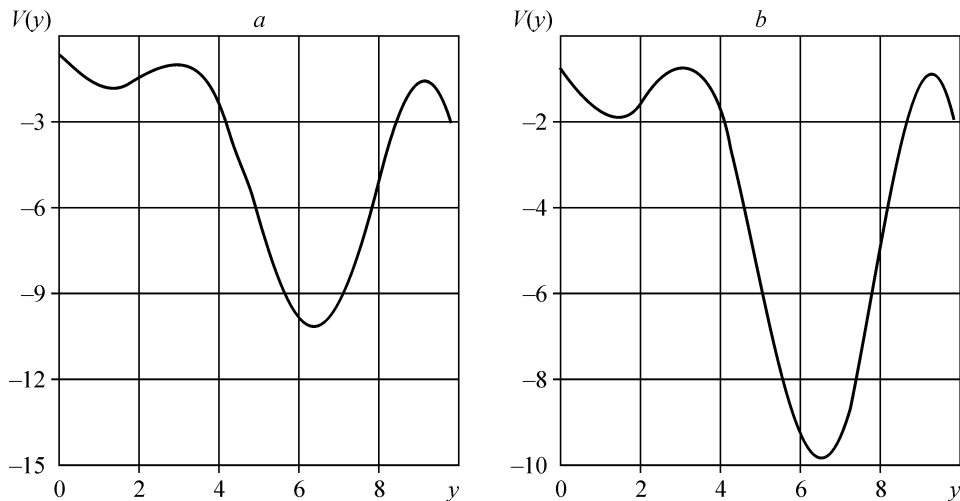


Рис. 6. Распределение амплитуды поперечной скорости при $(\bar{\rho v})_{\text{вд.}} = 10\%$.

$\xi = 0,4$ (a), $\xi = 0,6$ (b).

$\Delta \varepsilon_p(x)$, вызванного движением тангажа, которое включает только вертикальное ускорение z'' точки тела, расположенной на оси колебаний, и угловую скорость ω_z , можно получить выражение [6]

$$\Delta \varepsilon_p(x)_{z'', \omega} = \frac{\sin \Phi}{u_\infty} \left(\frac{z''}{u_\infty} - 2x\omega_z \cos \beta_\alpha \right),$$

где β_α — угол наклона стенки при колебаниях, Φ — угловая координата, в связанной с телом цилиндрической системе координат.

Коэффициент давления на колеблющемся теле определялся в виде

$$\bar{p}(x, t) = \frac{p(x, t) - p_\infty}{q_\infty} = \frac{2}{\gamma M_\infty^2} \left[\frac{p(x, t)}{p_\infty} - 1 \right].$$

Когда тело колеблется около некоторого среднего угла α_e , отношение давлений p/p_∞ можно записать в виде

$$\frac{p(x, t)}{p_\infty} = \frac{p(x, t, \alpha_e)}{p(x, \alpha_e)} \frac{p(x, \alpha_e)}{p(0, \alpha_e)} \frac{p(0, \alpha_e)}{p_1} \frac{p_1}{p_\infty},$$

где $p(x, \alpha_e)$ — давление на поверхности тела, обтекаемого под углом атаки α_e стационарным потоком; $p(0, \alpha_e)$ — давление на поверхности затупленного конуса, обтекаемого под углом атаки; p_1 — давление в ударном слое затупленного конуса при $\alpha = 0$.

Для затупленного конуса с проницаемыми стенками при малых углах атаки использовалось выражение

$$\frac{p(0, \alpha_e)}{p_1} = 1 - \eta \alpha_e \sin \Phi + \alpha_e^2 (\eta' - \eta'' \cos 2\Phi),$$

где η , η' , η'' — коэффициенты давления, используемые в методе Стоуна — Копала для расчета давления (см. табл. Копала [11]).

Выражение для давления на поверхности затупленного конуса, колеблющегося около угла α_e , записывалось в виде

$$\frac{p(x, t, \alpha_e)}{p_\infty} = \frac{p_1}{p_\infty} \left(1 + \frac{\gamma M_1^2 \Delta \varepsilon_p}{\sqrt{M_1^2 - 1}} \right) \left[1 - \eta \alpha_e \sin \Phi + \alpha_e^2 (\eta' - \eta'' \cos 2\Phi) \right],$$

где $\alpha_e = \theta - \frac{\omega_z (x \sec \beta_k + x_0)}{u_\infty}$, θ — угол тангажа, x_0 — продольная координата оси колебаний тела, M_1 — число Маха в ударном слое при $\alpha = 0$.

Для коэффициента давления в нестационарном случае использовалось выражение

$$\bar{p}(x, t, \alpha_e) = \frac{2}{\gamma M_\infty^2} \left[\frac{p(x, t, \alpha_e)}{p_\infty} - 1 \right] = \frac{2}{\gamma M_\infty^2} \left[\left(\frac{p_1}{p_\infty} - 1 \right) + \frac{p_1}{p_\infty} \left(\frac{\gamma M_1^2}{\sqrt{M_1^2 - 1}} \Delta \varepsilon_p - \eta \alpha_e \sin \Phi - \gamma \frac{M_1^2}{\sqrt{M_1^2 - 1}} \Delta \varepsilon_p \eta \alpha_e \sin \Phi + \alpha_e^2 (\eta' - \eta'' \cos 2\Phi) + \frac{\gamma M_1^2}{\sqrt{M_1^2 - 1}} \Delta \varepsilon_p \alpha_e^2 (\eta' - \eta'' \cos 2\Phi) \right) \right].$$

Распределение давления около колеблющегося в газе тела $P(x, t)$ в интересующем нас случае зависит от режима его колебаний, т. е. затухающих.

Коэффициент момента тангажа и их производные, для тела вращения с образующим β_k , определяются из соотношений:

$$m_z = \frac{1}{Sl} \int_0^l \int_0^{2\pi} \bar{p}(x, t, \alpha_e) l_0 \sin \varphi d\varphi dx,$$

$$m_z^\alpha = \left(\frac{\partial m_z}{\partial \alpha} \right)_{\alpha=0, \alpha_e \rightarrow \alpha} = \frac{1}{Sl} \int_0^l \int_0^{2\pi} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \alpha} (x \sec^2 \beta_k - x_0) x \operatorname{tg} \beta_k \sin \varphi d\varphi dx,$$

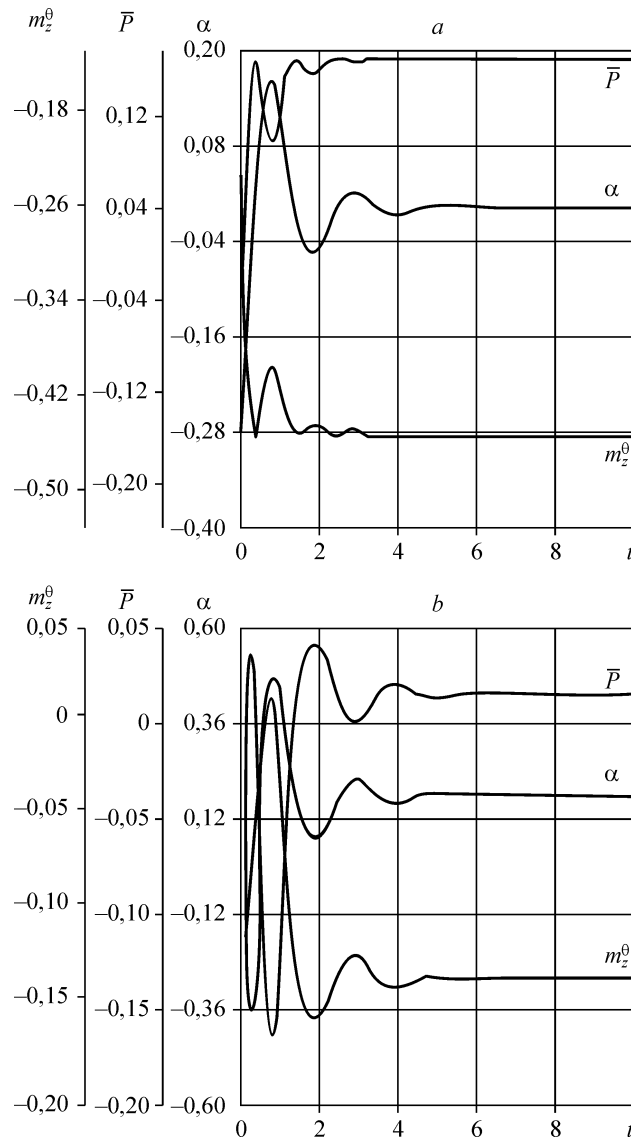


Рис. 7. Изменение коэффициентов момента тангажа, давления (наветренная образующая) и угла атаки от времени при затухающих колебаниях $M_\infty = 6$, $(\bar{\rho v})_{\text{вд.}} = 1,64\%$, установочный угол $\alpha_e = 0$ (a), 10° (b).

$$m_z^{\dot{\vartheta}} = m_z^{\dot{\alpha}} + m_z^{\omega_z} = \frac{2u_\infty}{l} \left(\frac{\partial m_z}{\partial \omega_z l / 2u_\infty} \right) = \frac{2u_\infty}{Sl^2} \int_0^l \int_0^{2\pi} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \omega_z} (x \sec^2 \beta_k - x_0) x \operatorname{tg} \beta_k \sin \varphi d\varphi dx,$$

где $l_0 = x \sec^2 \beta_k - x_0$ — плечо сил; l — длина затупленного тела вращения, колеблющегося около угла $\alpha_e = \vartheta - \omega_z (x \sec \beta_k + x_0) / u_\infty$, ϑ — угол тангажа, x_0 — продольная координата оси колебаний тела, S — площадь миделя. На рисунке 7 показана зависимость коэффициентов момента тангажа и давления от колебания в плоскости угла атаки α . Анализ производных аэродинамических моментов по углу атаки [10] позволяет установить, обладает ли тело тем или иным видом статической устойчивости.

Удовлетворительное согласование по ряду параметров результатов выполненных расчетов с данными, полученными в работах [1, 4, 6, 10], позволяет сделать вывод о корректности принятых при разработке предложенного метода допущений и его эффективности при проведении расчетов сверхзвукового обтекания колеблющихся тел сложной геометрической формы в условиях интенсивного поверхностного массообмена.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сидняев Н.И., Калугин В.Т., Луценко А.Ю. и др. Научные основы технологий XXI века / Под общ. ред. А.И. Леонтьева, Н.Н. Пилюгина, Ю.В. Полежаева и др. — М.: УНПЦ “Энергомаш”, 2000. — 136 с.
2. Пасконов В.М., Полежаев И.И., Чудов Л.А. Численное моделирование процессов тепло- и массообмена. — М., 1984. — 285 с.
3. Шевелев Ю.Д. Пространственные задачи вычислительной аэродинамики. — М.: Наука, 1986. — 367 с.
4. Сидняев Н.И. Метод расчета нестационарного обтекания тела вращения с поверхностным массообменом в рамках параболизированных уравнений Навье — Стокса // Математическое моделирование. — 2004. — Т. 16, № 5. — С. 55–65.
5. Рогов Б.В., Соколова И.А. Обзор моделей вязких внутренних течений // Математическое моделирование. — 2002. — Т. 14, № 1. — С. 41–72.
6. Сидняев Н.И. Методика численного расчета сверхзвукового обтекания колеблющегося осесимметричного тела вращения в условиях интенсивного поверхностного массообмена // Вестник МГТУ. Сер. Естественные науки. — 2003, № 1(10). — С. 71–87.
7. Галицейский Б.М., Рыжов Ю.А., Якуш Е.В. Тепловые и гидродинамические процессы в колеблющихся потоках. — М., 1977. — С. 256.
8. Самарский А.А., Попов Ю.П. Разностные методы решения задач газовой динамики. — М., 1980. — С. 352.
9. Бабенко К.И., Воскресенский Г.П., Любимов А.Н. и др. Пространственное обтекание гладких тел идеальным газом. — М.: Наука, 1964. — С. 7–18.
10. Сидняев Н.И. О методике исследования коэффициентов вращательных производных аэродинамического момента конуса с поверхностным массообменом // Изв. вузов. Авиационная техника. — 2004, № 2. — С. 30–33.
11. Аэродинамика ракет / Под ред. Н.Ф. Краснова. — М.: Высшая школа, 1968. — 772 с.

Статья поступила в редакцию 28 февраля 2005 г.