ОБ УРАВНЕНИЯХ СТАЦИОНАРНЫХ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ТЕЧЕНИЙ ГАЗА В ПЕРЕМЕННЫХ «ДАВЛЕНИЕ — ФУНКЦИЯ ТОКА»

В. Г. Дулов (*Новосибирск*)

Уравнения стационарных осесимметричных течений невязкого и нетеплопроводного газа с произвольным уравнением состояния преобразуются к такому виду, когда давление и функцию тока можно рассматривать как независимые переменные. Искомая функция этих переменных вводится так, что динамические уравнения удовлетворяются тождественно, а из уравнения неразрывности для этой функции получается уравнение Монжа-Ампера. Сама искомая функция представляет собой поток количества движения через линию постоянного давления в направлении оси симметрии. Через значения этой функции просто выражается коэффициент сопротивления тела вращения с образующей в виде произвольно взятой линии тока. Приводятся примеры расчетов. В первом из них рассматривается задача о внешнем обтекании сверхзвуковым потоком тела с произвольной образующей. Аппроксимация изменения искомой функции вдоль изобары полиномом от функции тока позволяет свести задачу к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Во второй задаче приближенно находится распределение параметров между ударной волной и поверхностью притупленного тела в гиперзвуковом потоке. Решение обладает относительно невысокой точностью, но записывается в элементарной форме, пригодной для быстрых расчетов.

1. Ниже примем следующие обозначения: x, y — геометрические координаты в плоскости осевого сечения, p — давление, ρ — плотность, i — теплосодержание, отнесенное к единице массы, ψ — функция тока, w — модуль скорости, u и v — проекции скорости на оси x и y соответственно, M — число Маха, ϑ — угол наклона вектора скорости к оси симметрии, S — энтропия, a — скорость звука, индекс ∞ используется для обозначения параметров набегающего потока. Все размерные величины отнесены к параметрам невозмущенного течения. Теплосодержание i будем считать заданной функцией давления и энтропии (уравнение состояния): $i = i\,(p, S)$.

Введем в качестве независимых переменных давление p и функцию тока ψ. Тогда

$$d\psi = \rho y\,(u dy - v dx) = \rho y\,[u\,(y_p\,dp + y_\psi\,d\psi) - v\,(x_p\,dp + x_\psi\,d\psi)]$$

или

$$(\rho y u y_\psi - \rho y v x_\psi - 1)\,d\psi = (\rho y v x_p - \rho y u y_p)\,dp, \qquad 1 / \rho = i_p$$

Ввиду независимости dp и $d\psi$ отсюда следуют соотношения

$$y y_\psi - v x_\psi = i_p / y, \qquad v x_p - u y_p = 0 \tag{1.1}$$

Рассмотрим динамические уравнения для невязкого и нетеплопроводного газа

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \tag{1.2}$$

$$S = S\,(\psi), \qquad {}^1/_2\,(u^2 + v^2) + i = i_m = \mathrm{const} \tag{1.3}$$

В дальнейшем будем считать безразмерное теплосодержание отнесенным к величине w_∞^2. В (1.2) перейдем к независимым переменным ψ и y; получаем

$$p_\psi = u_y / y\,, \quad \text{или} \quad y_\psi = -\,u_p / y \tag{1.4}$$

В последнем случае y рассматривается как искомая функция, а давление как независимая переменная.

Уравнения (1.1) и (1.4) могут оказаться полезными для численных расчетов, так как форма их записи внешне похожа на систему уравнений в характеристических переменных: два из полученных уравнений содержат производные от искомых функций только по одному направлению. Однако уравнения (1.1) и (1.4) нельзя рассматривать как систему независимых уравнений.

Используя изоэнергетическое соотношение (1.3) для частных производных имеем

$$x_p = (u/v)\;\; y_p, \qquad x_\psi = (v_p / y) \tag{1.5}$$

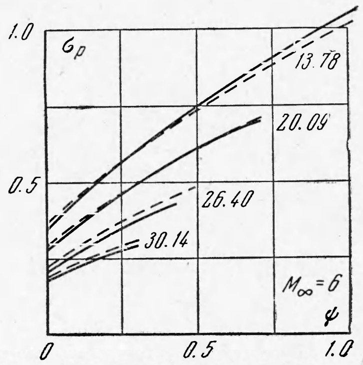
Уравнение (1.4) будет удовлетворено тождественно, если положить, что

$${}^1/_2 y^2 = \sigma_p, \qquad u = -\sigma_\psi \tag{1.6}$$

где $\sigma = \sigma\,(p, \psi)$ — произвольная функция. Исключая x, перекрестным дифференцированием из (5) можно получить уравнение, содержащее одну лишь функцию σ

$$2\,(i_m - i)\,(\sigma_{p\psi}{}^2 - \sigma_{pp}\,\sigma_{\psi\psi}) - \left[\, i_s S'\,(\psi)\,\sigma_\psi + i_p\,\frac{2\,(i_m - i) - \sigma_\psi{}^2}{2\sigma_p} \right] \sigma_{pp} +$$
$$+\, 2 i_p\,\sigma_\psi\,\sigma_{p\psi} + i_p{}^2 + [2\,(i_m - i) - \sigma_\psi{}^2]\; i_{pp} = 0 \tag{1.7}$$

При $\Delta > 0$ уравнение (1.7) будет уравнением гиперболического типа, при $\Delta < 0$ — эллиптическим уравнением, т. е. гиперболичность имеет место при сверхзвуковых скоростях, а эллиптичность — при дозвуковых. Из теории уравнений Монжа — Ампера известно, что если коэффициент при нелинейной комбинации старших производных не обращается в нуль, то граничная задача в области эллиптичности для такого уравнения имеет два различных решения. Если имеется точка, где этот коэффициент обращается в нуль, то решение будет единственным. В уравнении (1.7) таким коэффициентом будет квадрат модуля скорости. Следовательно, когда в потоке имеется критическая точка (например, в задачах о внешнем обтекании тел) решение должно быть единственным. Если в потоке имеются местные дозвуковые области, но полное торможение потока отсутствует (например, в сверхзвуковых газовых струях), то могут существовать два решения.



Фиг. 1

Выясним газодинамический смысл введенной функции $\sigma(p, \psi)$. Второе из равенств (6) дает

$$\sigma = -\int u\, d\psi$$

Здесь интеграл в правой части берется вдоль изобары. Отсюда следует, что σ представляет собой поток количества движения через линию $p = \mathrm{const}$ в направлении оси симметрии. Фиксируем некоторую поверхность вращения с образующей в виде линии тока. Проекция X на направление оси симметрии силы суммарного давления на такую поверхность вычисляется следующим образом:

$$X = 2\pi \int py\, y_p\, dp = 2\pi\, (p\sigma_p - \sigma)$$

В частности, если X определена для линии тока $\psi = 0$ (поверхность тела), то последнее выражение даст величину силы сопротивления, причем величина $2\sigma_p\, \pi = \pi y^2$ при $\psi = 0$ равна площади донного среза обтекаемого тела. Таким образом, для определения коэффициента сопротивления тела нужно знать значение функции σ лишь в одной точке, соответствующей задней кромке тела.

2. Предположим, что решение уравнения (1.7) в окрестности некоторой линии $\psi = \varphi(p)$ в плоскости $p\psi$ может быть разложено в ряд вида

$$\sigma(p, \psi) = \sigma^\circ(p) + \sigma_\psi^\circ\, [\psi - \varphi(p)] + {}^1/_2 \sigma_{\psi\psi}^\circ\, [\psi - \varphi(p)]^2 + \ldots \tag{2.1}$$

Здесь индексом $\circ$ обозначены значения соответствующих величин на линии $\psi = \varphi(p)$. Если положить $\sigma \equiv \sigma^\circ(p)$, то, согласно (1.6), имеем $w \cos \vartheta = -\sigma_\psi \equiv 0$ или $\vartheta \equiv {}^1/_2\pi$. Из уравнения (1.7) находится вид функции $\sigma^\circ(p)$, которая описывает вырожденный случай осесимметричного течения — плоский газовый источник. Пусть зависимость $\psi = \varphi(p)$ определяет линию фронта ударной волны в плоскости (p, ψ). Из механических условий совместности определяются значения производных σ_p° и σ_ψ° на этой линии (поток перед фронтом считается равномерным, σ отнесена к p_∞)

$$\sigma_p^\circ = \psi, \qquad \sigma_\psi^\circ = p - 1 - kM_\infty^2, \qquad k = \frac{\rho_\infty a_\infty^2}{p_\infty} \tag{2.2}$$

Можно подсчитать значения функции σ на линии фронта ударной волны

$$\sigma^\circ(p) = \int [\varphi(p) + (p - 1 - kM_\infty^2)\, \varphi'(p)]\, dp \tag{2.3}$$

Удерживая два первых слагаемых в разложении (2.1), путем дифференцирования по p и ψ убеждаемся, что соотношения (2.2) выполняются всюду за фронтом ударной волны. Это возможно лишь при нулевой толщине ударного слоя, т. е. такое представление функции σ соответствует ньютоновскому приближению.

Рассмотрим случай, когда разложение (2.1) произведено до членов второго порядка. Дифференцируя по p и по ψ, получим

$$\sigma_p = \psi - \sigma_{\psi\psi}^\circ\, \varphi'(p)\, [\psi - \varphi(p)] + \frac{1}{2}\, \frac{d\sigma_{\psi\psi}^\circ}{dp}\, [\psi - \varphi(p)]^2 \tag{2.4}$$

$$\sigma_\psi = p - 1 - kM_\infty^2 + \sigma_{\psi\psi}^\circ\, [\psi - \varphi(p)]$$

Таким образом, в этом приближении функция σ_p вдоль линий постоянного давления аппроксимируется квадратичной зависимостью от ψ, а осевая составляющая скорости считается линейно зависящей от функции тока.

В формулах (2.4) содержатся две неизвестные функции давления $\sigma_{\psi\psi}{}^{\circ}$ и $\varphi(p)$. Для их нахождения воспользуемся условием на поверхности тела и уравнением (1.7). Уравнение контура поверхности будем считать заданным в виде $y^2 = f(\cos\vartheta)$, что в силу формул (2.4) дает

$$\frac{d}{dp}\left[\sigma^{\circ}_{\psi\psi}\varphi^2(p)\right] = f\left\{\frac{1+kM_\infty{}^2-p+\sigma^{\circ}_{\psi\psi}\,\varphi(p)}{kM_\infty{}^2\sqrt{2(i_m-i)}}\right\} \tag{2.5}$$

Далее предполагаем, что плотность ρ, скорость звука a, а следовательно, и величина $\gamma = a^2\rho/p$ суть известные функции давления на линии фронта ударной волны. При помощи условий совместности на ударной волне значения всех коэффициентов в уравнении (1.7) за фронтом волны можно выразить через p, ρ и γ. Продифференцировав (2.2) вдоль линии $\psi = \varphi(p)$ исключим производные $\sigma^{\circ}{}_{\psi\psi}$ и $\sigma^{\circ}{}_{p\psi}$; получим

$$A(p) - \sigma_{\psi\psi}{}^{\circ}\left[B(p)\,\varphi(p) + C(p)\,\varphi'(p)\right] = 0 \tag{2.6}$$

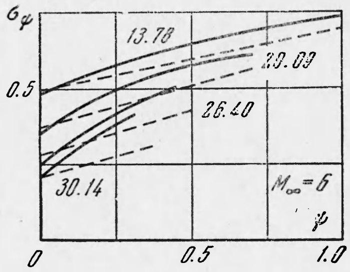
где

$$A(p) = 2\left(1-\frac{1}{\rho}-\frac{p-1}{\gamma p\rho}\right)\left(1-\frac{1}{\rho}-\frac{p-1}{kM_\infty{}^2}\right)$$

$$B(p) = \frac{(3+\rho^{-1})(p-1)}{kM_\infty{}^2} - 3\left(1-\frac{1}{\rho}\right) - (p-1)\left(\frac{p-1}{kM_\infty{}^2}-1\right)\frac{d}{dp}\left(\frac{1}{\rho}\right) \tag{2.7}$$

$$C(p) = -2\,\frac{p-1}{\rho}\left(1-\frac{1}{\rho}-\frac{p-1}{kM_\infty{}^2}\right)$$

Функции $\sigma^{\circ}{}_{\psi\psi}$ и $\varphi(p)$ являются решением системы двух нелинейных уравнений первого порядка (2.5) и (2.6).



Фиг. 2

Если в (2.1) удерживаются члены третьего порядка, то подобные же выкладки приводят к системе трех нелинейных уравнений первого порядка.

3. Предположим, что зависимость между давлением на поверхности обтекаемого тела и местным углом наклона поверхности, $\cos\vartheta = F(p)$ при $\psi = 0$ задана.

Внося выражение $\cos\vartheta$ в (2.5) и (2.4) получим

$$\frac{d}{dt}\left[\sigma^{\circ}_{\psi\psi}\ \varphi^2(p)\right] = f\left[F(p)\right]$$

$$\sigma^{\circ}{}_{\psi\psi}\varphi(p) = p - 1 - kM_\infty{}^2 + kM_\infty{}^2\sqrt{2(i_m-i)}\,F(p)$$

Если обтекается притупленное тело, то первое уравнение интегрируется с учетом того, что в точке пересечения ударной волны с осью симметрии, т. е. при p, равном давлению за фронтом прямого скачка уплотнения p_m, $\varphi(p_m) = 0$.

Тогда из (2.7) находим

$$\sigma_{\psi\psi}{}^{\circ}\,\varphi(p) = \int\limits_{p_m}^{p} f\left[F(p)\right]dp, \qquad \varphi(p) = \frac{1}{N}\int\limits_{p}^{p_m} f\left[F(p)\right]dp \tag{2.8}$$

$$N = 1 + kM_\infty{}^2 - p - kM_\infty{}^2\sqrt{2(i_\infty - i)}\,F(p)$$

На фиг. 1 и 2 приведены результаты расчетов распределения параметров между поверхностью тела и ударной волной по формулам (2.4) и (2.8) для случая сферического притупления. Распределение давления по поверхности вычислялось при помощи модифицированной формулы Ньютона, т. е. полагалось, что

$$\cos\vartheta = \sqrt{1 + k^{-1}M_\infty{}^{-2}}\ \sqrt{1 - p/p_0}$$

где p_0 — давление торможения. Газ считался идеальным с постоянным отношением теплоемкостей, равным 1.4. На фиг. 1 и 2 результаты приближенных расчетов (пунктирные линии) сравниваются с численными расчетами, взятыми из таблиц [1] (сплошные кривые). Цифрами указаны значения безразмерного давления на соответствующих изобарах. Вполне аналогичные результаты сравнения получились для притуплений в форме эллипсоидов вращения при числах Маха M_∞ от 3 до ∞.

Поступила 26 XII 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. Белоцерковский О. М. Расчет обтекания осесимметричных тел с отошедшей ударной волной (расчетные формулы и таблицы полей течений). Вычисл. центр АН СССР, 1961.