Теплофизика и аэромеханика, 2012, том 19, № 1

УДК 536.21

Определение верхней и нижней границ эффективных коэффициентов теплопроводности пространственно-армированных композитов на основе энергетического критерия эквивалентности*

А.П. Янковский

Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановча СО РАН, Новосибирск

E-mail: nemirov@itam.nsc.ru

Предложены модели теплопроводности пространственно-армированной волокнистой среды при общей анизотропии материалов компонент композиции, базирующиеся на условии равенства диссипации в эквивалентном материале и рассматриваемом композите. Проведено сравнение расчетных значений эффективных коэффициентов теплопроводности однонаправленно и перекрестно армированных композитов с экспериментальными данными; продемонстрировано удовлетворительное согласование расчетных и экспериментальных значений этих величин. Показано, что предложенные модели дают оценки сверху и снизу для расчетных значений эффективных коэффициентов теплопроводности волокнистой композиции.

Ключевые слова: композиты, пространственное армирование, структурная теория, теплопроводность, анизотропия общая, энергетическая эквивалентность, верхняя и нижняя оценки, сравнение с экспериментом.

Введение

Традиционной структурой композиционных материалов является слоистая (например, в тонкостенных конструкциях типа оболочек и пластин), когда траектории армирования лежат в плоскостях слоев, связь между которыми осуществляется через прослойки связующего (критический анализ некоторых структурных моделей теплофизического поведения таких композитов проведен в работах [1, 2]). Однако особое внимание к себе привлекают композиционные материалы с пространственным расположением арматуры. Целесообразность пространственного расположения арматуры определяется не только возможностью ликвидировать такой недостаток слоистых композитов, как опасность расслоения вследствие слабого сопротивления сдвигу и поперечному отрыву, но и возможностью локализовать в пределах нескольких пространственных ячеек распространение трещин.

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 10-01-90402-Укр_а) и Президиума СО РАН (постановление № 10 от 15.01.09, проект № 72).

© Янковский А.П., 2012

Этим резко повышается несущая способность материала в толстостенных конструкциях, особенно в зонах приложения локализованных нагрузок и концентраторов напряжений при нестационарных термосиловых воздействиях, характерных для современных технических устройств [3]. Кроме того, при эксплуатации гибких тонкостенных волокнистых конструкций изначально плоские структуры армирования могут в процессе деформирования трансформироваться в пространственные структуры.

В связи с этим актуальной является проблема моделирования процессов теплопроводности в пространственно-армированных средах с произвольной анизотропией материалов компонент композиции. Изучению этого вопроса посвящена настоящая работа, которая в этом смысле продолжает исследования, опубликованные в [2], где рассматривался частный случай такого армирования, а именно, случай ориентации волокон по трем взаимно ортогональным направлениям.

Структурные модели теплопроводности пространственно-армированного гибридного композита

Так как наличие арматуры с различными физико-механическими характеристиками значительно расширяет диапазон свойств композиционных материалов с пространственной схемой армирования [3], то в глобальной декартовой системе координат x_1, x_2, x_3 рассмотрим гибридный композит, армированный в произвольных направлениях N семействами прямолинейных волокон (возможно, разной физической природы) с интенсивностями ω_k ($k = 1, 2, ..., N$). Удельное объемное содержание связующего обозначим через ω_0, тогда имеет место условие нормировки

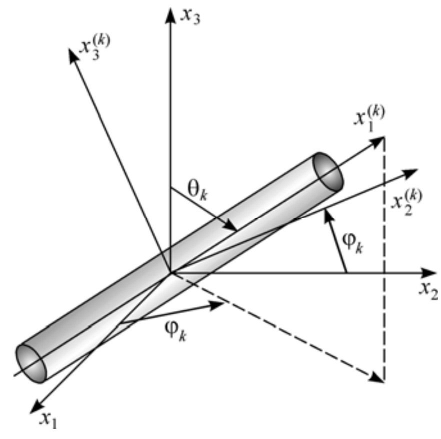
$$\omega_0 + \sum_k \omega_k = 1 \quad (\omega_0 > 0, \ \ \omega_k \geq 0, \ \ 1 \leq k \leq N) \qquad (1)$$

(здесь и далее суммирование производится по указанному индексу от 1 до N, если не указаны пределы).

Кроме условия нормировки (1) должны выполняться и физические условия взаимного непроникновения материалов различных компонент композиции. Эти условия накладывают определенные ограничения на предельно допустимые значения суммарных плотностей армирования (на значение суммы, определенной в (1)) при плотной упаковке армирующих элементов. Так, в работе [3] приведены указанные предельные значения для некоторых структур пространственного армирования композитной среды, которые меньше единицы. Далее в настоящем исследовании предполагается, что эти ограничения на значения суммарных плотностей армирования выполняются. (При построении моделей теплофизического поведения рассматриваемого композита знание конкретных чисел ω_0, ω_k не обязательно, важным является выполнение условия нормировки (1).)

С каждым k-м семейством волокон свяжем свою локальную ортогональную систему координат $x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, x_3^{(k)}$ (k = 1, 2, …, N) так, чтобы ось $x_1^{(k)}$ совпадала с направлением траекторий армирования этого семейства, а оси $x_2^{(k)}, x_3^{(k)}$ были перпендикулярны этим траекториям (см. рис.). Углы между глобальными и локальными осями определяются табл. 1 направляющих косинусов.

Все компоненты композиции предполагаются анизотропными материалами, причем для удобства изложения (хотя это и не принципиально) теплофизические характеристики связующего заданы в глобальной системе координат x_1, x_2, x_3, *Рис.* Локальная система координат, связанная с волокном k-го семейства.



а волокон k-го семейства — в локальной системе $x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, x_3^{(k)}$; эффективные характеристики композиции определяются также в глобальной системе координат.

Согласно вышеизложенному, соотношения закона теплопроводности Фурье для эквивалентной композитной среды и компонент композиции в матричной форме имеют вид

$$\mathbf{q} = -\Lambda \mathbf{g}, \quad \mathbf{q}_0 = -\Lambda_0 \mathbf{g}_0, \quad \overline{\mathbf{q}}_k = -\overline{\Lambda}_k \overline{\mathbf{g}}_k \quad (k = 1, 2, ..., N), \tag{2}$$

где

$$\begin{gathered} \mathbf{q}^* = \{q_1, q_2, q_3\}, \ \mathbf{g}^* = \{g_1, g_2, g_3\}, \ \mathbf{g} = \mathrm{grad}_x T, \ \mathbf{q}_0^* = \left\{q_1^{(0)}, q_2^{(0)}, q_3^{(0)}\right\}, \\ \mathbf{g}_0^* = \left\{g_1^{(0)}, g_2^{(0)}, g_3^{(0)}\right\}, \ \mathbf{g}_0 = \mathrm{grad}_x T_0, \ \overline{\mathbf{q}}_k^* = \left\{\overline{q}_1^{(k)}, \overline{q}_2^{(k)}, \overline{q}_3^{(k)}\right\}, \\ \overline{\mathbf{g}}_k^* = \left\{\overline{g}_1^{(k)}, \overline{g}_2^{(k)}, \overline{g}_3^{(k)}\right\}, \ \overline{\mathbf{g}}_k = \mathrm{grad}_{x_k} T_k \quad (1 \le k \le N), \end{gathered} \tag{3}$$

“звездочка” означает операцию транспонирования; $\Lambda = \left(\lambda_{ij}\right)$, $\Lambda_0 = \left(\lambda_{ij}^{(0)}\right)$, $\overline{\Lambda}_k = \left(\overline{\lambda}_{ij}^{(k)}\right)$ — 3×3 симметричные матрицы коэффициентов теплопроводности фиктивного материала, связующего и волокон k-го семейства соответственно, $\mathbf{q}$, $\mathbf{q}_0$, $\overline{\mathbf{q}}_k$ — векторы тепловых потоков в тех же материалах соответственно, T, T_0, T_k — температуры в тех же материалах соответственно, grad_x, grad_{x_k} — вычисление градиента в глобальной x_1, x_2, x_3 и локальной $x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, x_3^{(k)}$ системах координат соответственно. В соотношениях (2), (3) и далее чертой сверху будем обозначать величины, определенные в локальной системе координат $x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, x_3^{(k)}$, связанной с k-м семейством волокон, а те же величины, определенные в глобальной системе x_1, x_2, x_3, будем обозначать теми же символами, но без черты.

В случаях, когда волокна изготовлены из изотропных или монотропных (с главной осью анизотропии, совпадающей с направлением армирования) материалов, направляющие косинусы $l_{ij}^{(k)}$ (см. табл. 1) можно однозначно определить с помощью двух углов сферической системы координат (см. рис.): полярного расстоя-

Таблица 1

Направляющие косинусы между глобальной и k-й локальной системами координат [4]

Оси	x_1	x_2	x_3
$x_1^{(k)}$	$l_{11}^{(k)}$	$l_{12}^{(k)}$	$l_{13}^{(k)}$
$x_2^{(k)}$	$l_{21}^{(k)}$	$l_{22}^{(k)}$	$l_{23}^{(k)}$
$x_3^{(k)}$	$l_{31}^{(k)}$	$l_{32}^{(k)}$	$l_{33}^{(k)}$

ния θ_k и долготы φ_k. При этом ось $x_2^{(k)}$ удобно получить поворотом оси x_2 на угол φ_k вокруг оси x_3 (именно этот случай изображен на рисунке), а направление оси $x_3^{(k)}$ определяется векторным произведением ортов, задающих направления $x_1^{(k)}$, $x_2^{(k)}$. Направляющие косинусы $l_{ij}^{(k)}$ при таком задании локальной системы координат вычисляются по формулам:

$$\begin{gathered} l_{11}^{(k)} = \sin\theta_k \cos\varphi_k, \;\; l_{12}^{(k)} = \sin\theta_k \sin\varphi_k, \;\; l_{13}^{(k)} = \cos\theta_k, \\ l_{21}^{(k)} = -\sin\varphi_k, \;\; l_{22}^{(k)} = \cos\varphi_k, \;\; l_{23}^{(k)} = 0, \;\; l_{31}^{(k)} = -\cos\theta_k \cos\varphi_k, \\ l_{32}^{(k)} = -\cos\theta_k \sin\varphi_k, \;\; l_{33}^{(k)} = \sin\theta_k, \;\; 1 \le k \le N \end{gathered} \tag{4}$$

(соотношения (4) могут быть использованы и в случае общей анизотропии материалов арматуры, но тогда все характеристики материала волокон k-го семейства обязательно должны быть заданы именно в этой системе координат).

Так как установить фактическое распределение тепловых потоков и температурного поля в пространственно-армированном материале весьма затруднительно, то при нахождении практически пригодных зависимостей для определения шести независимых теплофизических характеристик в виде компонент линейной теплопроводности λ_{ij} ($\lambda_{ij} = \lambda_{ji}, i, j = 1, 2, 3$) необходимо сделать некоторые допущения, аналогичные тем, что были использованы в [2, 5] для вывода формул, определяющих эффективные коэффициенты теплопроводности однонаправленно и ортогонально армированных сред:

1. Армированный материал представляет собой сплошное макроскопически квазиоднородное анизотропное тело. (При достаточно густом равномерном насыщении связующего волокнами это предположение вполне допустимо. К этому выводу приходят все исследователи, изучающие свойства армированных сред [4].)
2. На границах между связующим и армирующими элементами реализуются условия идеального теплового контакта.
3. Приращение усредненной температуры T вдоль произвольно ориентированного отрезка элементарной длины dl равно сумме приращений температур в компонентах композиции, которые этот отрезок пересекает.
4. Связь между вектором теплового потока и градиентом температуры во всех компонентах композиции подчиняется линейному закону теплопроводности Фурье (2).
5. В качестве условия эквивалентности выступает равенство удельной диссипации в фиктивном однородном анизотропном материале диссипации в рассматриваемом композите.

При переходе от глобальной системы координат x_1, x_2, x_3 к локальной системе $x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, x_3^{(k)}$ имеют место преобразования векторов (3):

$$\bar{\mathbf{q}}_k = L_k \mathbf{q}_k \quad \Big(\bar{q}_i^{(k)} = \sum_{j=1}^{3} l_{ij}^{(k)} q_j^{(k)}\Big), \quad \bar{\mathbf{g}}_k = L_k \mathbf{g}_k \quad \Big(\bar{g}_i^{(k)} = \sum_{j=1}^{3} l_{ij}^{(k)} g_j^{(k)}, \;\; i = 1, 2, 3\Big) \tag{5}$$

и обратные им преобразования:

$$\mathbf{q}_k = L_k^* \bar{\mathbf{q}}_k, \quad \mathbf{g}_k = L_k^* \bar{\mathbf{g}}_k, \quad 1 \le k \le N, \tag{6}$$

где $L_k = \left(l_{ij}^{(k)}\right)$ — 3×3 ортогональная матрица (см. табл. 1).

Из допущения 3 по аналогии с [2, 5] вытекает равенство

$$\mathbf{g} = \omega_0 \mathbf{g}_0 + \sum_k \omega_k \mathbf{g}_k. \tag{7}$$

Таким образом допущение 3 эквивалентно допущению 3′: градиент усредненной температуры T подсчитывается по правилу простой смеси от градиентов температур T_0, T_k в компонентах композиции.

Из допущения 2 и условий сопряжения тепловых потоков и полей температур на границах контакта связующего и армирующих элементов с учетом соотношений, аналогичных (5), получим

$$\overline{q}_i^{(k)} = \overline{q}_i^{(0)} = \sum_{j=1}^{3} l_{ij}^{(k)} q_j^{(0)} \quad (i = 2, 3, \ 1 \le k \le N), \tag{8}$$

$$\overline{g}_1^{(k)} = \overline{g}_1^{(0)} = \sum_{j=1}^{3} l_{1j}^{(k)} g_j^{(0)} \quad \left(\frac{\partial T_k}{\partial x_1^{(k)}} = \frac{\partial T_0}{\partial x_1^{(k)}} = \sum_{j=1}^{3} l_{1j}^{(k)} \frac{\partial T_0}{\partial x_j}, \ 1 \le k \le N \right). \tag{9}$$

Из равенств (8), (9) с учетом (2) и допущения 4 следует

$$\overline{g}_1^{(k)} = \sum_{j=1}^{3} l_{1j}^{(k)} g_j^{(0)}, \quad \sum_{j=1}^{3} \overline{\lambda}_{ij}^{(k)} \overline{g}_j^{(k)} = \sum_{j=1}^{3} l_{ij}^{(k)} \sum_{m=1}^{3} \lambda_{jm}^{(0)} g_m^{(0)} \quad (i = 2, 3, \ 1 \le k \le N). \tag{10}$$

Эту систему запишем в матричной форме

$$B_k \overline{\mathbf{g}}_k = C_k \mathbf{g}_0, \quad 1 \le k \le N, \tag{11}$$

где компоненты 3×3 матриц $B_k = \left(B_{ij}^{(k)}\right)$, $C_k = \left(C_{ij}^{(k)}\right)$, согласно (10), определяются так:

$$\begin{aligned} &B_{11}^{(k)} = 1, \ B_{1j}^{(k)} = 0 \ \ (j = 2, 3), \ \ B_{ij}^{(k)} = \overline{\lambda}_{ij}^{(k)} \ \ (i = 2, 3, \ \ j = 1, 2, 3), \\ &C_{1j}^{(k)} = l_{1j}^{(k)} \ \ (j = 1, 2, 3), \ \ C_{ij}^{(k)} = \sum_{m=1}^{3} l_{im}^{(k)} \lambda_{mj}^{(0)} \ \ (i = 2, 3, \ \ j = 1, 2, 3). \end{aligned} \tag{12}$$

В силу (12) $\det B_k \ne 0$, поэтому из (11) получаем

$$\overline{\mathbf{g}}_k = E_k \mathbf{g}_0 \quad (1 \le k \le N), \tag{13}$$

где

$$E_k = B_k^{-1} C_k, \tag{14}$$

B_k^{-1} — 3×3 матрица, обратная B_k.

Соотношение (13) определяет градиент температуры $\overline{\mathbf{g}}_k$ в волокнах k-го семейства (определенный в локальной системе координат $x_i^{(k)}$) через градиент температуры $\mathbf{g}_0$ в связующем (заданный в глобальной системе x_i).

Подставим второе равенство (6) в соотношение (7) и учтем (13):

$$\mathbf{g} = \omega_0 \mathbf{g}_0 + \sum_k \omega_k L_k^* \overline{\mathbf{g}}_k = \left(\omega_0 I + \sum_k \omega_k L_k^* E_k \right) \mathbf{g}_0, \tag{15}$$

где I — 3×3 единичная матрица.

Выразим из (15) $\mathbf{g}_0$ через $\mathbf{g}$, тогда

$$\mathbf{g}_0 = H \mathbf{g}, \tag{16}$$

где

$$H = \left(\omega_0 I + \sum_k \omega_k L_k^* E_k \right)^{-1}. \tag{17}$$

Соотношение (16) определяет градиент температуры T_0 в связующем через градиент усредненной температуры *T*.

Согласно допущениям 1, 5 и выражению для диссипации *D* [6] имеем

$$D \equiv 1/2\,\mathbf{g}^*\Lambda\mathbf{g} = 1/2\,\omega_0\mathbf{g}_0^*\Lambda_0\mathbf{g}_0 + 1/2\sum_k \omega_k\overline{\mathbf{g}}_k^*\overline{\Lambda}_k\overline{\mathbf{g}}_k. \tag{18}$$

Используя (13), исключим из (18) векторы $\overline{\mathbf{g}}_k$:

$$\mathbf{g}^*\Lambda\mathbf{g} = \omega_0\mathbf{g}_0^*\Lambda_0\mathbf{g}_0 + \sum_k \omega_k\mathbf{g}_0^*E_k^*\overline{\Lambda}_k E_k\mathbf{g}_0 = \mathbf{g}_0^*\left(\omega_0\Lambda_0 + \sum_k \omega_k E_k^*\overline{\Lambda}_k E_k\right)\mathbf{g}_0.$$

Отсюда, с учетом (16), получим

$$\mathbf{g}^*\Lambda\mathbf{g} = \mathbf{g}^*H^*\left(\omega_0\Lambda_0 + \sum_k \omega_k E_k^*\overline{\Lambda}_k E_k\right)H\mathbf{g}. \tag{19}$$

Так как равенство в (19) должно выполняться при произвольном векторе $\mathbf{g}$, то из него вытекает следующее соотношение:

$$\Lambda = H^*\left(\omega_0\Lambda_0 + \sum_k \omega_k E_k^*\overline{\Lambda}_k E_k\right)H, \tag{20}$$

где нужно учесть выражения для 3×3 матриц (17), (14), (12).

Таким образом, равенство (20) определяет в матричной форме все эффективные коэффициенты теплопроводности пространственно-армированного композита.

Важной особенностью предложенной модели является возможность определения по градиенту усредненной температуры $\mathbf{g}$ (см. (3)) тепловых потоков и градиентов температур $\mathbf{g}_0$, $\overline{\mathbf{g}}_k$ во всех компонентах композиции. Действительно, если из решения задачи теплопроводности для эквивалентной среды известен градиент усредненной температуры $\mathbf{g} = \mathrm{grad}_x T$, то из (16) и (13) можно последовательно определить градиенты температур в связующем $\mathbf{g}_0$ и армирующих волокнах $\overline{\mathbf{g}}_k$, а затем, используя закон Фурье (2), можно вычислить и тепловые потоки в соответствующих компонентах композиции ($\mathbf{q}_0$, $\overline{\mathbf{q}}_k$). Знание же градиентов температур $\mathbf{g}_0$, $\overline{\mathbf{g}}_k$ имеет принципиальное значение, например, при использовании в дальнейшем нелокальных структурных критериев (теорий) прочности в случаях расчета композитной конструкции при интенсивном термосиловом нагружении.

Эффективные коэффициенты теплопроводности пространственно-армированного композита выше были получены на основе метода, который условно можно назвать “статическим”, так как в качестве одной из гипотез (допущения 3′) использовалось равенство (7), связывающее между собой градиент усредненной температуры $\mathbf{g}$ с градиентами температур в компонентах композиции $\mathbf{g}_0, \mathbf{g}_k$, которые представляют собой термодинамические силы [6]. При этом никаких допущений о связи усредненного теплового потока $\mathbf{q}$ в композиции с тепловыми потоками $\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_k$ в фазовых материалах не делалось. Определить же эффективные теплофизические характеристики рассматриваемого композита можно, введя соответствующую гипотезу, позволяющую связать $\mathbf{q}$ с $\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_k$, и не делая никаких допущений о связи $\mathbf{g}$ с $\mathbf{g}_0, \mathbf{g}_k$ ($1 \le k \le N$). Так как, согласно работе [6], с точки зрения термодинамики тепловые потоки являются скоростями тепловых смещений, то второй подход можно условно назвать «кинематическим» методом определения эффективных коэффициентов теплопроводности композита.

По аналогии с подходами структурной механики композитов [7], с учетом введенных понятий “кинематического” и “статического” методов (в термодинамическом смысле), можно показать, что статический метод дает верхнюю оценку расчетных значений эффективных коэффициентов теплопроводности композита, а кинематический метод — нижнюю оценку этих же величин. Знание же верхней и нижней оценок дает представление о точности определения расчетных характеристик композиции.

В связи с этим, далее настоящее исследование посвятим вычислению эффективных коэффициентов теплопроводности пространственно-армированного гибридного композита кинематическим методом. При этом допущения 1, 2, 4, 5 остаются без изменений, а вместо гипотезы 3 (или, что то же самое, 3′) примем следующее предположение:

3″ усредненный тепловой поток через произвольно ориентированную элементарную площадку подсчитывается по правилу простой смеси тепловых потоков в компонентах композиции.

Соотношения закона Фурье (2) в этом случае целесообразно переписать в следующей форме:

$$\mathbf{g} = -K\mathbf{q}, \quad \mathbf{g}_0 = -K_0\mathbf{q}_0, \quad \overline{\mathbf{g}}_k = -\overline{K}_k\overline{\mathbf{q}}_k \quad (k = 1, 2, ..., N), \tag{21}$$

где $K \equiv \left(\kappa_{ij}\right) = \Lambda^{-1}$, $K_0 \equiv \left(\kappa_{ij}^{(0)}\right) = \Lambda_0^{-1}$, $\overline{K}_k \equiv \left(\overline{\kappa}_{ij}^{(k)}\right) = \overline{\Lambda}_k^{-1}$ — 3×3 симметричные матрицы, обратные матрицам $\Lambda, \Lambda_0, \overline{\Lambda}_k$, элементы матриц $K_0, \overline{K}_k$ известны, а элементы матрицы K подлежат определению.

Согласно допущению 5, с учетом (21), вместо (18) получим ([6])

$$D \equiv 1/2\,\mathbf{q}^* K\mathbf{q} = 1/2\,\omega_0\mathbf{q}_0^* K_0\mathbf{q}_0 + 1/2\sum_k \omega_k\overline{\mathbf{q}}_k^*\overline{K}_k\overline{\mathbf{q}}_k. \tag{22}$$

Выразим в (22) $\overline{\mathbf{q}}_k$ через $\mathbf{q}_0$. С этой целью используем условия сопряжения теплофизических полей (8), (9), из которых с учетом (21) и допущения 4 следует

$$\sum_{j=1}^{3}\overline{\kappa}_{1j}^{(k)}\overline{q}_j^{(k)} = \sum_{j=1}^{3} l_{1j}^{(k)}\sum_{m=1}^{3}\kappa_{jm}^{(0)}q_m^{(0)}, \quad \overline{q}_i^{(k)} = \sum_{j=1}^{3} l_{ij}^{(k)}q_j^{(0)} \quad (i = 2, 3, \ 1 \le k \le N). \tag{23}$$

Эту систему запишем в матричной форме

$$Q_k\overline{\mathbf{q}}_k = F_k\mathbf{q}_0, \quad 1 \le k \le N, \tag{24}$$

где ненулевые элементы 3×3 матриц $Q_k = \left(Q_{ij}^{(k)}\right)$, $F_k = \left(F_{ij}^{(k)}\right)$, согласно (23), определяются так:

$$\begin{aligned} &Q_{1j}^{(k)} = \overline{\kappa}_{1j}^{(k)}, \quad F_{1j}^{(k)} = \sum_{m=1}^{3} l_{1m}^{(k)}\kappa_{mj}^{(0)} \quad (j = 1, 2, 3), \\ &Q_{ii}^{(k)} = 1, \quad F_{ij}^{(k)} = l_{ij}^{(k)} \quad (i = 2, 3, \ \ j = 1, 2, 3, \ \ 1 \le k \le N). \end{aligned} \tag{25}$$

В силу (25) $\det Q_k \ne 0$, поэтому из (24) получаем

$$\overline{\mathbf{q}}_k = G_k\mathbf{q}_0, \quad 1 \le k \le N, \tag{26}$$

где

$$G_k = Q_k^{-1} F_k, \tag{27}$$

Q_k^{-1} — 3×3 матрица, обратная Q_k.

Соотношение (26) определяет тепловой поток $\bar{\mathbf{q}}_k$ в волокнах k-го семейства (определенный в локальной системе координат $x_i^{(k)}$) через тепловой поток $\mathbf{q}_0$ в связующем (заданный в глобальной системе x_i).

Подставим (26) в равенство (22), получим:

$$\mathbf{q}^* K \mathbf{q} = \omega_0 \mathbf{q}_0^* K_0 \mathbf{q}_0 + \sum_k \omega_k \mathbf{q}_0^* G_k^* \bar{K}_k G_k \mathbf{q}_0 = \mathbf{q}_0^* \left(\omega_0 K_0 + \sum_k \omega_k G_k^* \bar{K}_k G_k \right) \mathbf{q}_0. \tag{28}$$

Выразим здесь $\mathbf{q}_0$ через $\mathbf{q}$. С этой целью воспользуемся допущением 3″, из которого следует

$$\mathbf{q} = \omega_0 \mathbf{q}_0 + \sum_k \omega_k \mathbf{q}_k. \tag{29}$$

Исключим из (29) векторы $\mathbf{q}_k$, используя последовательно соотношения (6) и (26):

$$\mathbf{q} = \omega_0 \mathbf{q}_0 + \sum_k \omega_k L_k^* \bar{\mathbf{q}}_k = \omega_0 \mathbf{q}_0 + \sum_k \omega_k L_k^* G_k \mathbf{q}_0 = \left(\omega_0 I + \sum_k \omega_k L_k^* G_k \right) \mathbf{q}_0.$$

Отсюда следует

$$\mathbf{q}_0 = P \mathbf{q}, \tag{30}$$

где 3×3 матрица

$$P = \left(\omega_0 I + \sum_k \omega_k L_k^* G_k \right)^{-1}. \tag{31}$$

Соотношение (30) определяет тепловой поток в связующем $\mathbf{q}_0$ через усредненный тепловой поток $\mathbf{q}$ в композиции.

Подставим (30) в равенство (28), получим

$$\mathbf{q}^* K \mathbf{q} = \mathbf{q}^* P^* \left(\omega_0 K_0 + \sum_k \omega_k G_k^* \bar{K}_k G_k \right) P \mathbf{q}. \tag{32}$$

Так как равенство в (32) должно выполняться при произвольном векторе $\mathbf{q}$, то из него вытекает следующее соотношение:

$$K = P^* \left(\omega_0 K_0 + \sum_k \omega_k G_k^* \bar{K}_k G_k \right) P, \tag{33}$$

где нужно учесть выражения для 3×3 матриц (31), (27), (25). В силу самого определения матриц Λ, K (см. (2), (21)) из (33) вытекает

$$\Lambda = K^{-1}. \tag{34}$$

Таким образом, равенства (34), (33) определяют в матричной форме все эффективные коэффициенты теплопроводности пространственно-армированного композита, полученные на основе кинематического метода.

В рамках этого подхода так же, как и в случае статического метода, можно определить тепловые потоки и градиенты температур в компонентах композиции через усредненный тепловой поток в фиктивном материале. Действительно, если из решения задачи теплопроводности для эквивалентной среды известен усредненный тепловой поток $\mathbf{q}$, то из (30), (26) можно последовательно определить тепловые потоки в связующем $\mathbf{q}_0$ и арматуре $\overline{\mathbf{q}}_k$, а затем, используя закон Фурье в форме (21), можно вычислить и градиенты температур в соответствующих компонентах композиции ($\mathbf{g}_0$, $\overline{\mathbf{g}}_k$).

В силу самой структуры правых частей в равенствах (20), (33) и в силу симметрии матриц $\Lambda_0, \overline{\Lambda}_k, K_0, \overline{K}_k$, разыскиваемые матрицы Λ, K также являются симметричными, что находится в полном согласии с постулатом Онзагера.

Полученные в настоящем исследовании соотношения (20), (33), (34) могут быть использованы для определения эффективных коэффициентов теплопроводности композитов, армированных усиливающими элементами с покрытиями (типа борных волокон [8]), а также при учете переходных зон, возникающих в силу химического взаимодействия арматуры со связующим на границах их контактов (зоны интерметаллидов в металлокомпозитах и т. п.) или частичного разрушения компонент композиции на этих границах. Для этого указанные покрытия или зоны нужно рассматривать как дополнительные фиктивные семейства волокон или дисперсных включений, удельное объемное содержание и теплофизические характеристики которых известны.

Помимо эффективных коэффициентов теплопроводности $\Lambda = \left(\lambda_{ij}\right)$ ($\lambda_{ij} = \lambda_{ji}$, i, j = 1, 2, 3) важной интегральной теплофизической характеристикой композита является удельная теплоемкость C, которая для армированного материала, как и приведенная объемная плотность R, определяется по правилу простой смеси [9]

$$C = \omega_0 \rho_0 c_0 + \sum_k \omega_k \rho_k c_k, \quad R = \omega_0 \rho_0 + \sum_k \omega_k \rho_k,$$

где ρ_0, ρ_k — объемные плотности материалов связующего и волокон k-го семейства соответственно, c_0, c_k — удельные теплоемкости тех же материалов.

Сравнение расчетных и экспериментальных значений эффективных характеристик теплопроводности волокнистых материалов

Прежде всего, отметим: при попытке сравнения результатов расчетов с экспериментальными данными приходится часто сталкиваться с тем, что в опубликованных работах не всегда приводятся необходимые данные о свойствах материалов компонент, композиций и структуре армирования (плотности и точном направлении армирования). Поэтому ниже при сравнении использовалась та доступная справочная литература, в которой были приведены необходимые для сравнительного анализа характеристики.

Сначала рассмотрим однонаправленно армированный вдоль оси x_1 (N = 1, $\theta_1 = \pi/2$, $\varphi_1 = 0$, см. (4)) “микропластик” на основе волокон кевлар-49 и эпоксисвязующего DER 332/Джеффамин T-403 (коэффициенты теплопроводности компонент композиции приведены в табл. 2).

Таблица 2

Коэффициенты теплопроводности фазовых материалов «микропластика»

Направление	Значение $\lambda_{ii}^{(0)}$ (Вт/м·K) для эпоксисвязующего DER 332/Джеффамин T-403 ([8], стр. 106)	Значения $\overline{\lambda}_{11}^{(k)}$, $\overline{\lambda}_{22}^{(k)} = \overline{\lambda}_{33}^{(k)}$ (Вт/м·K) для волокон кевлар-49 ([8], стр. 352)
Вдоль волокон	0,133	4,816 ($\overline{\lambda}_{11}^{(k)}$)
Поперек волокон	0,133	4,110 ($\overline{\lambda}_{22}^{(k)} = \overline{\lambda}_{33}^{(k)}$)

Таблица 3

Значения эффективных коэффициентов теплопроводности однонаправленного «микропластика» на основе кевлара-49 и эпоксисвязующего DER 332 / Джеффамин Т-403 при плотности армирования $\omega_1 = 0{,}6$

Источник данных	λ_{11}, Вт/м·K	$\lambda_{22} = \lambda_{33}$, Вт/м·K
Экспериментальные значения ([8], стр. 368)	3,22	0,35
Расчетная формула (20)	2,9428	0,3171
Структурные модели из [2, 5]	2,9428	0,3171
Расчетные формулы (33), (34)	2,9428	0,3171

В табл. 3 приведены экспериментальные и расчетные (определенные на основе трех моделей) значения λ_{11}, $\lambda_{22} = \lambda_{33}$ для указанной композиции при плотности армирования $\omega_1 = 0{,}6$. Из этой таблицы следует, что все три использованные структурные модели теплопроводности в случае однонаправленно армированного композита дают одни и те же результаты (отметим, что модели, предложенные в [2, 5], не базировались на энергетическом условии эквивалентности (18) или (22), в них вместо допущения 5 использовалась гипотеза 3″) Из табл. 3 вытекает, что рассчитанные значения коэффициента продольной теплопроводности рассматриваемой композиции λ_{11} меньше экспериментального значения на 8,6 %, а расчетные значения коэффициентов поперечной теплопроводности ($\lambda_{22} = \lambda_{33}$) меньше экспериментального значения на 9,4 %.

В работе [10] проведено сравнение с экспериментом не только для модели, предложенной в [5], но и для других структурных теплофизических моделей волокнистых сред, представленных в работах [11], [12]. Как показано в работе [10], обе эти модели хуже согласуются с экспериментом (отклонение для $\lambda_{22} = \lambda_{33}$ составляет более 30 %) по сравнению с расчетными значениями, приведенными в табл. 3.

Как уже отмечалось во введении, на практике армирование конструкций осуществляется не в одном направлении, а перекрестно несколькими семействами волокон. В табл. 4 приведены расчетные значения эффективных коэффициентов теплопроводности ортогонально армированного в плоскости x_1, x_2 (N = 2, $\theta_1 = \theta_2 = \pi/2$, $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = \pi/2$, см. (4)) органопластика на основе эпоксисвязующего и волокон кевлар-49. Как видно из этой таблицы, в случае перекрестной укладки в плоскости x_1, x_2 волокон из одного и того же материала ($\overline{\lambda}_{ii}^{(1)} = \overline{\lambda}_{ii}^{(2)}$, i = 1, 2, 3) коэффициент поперечной теплопроводности λ_{33} композиции не зависит от количественного распределения волокон в разных направлениях армирования, а зависит лишь от удельной суммарной интенсивности армирования $\Omega = \omega_1 + \omega_2$ (в рамках структурной модели из работы [2] этот факт был предсказан теоретически; см. [2, 10]). Кроме того, согласно табл. 4, расчетные значения λ_{33}, определенные по всем трем исследуемым моделям, полностью совпадают и отличаются от эксперимента (см. сноску в табл. 4) всего на 8,9 %. Напротив, при определении эффективных коэффициентов теплопроводности композиции в плоскости армирования существенное влияние на расчетные значения λ_{ii} оказывает удельное объемное содержание волокон ω_i в каждом направлении армирования x_i (i = 1, 2), а также выбор теплофизической модели композиции. Из табл. 4 видно, что, как и было предсказано в предыдущем разделе, расчетная формула (20) (“статический” метод) дает верхнюю оценку, а формулы (33), (34) (“кинематический” метод) —

Таблица 4

Расчетные значения коэффициентов теплопроводности перекрестно-армированного композита на основе ткани кевлар-49 и эпоксидной системы DER-332 / Джефамин Т-403 с объемным содержанием волокон 46 % ($\omega_1 + \omega_2 = 0{,}46$)*

Метод расчета	λ_{11}, Вт/м·K	λ_{22}, Вт/м·K	λ_{33}, Вт/м·K
Тип ткани: 120, 181, 281, 285, 328 ($\omega_1 = \omega_2 = 0{,}23$)			
Расчетная формула (20)	1,9531	1,9531	0,2397
Структурная модель из [2]	1,5565	1,5565	0,2397
Расчетные формулы (33), (34)	1,2404	1,2404	0,2397
Тип ткани: 143 ($\omega_1 = 0{,}383$, $\omega_2 = 0{,}077$)			
Расчетная формула (20)	2,2377	1,1216	0,2397
Структурная модель из [2]	2,0817	0,7842	0,2397
Расчетные формулы (33), (34)	1,9365	0,5483	0,2397
Тип ткани: 243 ($\omega_1 = 0{,}312$, $\omega_2 = 0{,}148$)			
Расчетная формула (20)	2,1456	1,6127	0,2397
Структурная модель из [2]	1,8605	1,1833	0,2397
Расчетные формулы (33), (34)	1,6134	0,8683	0,2397

* Экспериментальные значения [8]: вдоль волокон — $\lambda_{ii} = 0{,}91$ Вт/м·K ($i = 1$ и/или $i = 2$), поперек слоев ткани — $\lambda_{33} = 0{,}22$ Вт/м·K.

нижнюю оценку значений эффективных коэффициентов теплопроводности λ_{ii} в плоскости армирования. Структурные же модели теплопроводности, предложенные в [2, 10], определяют некоторые промежуточные расчетные значения λ_{ii} ($i = 1, 2$).

К сожалению, в работе [8] (см. табл. 12.30) не указано, для какого типа ткани кевлар-49 проводились эксперименты, а приведено лишь удельное объемное содержание волокон в композите ($\Omega = 0{,}46$). Однако, согласно табл. 12.5 из [8], существуют разные типы тканей из пряжи кевлар-49, содержащие в разных пропорциях волокна в направлениях основы и утка, поэтому выбор типа ткани кевлар-49 оказывает существенное влияние на расчетные значения λ_{ii} ($i = 1, 2$). Из табл. 4 видно, что разные методы определения эффективных коэффициентов теплопроводности λ_{11}, λ_{22} дают наилучшее приближение к эксперименту (см. значение λ_{ii} в сноске табл. 4) для разных типов тканей кевлар-49. Так, расчетное значение $\lambda_{22} = 0{,}8683$ Вт/м·K, определенное на основе формул (33), (34) для типа ткани 243, отличается от экспериментальной величины $\lambda_{ii} = 0{,}91$ Вт/м·K всего на 4,6 %, а расчетное значение $\lambda_{22} = 0{,}7842$ Вт/м·K, вычисленное на основе структурных формул из [2, 10] для типа ткани 143, отличается от эксперимента на 13,8 %, расчетное значение $\lambda_{22} = 1{,}1216$ Вт/м·K, полученное по формуле (20) для типа ткани 143, отличается от экспериментальной величины на 23,3 %. Остальные расчетные значения дают худшее согласование с экспериментом. (Возможно, в табл. 12.30 работы [8], из которой было взято экспериментальное значение $\lambda_{ii} = 0{,}91$ Вт/м·K, допущена опечатка, и истинное значение $\lambda_{ii} = 1{,}91$ Вт/м·K, тогда расчетные значения λ_{11} для всех типов тканей удовлетворительно согласовываются с экспериментом.)

Строго говоря, волокна, уложенные в направлении утка, являются криволинейными, поэтому для адекватного учета криволинейности траекторий армирования, которая имеет место в реальности [8, 13], требуется дальнейшее развитие предложенных в настоящей работе моделей, что выходит за рамки данного исследования.

Таким образом, удовлетворительное согласование расчетных (вычисленных по формулам (20) и (33), (34)) и экспериментальных значений λ_{11}, $\lambda_{22} = \lambda_{33}$ позволяет доверительно относиться к предложенным структурным моделям теплопроводности пространственно-армированного композита.

В качестве последнего примера определим расчетные значения эффективных коэффициентов теплопроводности для пространственно-армированного в направлениях x_1, x_2, x_3 органопластика ($N = 3$, $\theta_1 = \theta_2 = \pi/2$, $\theta_3 = 0$, $\varphi_2 = \varphi_1 + \pi/2$, $\varphi_1 = 0$, $\varphi_3 = 0$) при двух наборах значений плотностей армирования [13]: для композиции I типа $\omega_1 = 0,235$, $\omega_2 = 0,324$, $\omega_3 = 0,031$, $\Omega = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 0,59$; для композиции II типа $\omega_1 = 0,271$, $\omega_2 = 0,298$, $\omega_3 = 0,061$, $\Omega = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 0,63$.

В табл. 5 приведены ненулевые расчетные значения эффективных коэффициентов теплопроводности λ_{ij} указанных композиций. Как видно из этой таблицы, в случае пространственного армирования все исследуемые структурные модели теплофизического поведения волокнистого композита (в отличие от предыдущих случаев) приводят к существенно разным расчетным значениям λ_{ii} (i = 1, 2, 3). Из сопоставления данных, приведенных в табл. 5, следует, что по-прежнему, как и было предсказано в предыдущем разделе, расчетная формула (20) (“статический” метод) дает верхнюю оценку, а формулы (33), (34) (“кинематический” метод) — нижнюю оценку расчетных значений эффективных коэффициентов теплопроводности, причем возникающая при этом вилка может быть значительной. Структурные же модели теплопроводности, предложенные в [2, 10], определяют некоторые промежуточные расчетные значения λ_{ii} (i = 1, 2, 3).

Очевидно, что выбор той или иной из исследуемых структурных моделей теплопроводности пространственно-армированных композитов должен определяться их удовлетворительным согласованием с экспериментальными данными. К сожалению, автору неизвестны соответствующие эксперименты для пространственно-армированных волокнистых композиций.

В заключение следует подчеркнуть, что в реальных пространственно-армированных композитах траектории армирования не являются строго прямолинейными. Так, в работе [13] отмечается, что в композиции II типа траектории армирования волокнами третьего семейства ($\omega_3 = 0,061$), строго говоря, являются вытянутыми эллипсами. Следовательно, для адекватного учета криволинейности траекторий армирования требуется дальнейшее развитие предложенных в настоящей работе моделей.

Таблица 5

Расчетные значения коэффициентов теплопроводности пространственно-армированных композитов на основе волокон кевлар-49 и эпоксидной системы DER-332 / Джефамин T-403

Метод расчета	λ_{11}, Вт/м·K	λ_{22}, Вт/м·K	λ_{33}, Вт/м·K
Расчетная формула (20)	$\frac{2,7561^*}{3,1835}$	$\frac{2,9305}{3,2252}$	$\frac{0,9785}{1,7103}$
Структурные модели из [2, 10]	$\frac{1,8789}{2,1484}$	$\frac{2,2223}{2,2520}$	$\frac{0,6059}{0,9316}$
Расчетные формулы (33), (34)	$\frac{1,2809}{1,4499}$	$\frac{1,6853}{1,5725}$	$\frac{0,3752}{0,5074}$

* В числителе — результаты расчета для композиции I типа, в знаменателе — для композиции II типа.

Список литературы

1. **Немировский Ю.В., Янковский А.П.** Определение эффективных физико-механических характеристик гибридных композитов, перекрестно армированных трансверсально-изотропными волокнами, и сопоставление расчетных характеристик с экспериментальными данными // Механика композиционных материалов и конструкций. 2007. Т. 13, №. 1. С. 3–32.
2. **Немировский Ю.В., Янковский А.П.** Проектирование армированных композитов с заданным набором эффективных теплофизических характеристик и некоторые смежные задачи диагностики их свойств // Теплофизика и аэромеханика. 2008. Т. 15, № 2. С. 291–306.
3. **Пространственно-армированные** композиционные материалы: справочник / Ю. М. Тарнопольский, И.Г. Жигун, В.А. Поляков. М.: Машиностроение, 1987. 224 с.
4. **Малмейстер А.К., Тамуж В.П., Тетерс Г.А.** Сопротивление жестких полимерных материалов. Рига: Зинатне, 1972. 500 с.
5. **Немировский Ю.В., Янковский А.П.** Теплопроводность волокнистых оболочек // Теплофизика и аэромеханика. 1998. Т. 5, № 2. С. 215–235.
6. **Био М.** Вариационные принципы в теории теплообмена. М.: Энергия, 1975. 208 с.
7. **Фудзии Т., Дзако М.** Механика разрушения композиционных материалов. М.: Мир, 1982. 232 с.
8. **Справочник** по композитным материалам: в 2-х кн., кн. 1 / под ред. Дж. Любина; пер. с англ. А.Б. Геллера, М.М. Гельмонта; под ред. Б.Э. Геллера. М.: Машиностроение, 1988. 448 с.
9. **Композиционные** материалы. Справочник / под ред. Д.М. Карпиноса. Киев: Наукова думка, 1985. 592 с.
10. **Немировский Ю. В., Янковский А. П.** Моделирование процессов теплопроводности в ортогонально армированных гибридных композитах с дисперсным упрочнением связующего // Прикладная физика. 2008. № 5. С. 10–17.
11. **Ванин Г.А.** Микромеханика композитных материалов. Киев: Наукова думка, 1985. 304 с.
12. **Шленский О.Ф.** Тепловые свойства стеклопластиков. М.: Химия, 1973. 220 с.
13. **Жигун И.Г., Душин М.И., Поляков В.А., Якушин В.А.** Композиционные материалы, армированные системой прямых взаимно ортогональных волокон. 2. Экспериментальное изучение // Механика полимеров. 1973. № 6. С. 1011–1018.

Статья поступила в редакцию 31 августа 2010 г.