УДК 517.958.532

О СТАБИЛИЗАЦИИ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ФИЛЬТРАЦИИ ДВУХФАЗНОЙ ЖИДКОСТИ

Н. В. Хуснутдинова

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск

Исследуется асимптотическое поведение при неограниченном возрастании времени решений краевых задач для уравнения фильтрации двухфазной жидкости, описывающих процесс вытеснения из пласта несмешивающихся несжимаемых жидкостей. Установлена сходимость этих решений к единственному решению стационарной задачи (стабилизация), и при дополнительных предположениях дана оценка скорости сходимости.

Начально-краевая задача для динамической насыщенности $s(x,t)$ в области $\Omega\{0 \leqslant x \leqslant l,\ 0 \leqslant t < \infty\}$ имеет вид [1]

$$æ(x)\,\frac{\partial s}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\Big(k(x)a(s)\,\frac{\partial s}{\partial x} - Q(t)b(s)\Big); \tag{1}$$

$$s(0,t) = s_1(t), \quad s(l,t) = 0, \quad s(x,0) = s_0(x), \quad 0 \leqslant s_1(t) \leqslant 1, \quad 0 \leqslant s_0(x) \leqslant 1. \tag{2}$$

Здесь $æ(x) > 0$, $k(x) > 0$ — пористость грунта и коэффициент фильтрации соответственно; $Q(t) > 0$ — суммарный расход жидкости.

Функции $a(s)$, $b(s)$ определены при $0 \leqslant s \leqslant 1$ и удовлетворяют условиям

$$\begin{gathered} a(s) > 0 \quad \text{при} \quad 0 < s < 1, \quad a(0) = a(1) = 0, \\ b(s) > 0, \quad b'(s) > 0 \quad \text{при} \quad 0 < s < 1, \quad b'(0) \geqslant 0, \quad b'(1) \geqslant 0. \end{gathered} \tag{3}$$

Таким образом, параболическое уравнение (1) вырождается в уравнение первого порядка при двух значениях искомой функции: $s = 0$, $s = 1$.

Замечание. Так как при замене переменных

$$t = t, \qquad \xi = \int\limits_0^x \frac{d\tau}{k(\tau)\varphi(1)} \equiv \chi(x), \qquad \varphi(s) = \int\limits_0^s a(\tau)\,d\tau$$

(1) переходит в уравнение

$$\nu(\xi)\,\frac{\partial s}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \xi}\Big(\frac{a(s)}{\varphi(1)}\,\frac{\partial s}{\partial \xi} - Q(t)b(s)\Big),$$

где $\nu(\xi) = k(x(\xi))æ(x(\xi))\varphi(1)$, $x(\xi) \equiv \chi^{-1}(\xi)$ — функция, обратная для $\xi = \chi(x)$, то без ограничения общности можно положить $k(x) \equiv 1$, $æ(x) \equiv \nu(x)$, $\varphi(1) = 1$.

Исследование корректности нелинейных краевых задач фильтрации двухфазной жидкости начато в работах С. Н. Антонцева и В. Н. Монахова. В [1] сформулированы также условия слабой сходимости решений краевых задач к стационарным.

Работа выполнена при финансовой поддержке НТП Министерства образования Российской Федерации «Университеты России — фундаментальные исследования» (проект № 1788) и Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 99-01-00622).

Для нелинейного уравнения однофазной фильтрации вопросы стабилизации решений краевых задач рассматривались в работах [2–4].

В работе [5] (см. также [6]) доказано существование в области $\Omega_T\{0 \leqslant x \leqslant l, 0 \leqslant t \leqslant T\}$ при любом $T > 0$ обобщенного решения $s(x,t) \in C(\Omega_T)$ задачи (1), (2), удовлетворяющего неравенствам $0 \leqslant s(x,t) \leqslant 1$ и уравнению (1) в смысле интегрального тождества. Установлена также оценка $|\partial\varphi(s)/\partial x| \leqslant M$, $(x,t) \in \Omega_T$ с постоянной M, не зависящей от T, гарантирующая, в частности, конечность фазовых расходов $v_1 = -(\partial\varphi/\partial x - Qb)$ и $v_2 = Q - v_1$.

Аналогично случаю $s_1(t) \equiv 1$, $\nu(x) \equiv 1$ (см. [5]) доказывается существование такого обобщенного решения краевой задачи (1), (2) в области Ω, при этом соответствующее интегральное тождество имеет вид

$$\iint\limits_{\Omega} \left[\nu s \frac{\partial f}{\partial t} - \frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x} + Q(t)b(s)\frac{\partial f}{\partial x}\right] dt\,dx + \int\limits_0^l \nu(x)s_0(x)f(x,0)\,dx = 0, \tag{4}$$

где $f(x,t) \in C^1(\Omega)$ — произвольная функция, равная нулю при $x = 0$, $x = l$ и вне конечной области.

Ниже приведены достаточные условия существования обобщенного решения задачи (1), (2) в области Ω:

$$\begin{gathered}
\text{(i)}\quad s_0(x) \in C[0,l], \quad \varphi[s_0(x)] \in C^1[0,l], \quad \nu(x) \in C^{1+\alpha}[0,l],\ s_1(t) \in C^2[0,\infty),\\
a(s) \in C^{1+\alpha}[0,1], \quad b(s) \in C^{2+\alpha}[0,1], \quad Q(t) \in C^{(1+\alpha)/2}[0,\infty), \quad \alpha \in (0,1),\\
s_1'(t) > 0, \quad 0 < Q(t) \leqslant Q_0, \quad t \geqslant 0, \quad 0 = s_0(l) \leqslant s_0(x) \leqslant 1, \quad s_0(0) = s_1(0).
\end{gathered}$$

Функцию $\sigma(x) \in C[0,l]$, удовлетворяющую неравенствам $0 \leqslant \sigma(x) \leqslant 1$, назовем обобщенным решением краевой задачи

$$\frac{d}{dx}\left[a(\sigma)\frac{d\sigma}{dx} - Q_0 b(\sigma)\right] = 0, \qquad Q_0 = \max Q(t) > 0; \tag{5}$$

$$\sigma(0) = 1, \qquad \sigma(l) = 0, \tag{6}$$

если существует ограниченная обобщенная производная $d\varphi(\sigma)/dx$ и выполняется интегральное тождество вида (4)

$$\int\limits_0^l \left[a(\sigma)\frac{d\sigma}{dx} - Q_0 b(\sigma)\right]\frac{df}{dx}\,dx = 0, \tag{7}$$

где $f(x) \in C^1[0,l]$ — произвольная функция, равная нулю при $x = 0$, $x = l$.

Сделаем дополнительные предположения

$$\begin{gathered}
0 \leqslant Q_0 - Q(t) \leqslant M_1(t+1)^{-\gamma_1}, \qquad 0 \leqslant 1 - s_1(t) \leqslant M_2(t+1)^{-\gamma_1}, \qquad \gamma_1 > 0,\\
0 < s_0(x) \leqslant \sigma(x), \qquad x \in [0,l), \qquad \lim_{x\to l} a(s_0)s_0'(x) < 0, \qquad s_1(0) > 0,
\end{gathered}$$

которые в силу монотонности функции $\varphi(s) = \int\limits_0^s a(\tau)\,d\tau$ очевидно эквивалентны следующим:

$$0 \leqslant 1 - \varphi[s_1(t)] \leqslant M_3(t+1)^{-\gamma_1}, \qquad 0 \leqslant Q_0 - Q(t) \leqslant M_1(t+1)^{-\gamma_1}; \tag{8}$$

$$\varphi(k_1)\,\frac{l-x}{l} \leqslant \varphi[s_0(x)] \leqslant \varphi[\sigma(x)], \tag{9}$$

где M_3, M_1, γ_1, $k_1 \leqslant s_1(0)$ — некоторые постоянные.

Теорема. *При выполнении условий* (i), (3), (8), (9) *обобщенное решение задачи* (1), (2) *стремится при* $t \to \infty$ *к единственному обобщенному решению* $\sigma(x)$ *задачи* (5), (6), *удовлетворяющему неравенствам*

$$0 \leqslant \sigma(x) \leqslant 1, \quad \frac{d\sigma}{dx} \leqslant 0, \quad \frac{d^2\sigma}{dx^2} \leqslant 0, \quad x \in [0, l], \tag{10}$$

причем, если

$$b'(\sigma) \geqslant b_0 = \text{const} > 0, \qquad 0 \leqslant \sigma \leqslant 1, \tag{11}$$

то имеет место оценка

$$|\varphi[s(x,t)] - \varphi[\sigma(x)]| \leqslant \frac{M}{(t+1)^\gamma}, \qquad (x,t) \in \Omega, \tag{12}$$

где M, $\gamma > 0$ *зависят от* M_3, M_1, b_0, γ_1, l, Q_0 *и других данных задачи.*

Доказательство. Заменой искомых функций $\varphi(s) = v$, $\varphi(\sigma) = u$ преобразуем краевые задачи (1), (2) и (5), (6) к виду

$$L(v) \equiv A(v)\,\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - Q(t)B(v)\,\frac{\partial v}{\partial x} - \nu(x)\,\frac{\partial v}{\partial t} = 0; \tag{13}$$

$$v(0,t) = v_1(t), \qquad v(x,0) = v_0(x), \qquad v(l,t) = 0; \tag{14}$$

$$A(u)\,\frac{d^2u}{dx^2} - Q_0B(u)\,\frac{du}{dx} = 0; \tag{15}$$

$$u(0) = \varphi(1) = 1, \qquad u(l) = \varphi(0) = 0. \tag{16}$$

Здесь $A(v) \equiv a(\Phi(v))$, $B(v) \equiv b'(\Phi(v))$, $\Phi(v) \equiv \varphi^{-1}(v) = s$, $v_1(t) = \varphi[s_1(t)]$, $v_0(x) = \varphi[s_0(x)]$, $v(l,t) = \varphi[s(l,t)] = 0$.

Так как $\varphi'_s = a(s) > 0$ при $0 < s < 1$, то соответствие между s и v является взаимно однозначным.

Как и в [5], решение $s(x,t)$ краевой задачи (1), (2) получим как предел при $n \to \infty$, $m \to \infty$ классических решений $s_{mn}(x,t) \equiv \Phi[v_{mn}(x,t)]$ уравнения (1), где $v_{mn}(x,t) \in C^{3+\alpha}(\Omega)$ удовлетворяют уравнению (13), регуляризованным начально-краевым условиям

$$v_{mn}(x,0) = v_{0mn}(x), \qquad v_{mn}(0,t) = v_{1mn}(t) \equiv v_1(t) - 1/m, \qquad v_{mn}(l,t) = 1/n; \tag{17}$$

$$\lim_{m\to\infty}(\lim_{n\to\infty} v_{0mn}(x)) = v_0(x) \tag{18}$$

и неравенствам

$$\frac{1}{n} \leqslant v_{mn}(x,t) \leqslant 1 - \frac{1}{m}, \qquad \left|\frac{\partial v_{mn}}{\partial x}\right| \leqslant M. \tag{19}$$

По построению (см. [5]) $v_{mn}(x,t)$ образуют монотонно убывающую по n и монотонно возрастающую по m последовательности. То же справедливо и для $s_{mn}(x,t) \equiv \Phi[v_{mn}(x,t)]$.

Аналогично решение $\sigma(x)$ задачи (5), (6) можно представить как предел при $n \to \infty$, $m \to \infty$ последовательности функций $\sigma_{mn}(x) \equiv \Phi[u_{mn}(x)]$, где $u_{mn}(x) \in C^{3+\alpha}[0,l]$ — решения уравнения (15), подчиняющиеся краевым условиям (ср. с (16))

$$u_{mn}(0) = 1 - 1/m, \qquad u_{mn}(l) = 1/n \tag{20}$$

и такие, что

$$\frac{1}{n} \leqslant u_{mn}(x) \leqslant 1 - \frac{1}{m}, \qquad \frac{du_{mn}}{dx} < 0, \qquad \frac{d^2u_{mn}}{dx^2} < 0, \qquad x \in [0, l]. \tag{21}$$

Сначала докажем, что решение $u_{mn}(x)$ задачи (15), (20), удовлетворяющее неравенствам (21), существует и единственно.

Опуская для простоты индексы у u_{mn} и записывая уравнение (5) в виде $(d/dx)[du/dx - Q_0 b(\Phi(u))] = 0$, получим

$$\frac{du}{dx} = Q_0 b[\Phi(u)] - Q_0 C. \tag{22}$$

Интегрируя еще раз, приходим к неявному представлению решения

$$x = l - \frac{1}{Q_0}\int\limits_{1/n}^{u} \frac{d\tau}{C - b[\Phi(\tau)]} \equiv l - \frac{1}{Q_0} f(C, u), \tag{23}$$

где C — произвольная постоянная. При $C = b[\Phi(1 - 1/m)]$, очевидно, $lQ_0 - f(b[\Phi(1 - 1/m)], 1 - 1/m) < 0$. Кроме того, $f(C, 1 - 1/m) \to 0$ при $C \to \infty$ и, значит, $lQ_0 - f(C, 1 - 1/m) > 0$ для достаточно больших C. Следовательно, для некоторого $C = C_0 > b[\Phi(1 - 1/m)]$ $f(C_0, 1 - 1/m) = lQ_0$, т. е.

$$x(C_0, 1 - 1/m) = 0, \qquad x(C_0, 1/n) = l. \tag{24}$$

Поскольку $C_0 > b[\Phi(1 - 1/m)]$, $x'_u < 0$, то из (22)–(24) вытекает существование единственного решения задачи (15), (20), обладающего свойствами (21), а тем самым и существование единственного решения уравнения (5), удовлетворяющего краевым условиям

$$\sigma_{mn}(0) = \Phi(1 - 1/m), \qquad \sigma_{mn}(l) = \Phi(1/n) \tag{25}$$

и неравенствам

$$\Phi(1/n) \leqslant \sigma_{mn}(x) \leqslant \Phi(1 - 1/m), \qquad \frac{d\sigma_{mn}}{dx} < 0, \qquad \frac{d^2\sigma_{mn}}{dx^2} < 0, \quad x \in [0, l]. \tag{26}$$

Сравним функции $u_{mn}(x)$ и $u_{m(n+1)}(x)$ на отрезке $[0, l]$. При $x = 0$ имеем $u_{mn}(0) = u_{m(n+1)}(0)$; при $x = l$ получим $u_{mn}(l) > u_{m(n+1)}(l)$.

На промежутке $0 < x < l$ разность $z = u_{mn}(x) - u_{m(n+1)}(x)$ удовлетворяет линейному параболическому уравнению

$$A(u_{mn})\,\frac{d^2 z}{dx^2} - Q_0 B(u_{mn})\,\frac{dz}{dx} + Rz = 0, \tag{27}$$

где $R = A'_u(\theta_1)\dfrac{d^2 u_{m(n+1)}}{dx^2} - Q_0 B'_u(\theta_2)\,\dfrac{du_{m(n+1)}}{dx}$, θ_1, θ_2 — значения, промежуточные между $u_{mn}(x)$ и $u_{m(n+1)}(x)$.

В силу (27) функция $w = z(x)\,\mathrm{e}^{-\beta t}$ является решением уравнения

$$A(u_{mn})\,\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - Q_0 B(u_{mn})\,\frac{\partial w}{\partial x} + (R - \beta)w - \frac{\partial w}{\partial t} = 0.$$

Выберем β из условия $\beta - R > 0$, $x \in (0, l)$, что возможно ввиду ограниченности R. Отсюда по принципу максимума заключаем, что $w(x, t) \geqslant 0$ при $x \in [0, l]$, т. е. $u_{mn}(x) \geqslant u_{m(n+1)}(x)$. Аналогично убеждаемся, что $u_{mn}(x) \leqslant u_{(m+1)n}(x)$, $x \in [0, l]$.

Таким образом, последовательность $\{u_{mn}(x)\}$ является монотонно убывающей по n и монотонно возрастающей по m. То же справедливо и для последовательности функций $\sigma_{mn}(x) \equiv \Phi[u_{mn}(x)]$, причем $0 < \sigma_{mn}(x) < 1$ ввиду непрерывности Φ.

В силу этих свойств при каждом m существует $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_{mn}(x) = \sigma_m(x)$. Очевидно, $0 \leqslant \sigma_m(x) \leqslant \sigma_{m+1}(x) < 1$, $x \in [0, l]$, и, значит, существует $\lim\limits_{m\to\infty} \sigma_m(x) = \sigma(x)$.

Из (22) с учетом (21) получаем

$$\left|\frac{d\varphi(\sigma_{mn})}{dx}\right| \leqslant M_0,$$

где M_0 не зависит от m и n. Отсюда следует, что предельная функция $\varphi[\sigma(x)]$ удовлетворяет условию Липшица и в Ω существует обобщенная производная $d\varphi(\sigma)/dx$, по модулю не превосходящая M_0, являющаяся $*$-слабым пределом некоторой подпоследовательности $d\varphi[\sigma_{m_k n_k}]/dx$ ($\{\sigma_{m_k n_k}\} \subset \{\sigma_{mn}\}$). В результате предельного перехода при $n_k \to \infty$, $m_k \to \infty$ в тождестве (7) для $\sigma_{m_k n_k}(x)$ приходим и к справедливости (7) для $\sigma(x)$.

Таким образом, $\sigma(x)$ является обобщенным решением краевой задачи (5), (6), удовлетворяющим (10) (см. (25), (26)). Покажем, что решение задачи (5), (6), обладающее свойствами (10), единственно.

В случае $lQ_0 < \int\limits_0^1 \frac{d\tau}{b(1) - b[\Phi(\tau)]}$ это следует из равенства (см. (23) в пределе при $n \to \infty$, $m \to \infty$)

$$x = l - \frac{1}{Q_0}\int\limits_0^u \frac{d\tau}{C_0 - b[\Phi(\tau)]} \equiv l - \frac{1}{Q_0} f(C_0, u) \equiv F(C_0, u), \tag{28}$$

обратимого в силу положительности $C_0 - b(1)$, $f(C_0, 0) = 0$, $f(C_0, 1) = lQ_0$, т. е. $\sigma(x) = \Phi[F^{-1}(x)]$ определяется из (28) однозначно.

Если $\lim\limits_{C_0 \to b(1)} F(C_0, 1) < \infty$ и $lQ_0 \geqslant f[b(1), 1] = l_1 Q_0$, то из (22) находим

$$\left.\frac{du}{dx}\right|_{x=l-l_1} = \left.\frac{d\varphi(\sigma)}{dx}\right|_{x=l-l_1} = 0.$$

Учитывая последнее и полагая при $l > l_1$

$$\sigma(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, l - l_1], \\ \Phi[F^{-1}(x)], & x \in (l - l_1, l], \end{cases}$$

убеждаемся, что $\sigma(x)$ является невозрастающим, выпуклым вверх, обобщенным решением задачи (5), (6). По построению это решение очевидно единственно.

Для завершения доказательства теоремы проверим справедливость неравенств

$$u_{mn}[\psi(x,t)] \leqslant v_{mn}(x,t) \leqslant u_{mn}(x), \tag{29}$$

где $\psi = (x - l)(t+1)^\gamma/((t+1)^\gamma + \delta) + l$, $(m,n) > N_0$, $\delta > \delta_0 > 1$, $\gamma < \gamma_0 < \gamma_1$, N_0, δ_0, γ_0 — некоторые постоянные.

В силу условий (8), (9), (14), (17)–(20) неравенства (29) выполняются при достаточно больших N_0, δ_0, γ_0^{-1} на Γ (части границы прямоугольника Ω, состоящей из боковых сторон $x = 0$, $x = l$ и нижнего основания $t = 0$).

Таким образом, разность $q = u_{mn}(x) - v_{mn}(x,t)$ при любых $n > N_0$, $m > N_0$ неотрицательна на Γ, а в области Ω (индексы у u_{mn}, v_{mn} опустим) удовлетворяет линейному параболическому уравнению

$$L_1(q) \equiv A(v)\,\frac{\partial^2 q}{\partial x^2} - Q(t)B(v)\,\frac{\partial q}{\partial x} - c_1 q - \nu\,\frac{\partial q}{\partial t} = f_1,$$

причем $f_1 = [Q_0 - Q(t)]B(u)(du/dx) \leqslant 0$ и коэффициент $c_1 = A'_v(\theta_1)(d^2u/dx^2) - Q(t)B'_v(\theta_2)\,(du/dx)$ (где θ_1, θ_2 — промежуточные значения между v_{mn} и u_{mn}) в Ω ограничен некоторой постоянной M_4 (см. (8), (22)).

Переходя к функции $\chi = q\mathrm{e}^{-\beta t}$ $(\nu\beta > M_4)$, находим

$$\chi\Big|_\Gamma \geqslant 0, \quad \mathrm{e}^{-\beta t}L_1(\chi\mathrm{e}^{\beta t}) \equiv L_1(\chi) - \nu\beta\chi = f_1\mathrm{e}^{-\beta t} \leqslant 0, \quad (x,t) \in \Omega.$$

Отсюда по принципу максимума $\chi = q\mathrm{e}^{-\beta t} \geqslant 0$ при $(x,t) \in \Omega$, т. е. $v_{mn}(x,t) \leqslant u_{mn}(x)$, $(x,t) \in \Omega$.

Докажем левую часть неравенств (29). Положим $\mu = (t+1)^\gamma$,

$$\tau = u_{mn}(\psi), \quad \psi = \psi(x,t), \quad L_0(\tau) \equiv A(\tau)\,\frac{\partial^2\tau}{\partial x^2} - Q_0 B(\tau)\,\frac{\partial\tau}{\partial x} - \nu\,\frac{\partial\tau}{\partial t}$$

и вычислим $L_0(\tau)$, $L_2(v-\tau) \equiv L(v) - L_0(\tau) - d$, где

$$d = [Q_0 - Q(t)]B(\tau)\,\frac{d\tau}{d\psi}\,\frac{\mu}{\mu+\delta}, \quad L_2(z) = A(v)\,\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - Q(t)B(v)\,\frac{\partial z}{\partial x} + c_2 z - \nu\,\frac{\partial z}{\partial t},$$

$$c_2 = A'_v(\theta_1)\,\frac{\partial^2\tau}{\partial x^2} - Q(t)B'_v(\theta_2)\,\frac{\partial\tau}{\partial x}$$

(θ_1, θ_2 — промежуточные значения между v_{mn} и τ). Имеем

$$L_0(\tau) = \left(\frac{\mu}{\mu+\delta}\right)^2\left[A(\tau)\,\frac{d^2\tau}{d\psi^2} - Q_0B(\tau)\,\frac{d\tau}{d\psi}\right] + Q_0B(\tau)\,\frac{d\tau}{d\psi}\,\frac{\mu}{\mu+\delta}\left(\frac{\mu}{\mu+\delta} - 1\right) -$$

$$- \frac{\gamma\nu\delta\mu}{(t+1)(\mu+\delta)^2}\,\frac{d\tau}{d\psi}\,(x-l) = \frac{\mu\delta}{(\mu+\delta)^2}\left|\frac{d\tau}{d\psi}\right|\left[Q_0B(\tau) + \frac{\gamma\nu(x-l)}{t+1}\right],$$

$$L_2(v-\tau) = -\frac{\mu\delta}{(\mu+\delta)^2}\left|\frac{d\tau}{d\psi}\right|\left[Q_0B(\tau) + \frac{\gamma\nu(x-l)}{t+1}\right] + [Q_0 - Q(t)]B(\tau)\left|\frac{d\tau}{d\psi}\right|\frac{\mu}{\mu+\delta} \leqslant$$

$$\leqslant -\frac{\mu}{\mu+\delta}\left|\frac{d\tau}{d\psi}\right|\left\{\left[\frac{Q_0\delta}{(t+1)^\gamma+\delta} - \frac{M_1}{(t+1)^{\gamma_1}}\right]B(\tau) - \frac{\gamma\nu l\delta}{(t+1)(\mu+\delta)}\right\} \equiv \lambda_0.$$

Поскольку $\lambda(t) = Q_0\delta/((t+1)^\gamma + \delta) - M_1/(t+1)^{\gamma_1} > 0$ при $\gamma < \gamma_1/2$ и $t \geqslant t_0$ (t_0 — некоторое число), то без ограничения общности можно считать, что $t_0 = 0$, т. е. $\lambda(0) > 0$.

Учитывая далее, что $B(\tau) \equiv b'_s[\sigma_{mn}(\psi)] \geqslant k_0(m,n)$ ($k_0 \to 0$ при $n \to \infty$, $m \to \infty$, см. (3)) и выбирая γ из условия

$$\gamma = \frac{1}{2}\min\left\{\frac{\lambda(0)k_0}{\nu l}, \gamma_1\right\} = \gamma_0,$$

находим $L_2(v-\tau) \leqslant \lambda_0 < 0$ при $(x,t) \in \Omega$.

Таким образом, функция $\omega = (v-\tau)\,\mathrm{e}^{-\beta t}$ $(\nu\beta > |c_2|)$ удовлетворяет условиям

$$\omega\Big|_\Gamma \geqslant 0, \quad \mathrm{e}^{-\beta t}L_2(\omega\,\mathrm{e}^{\beta t}) = L_2(\omega) - \nu\beta\omega = \lambda_0\mathrm{e}^{-\beta t} < 0, \quad (x,t) \in \Omega,$$

обеспечивающим по принципу максимума неотрицательность $\omega = (v-\tau)\,\mathrm{e}^{-\beta t}$ всюду в Ω, т. е. $v_{mn}(x,t) \geqslant u_{mn}[\psi(x,t)]$. Неравенства (29) установлены.

Из (29) следуют аналогичные неравенства для обратных функций $\Phi[u_{mn}(\psi(x,t))] \equiv \sigma_{mn}(\psi)$, $\Phi[v_{mn}(x,t)] \equiv s_{mn}(x,t)$, $\Phi[u_{mn}(x)] \equiv \sigma_{mn}(x)$:

$$\sigma_{mn}[\psi(x,t)] \leqslant s_{mn}(x,t) \leqslant \sigma_{mn}(x).$$

Так как $|s(x,t) - \sigma(x)| \leqslant |s(x,t) - s_{mn}(x,t)| + |s_{mn}(x,t) - \sigma_{mn}(x)| + |\sigma_{mn}(x) - \sigma(x)|$, то для любого сколь угодно малого ε найдутся числа $N = N(\varepsilon)$, $T = T(N)$ такие, что $|s(x,t) - \sigma(x)| < \varepsilon$ при $(m,n) > N$, $t > T$, т. е. $s(x,t)$ при $t \to \infty$ стремится к единственному решению $\sigma(x)$ задачи (5), (6).

Учитывая далее, что

$$|u_{mn}(x) - u_{mn}(\psi(x,t))| \leqslant M_0|x - \psi(x,t)| \leqslant \frac{M}{(t+1)^\gamma},$$

приходим к оценке

$$|v_{mn}(x,t) - u_{mn}(x)| \leqslant \frac{M}{(t+1)^\gamma}, \tag{30}$$

где $\gamma = \gamma(m, n, l, Q_0, \gamma_1)$; M зависит от l, δ, Q_0 и не зависит от m, n.

При выполнении неравенства (11) постоянная γ может быть выбрана независимо от m и n. Тогда оценку (12) получим в результате предельного перехода в неравенствах (30) сначала при $n \to \infty$, затем при $m \to \infty$. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Антонцев С. Н., Кажихов А. В., Монахов В. Н.** Краевые задачи механики неоднородных жидкостей. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1983.
2. **Хуснутдинова Н. В.** О поведении решений краевых задач и задачи Коши для уравнения типа нестационарной фильтрации при неограниченном возрастании времени // Тр. Казан. авиац. ин-та. 1961. Вып. 64. С. 47–63.
3. **Хуснутдинова Н. В.** Предельный профиль влажности при инфильтрации в однородную почву // Прикл. математика и механика. 1967. Т. 31, вып. 2. С. 770–776.
4. **Артемова Г. Н., Хуснутдинова Н. В.** Об асимптотике решений двумерного уравнения типа нестационарной фильтрации // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 1969. Вып. 2. С. 91–99.
5. **Алексеев Г. В., Хуснутдинова Н. В.** О разрешимости первой краевой задачи для уравнения одномерной фильтрации двухфазной жидкости // Докл. АН СССР. 1972. Т. 202, № 2. С. 310–312.
6. **Цхай А. А.** О разрешимости одной задачи одномерной фильтрации двухфазной жидкости // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 1983. Вып. 59. С. 173–179.

Поступила в редакцию 2/VII 1998 г.,
в окончательном варианте — 31/VIII 1998 г.