

УДК 536.2, 539.4
DOI: 10.15372/PMTF202315297

ОЦЕНКА СВЯЗАННОСТИ В УРАВНЕНИИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ДИНАМИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ХРУПКИХ МАТЕРИАЛОВ

В. А. Киричек

Таганрогский институт им. А. П. Чехова (филиал) Ростовского государственного
экономического университета, Таганрог, Россия
E-mail: Zhornik_Victoria@mail.ru

Рассматривается уравнение теплопроводности связанной динамической теории термоупругости. Проводится оценка связанности в уравнении теплопроводности для пространства с постоянной начальной температурой, содержащего движущуюся с постоянной скоростью плоскую полубесконечную трещину, на берегах которой мгновенно устанавливается постоянная температура, меньшая начальной (термоудар). Движение трещины и термоудар на ее берегах определяют динамические эффекты, которые необходимо учесть для оценки связанности в уравнении теплопроводности. Показано, что в реальных условиях теплового воздействия на массивные тела с трещинами динамическими эффектами и связанностью для материалов, удовлетворяющих определенным условиям, налагаемым на их термомеханические постоянные, можно пренебречь, что позволяет значительно упростить решение задач термоупругости для таких тел.

Ключевые слова: термоупругость, трещина, смешанные граничные условия, коэффициент интенсивности напряжений, динамические эффекты, связанное уравнение теплопроводности

Введение. В процессе изготовления и эксплуатации детали машин и элементы конструкций, имеющие трещиноподобные дефекты, подвергаются резким тепловым воздействиям. Строго говоря, в общем случае такие нестационарные тепловые процессы должны рассматриваться как динамические, т. е. с учетом инерционных эффектов, и как связанные, т. е. с учетом рассеяния различных видов энергии в уравнении теплопроводности.

В данной работе при проведении анализа системы основных уравнений связанной динамической теории температурных напряжений [1] основным является уравнение связанной теории теплопроводности, в которое входят механические члены, зависящие от скоростей деформации:

$$\nabla^2 T - \frac{1}{k} \dot{T} + \frac{q}{\lambda_T} - \frac{T_s(3\lambda + 2\mu)\alpha_T}{\lambda_T} \dot{\epsilon}_{nn} + \frac{s_{ij}^r \dot{d}_{ij}^r}{\lambda_T} = 0. \quad (1)$$

Здесь ∇^2 — оператор Лапласа; T — температура тела; $k = \lambda_T/(\rho c)$ — температуропроводность; λ_T — теплопроводность; ρ, c — плотность и удельная теплоемкость материала тела соответственно; q — интенсивность внутренних источников тепла, не зависящих от процесса деформирования (электрический ток, химические и ядерные реакции); $\dot{\epsilon}_{nn} = \text{div } \dot{\mathbf{u}}$ —

первый инвариант скоростей деформации; по повторяющимся индексам проводится суммирование; точка означает дифференцирование по времени; \mathbf{u} — вектор перемещения; T_s — температура, при которой тело свободно от напряжений; λ, μ — коэффициенты Ламе; α_T — коэффициент линейного температурного расширения материала; s_{ij}^r, d_{ij}^r — девиаторы тензоров напряжений и вязкой или пластической деформации r -го элемента соответственно.

В уравнении теплопроводности (1) четвертое слагаемое характеризует упругие свойства материала, поэтому связанность в этом уравнении (рассеяние энергии) определяется динамическими эффектами через $\dot{\epsilon}_{nn}$. Последнее слагаемое в уравнении теплопроводности характеризует вязкие или пластические свойства материала, поэтому связанность в уравнении теплопроводности присутствует и в квазистатическом случае. Квазистатический случай для полого цилиндра, цилиндрические поверхности которого подвергались поочередно нагреву и давлению, рассмотрен в работе [2], где связанность присутствует в уравнении теплопроводности за счет механических воздействий. В [3] исследуется одномерное связанное уравнение теплопроводности, в которое входит член, характеризующий упругие динамические эффекты, вызванные одноосным механическим нагружением. Кроме того, уравнение теплопроводности содержит член, характеризующий источники тепла за счет химических реакций. В работе [4] исследуется квазистатическая задача для связанного уравнения теплопроводности, в которое входят внутренние источники тепла, вызванные химическими реакциями, зависящими от механических напряжений, возникающих в результате нанесения покрытия на поверхность цилиндра.

В работах [5–7] исследуется связанная задача термоупругости для круглой однослойной или многослойной пластины, защемленной по цилиндрической поверхности. Задача решалась в двух вариантах: несвязанная с учетом инерции и связанная в квазистатической постановке. В [5–7] показано, что связанность замедляет тепловой процесс.

В работе [8] рассматриваются одномерные однородные и составные балки в условиях термоупругости, термопластичности и ползучести в квазистатическом случае. Поэтому связанность в уравнении теплопроводности определяется вязкими и пластическими свойствами материалов. В [9] анализируются термоупругие процессы в балках и пластинах в квазистатическом и динамическом случаях, связанность возникает за счет динамических процессов, происходящих в упругих телах.

В работе [1] при проведении оценки связанности в уравнении теплопроводности использовались две задачи несвязанной динамической термоупругости (в уравнении теплопроводности отсутствуют вязкие и пластические составляющие деформаций) для полупространства, в котором поверхность свободна от нагрузок. В первой задаче поверхность полупространства, имеющего нулевую температуру, внезапно соприкасается с высокотемпературной средой, при этом возникает теплообмен с конечным или бесконечным (частный случай) значением коэффициента теплообмена. Во второй задаче в полупространстве, имеющем нулевую температуру, температура поверхности изменяется со временем по линейному закону и за малый промежуток времени достигает значения, равного температуре среды, которая далее остается постоянной, что соответствует реальным условиям теплового воздействия.

Во всех указанных выше работах трещины в материале отсутствуют.

В данной работе оценка связанности в уравнении теплопроводности проводится для пространства с полубесконечной плоской движущейся трещиной. С учетом симметрии относительно трещины рассматривается задача динамической термоупругости для полупространства с движущимися смешанными граничными условиями, аналогичная двум указанным выше задачам для полупространства.

Целью настоящей работы является получение оценки связанности в уравнении теплопроводности при реальных тепловых воздействиях на массивные термоупругие тела с трещинами.

1. Постановка задачи. Рассматривается термоупругое пространство с начальной температурой T_0 , содержащее полубесконечную плоскую движущуюся трещину, на берегах которой устанавливается температура T_1 , меньшая начальной. Поскольку тело термоупругое, вязкие или пластические составляющие в уравнении (1) связанной теплопроводности отсутствуют. Запишем уравнение (1) в виде

$$\lambda_T \nabla^2 T + q = \rho c \dot{T} \left(1 + \Delta \frac{\dot{\epsilon}_{nn}}{3\alpha_T \dot{T}} \right), \quad (2)$$

где $\Delta = 3(3\lambda + 2\mu)\alpha_T^2 T_s / (\rho c)$.

В уравнении (2) учитывается влияние связанности, и им можно пренебречь, если

$$\frac{\dot{\epsilon}_{nn}}{3\alpha_T \dot{T}} \ll \frac{1}{\Delta}.$$

Проведем оценку величины $\dot{\epsilon}_{nn}/(3\alpha_T \dot{T})$ для двух материалов. При $T_s = 353$ К для стекла

$$\Delta = 0,005, \quad \dot{\epsilon}_{nn}/(3\alpha_T \dot{T}) \ll 200,$$

для органического стекла (ПММА)

$$\Delta = 0,015, \quad \dot{\epsilon}_{nn}/(3\alpha_T \dot{T}) \ll 67.$$

Использовались следующие осредненные по температурному интервалу (T_0, T_1) термомеханические постоянные: для стекла $\lambda = 2,48 \cdot 10^{10}$ Н/м², $\mu = 2,90 \cdot 10^{10}$ Н/м², $\rho = 2,55 \cdot 10^3$ кг/м³, $\lambda_T = 79,42 \cdot 10^{-2}$ Дж/(м·с·К), $c = 8,33 \cdot 10^2$ Дж/(кг·К), $\alpha_T = 90 \cdot 10^{-7}$ 1/К (начальная температура T_0 значительно меньше температуры стеклования $T_g = 770$ К); для оргстекла $\lambda = 0,46 \cdot 10^{10}$ Н/м², $\mu = 0,18 \cdot 10^{10}$ Н/м², $\rho = 1,18 \cdot 10^3$ кг/м³, $\lambda_T = 18,64 \cdot 10^{-2}$ Дж/(м·с·К), $c = 14,6 \cdot 10^2$ Дж/(кг·К), $\alpha_T = 36 \cdot 10^{-6}$ 1/К ($T_0 < T_g = 363$ К).

В работе [1] при $T_s = 363$ К для алюминия получены значения $\Delta = 0,05$, $\dot{\epsilon}_{nn}/(3\alpha_T \dot{T}) \ll 20$, для стали — $\Delta = 0,025$, $\dot{\epsilon}_{nn}/(3\alpha_T \dot{T}) \ll 40$.

Из приведенных выше неравенств следует, что связанностью в уравнении теплопроводности (2) можно пренебречь, если скорость изменения объемной температурной деформации $3\alpha_T \dot{T}$ будет того же порядка, что и скорость изменения полной объемной деформации $\dot{\epsilon}_{nn}$, в том числе механической, т. е.

$$\frac{\dot{\epsilon}_{nn}}{3\alpha_T \dot{T}} \approx 1.$$

Это условие означает, что изменение деформации во времени происходит непосредственно после изменения температуры. Поэтому при тепловых воздействиях на тела, особенно массивные, необходимо учитывать инерционные эффекты.

С учетом полученных численных оценок необходимо провести расчет динамических термоупругих напряжений и зависящего от них коэффициента интенсивности напряжений (КИН) в несвязанной постановке для пространства с движущейся в нем со скоростью v_T плоской полубесконечной трещиной, на берегах которой, свободных от нагрузок, мгновенно устанавливается постоянная температура T_1 , меньшая начальной T_0 , вследствие чего возникает термоудар.

Движение вершины трещины и термоудар на ее берегах определяют динамические эффекты, которые необходимо учесть при оценке связанности в уравнении теплопроводности. Решение динамической задачи термоупругости получено в работе [10], в которой

для расчета КИН к берегам полубесконечной движущейся трещины была приложена нагрузка $-\sigma_{yy}^T(x, 0, t)$ — напряжение на движущейся со скоростью v_T полуплоскости с температурой T_1 в пространстве без трещины, имеющем начальную температуру T_0 . Это напряжение было получено в виде изображения по Лапласу — Фурье $\tilde{\sigma}_{yy}^T(\xi, 0, s)$ при $x < 0$ (на берегах трещины), в котором не удалось перейти к оригиналу во всем интервале изменения времени. Поэтому рассматривались предельные случаи малых ($s \rightarrow \infty, t \ll k/(2c_{\parallel}^2)$) и больших ($s \rightarrow 0, t \rightarrow \infty$) времен.

Оригинал напряжения для малых времен имеет вид

$$\sigma_{yy}^T(x, 0, t) = -\mu \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha_T (T_1 - T_0) \frac{c_{\parallel}^2}{c_{\perp}^2} \chi(t), \quad t \ll \frac{k}{2c_{\parallel}^2}, \quad (3)$$

где $\chi(t)$ — функция Хевисайда; ν — коэффициент Пуассона; c_{\parallel}, c_{\perp} — скорости продольной и поперечной волн соответственно.

Для относительно больших, но меньших бесконечности времен (s мало, $k/(2c_{\parallel}^2) \ll t < \infty$) выражение для изображения по Лапласу $\bar{\sigma}_{yy}^T(x, 0, s)$ имеет вид

$$\bar{\sigma}_{yy}^T(x, 0, s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \mu \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha_T \frac{T_1 - T_0}{s} \frac{1 - v_T^2/(2c_{\perp}^2)}{\sqrt{1 - v_T^2/c_{\parallel}^2}} \sqrt{\gamma + \beta} \times \\ \times \left(-2 \int_0^{\beta-\gamma} \frac{\sqrt{\beta - \gamma - \tau} e^{\tau x} d\tau}{\beta^2 - 2\gamma\tau - \gamma^2} \right), \quad (4)$$

где $\gamma = v_T/(2k)$; $\beta = \sqrt{\gamma^2 + s/k}$; $k = \lambda_T/(\rho c)$.

Затем определялся КИН. Таким образом, в [10] КИН оценивался лишь в предельных точках $t \rightarrow 0$ и $t \rightarrow \infty$, что не позволяет оценить КИН в промежуточном временном интервале.

2. Расчет коэффициента интенсивности напряжений. Расчет КИН проводится не только для предельных значений времени ($t \rightarrow 0$ и $t \rightarrow \infty$), но и в промежуточном временном интервале ($0 < t < \infty$). Для этого используются результаты работы [11].

Для определения КИН при малых временах ($s \rightarrow \infty, t \rightarrow 0$) на берегах трещины согласно (3) создается термоудар.

В работе [11] показано, что при механическом ударе на берегах полубесконечной трещины, совершаемом постоянной нагрузкой σ , КИН выражается зависимостью

$$K_I^d(t) = 2\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sigma \frac{c_R - v_T}{\sqrt{c_{\parallel} - v_T} S_+(0)} \sqrt{t}, \quad (5)$$

где $S_+(0) = \sqrt{1 - \nu} c_R/c_{\perp}$; c_R — скорость волны Рэлея.

Подставляя σ_{yy}^T из (3) в (5) вместо σ получаем безразмерное выражение для КИН

$$(K_I^d)^* = 2 \frac{c_{\parallel}^2}{c_{\perp}^2} \frac{1 - v_T/c_R}{\sqrt{1 - v_T/c_{\parallel}}} \sqrt{\eta} / \left(\frac{c_{\parallel}}{c_R} \sqrt{\pi} S_+(0) \right), \quad \eta \ll \frac{1}{2}, \quad (6)$$

где $(K_I^d)^* = -K_I^d(1 - \nu)/(\sqrt{2}\mu(1 + \nu)\alpha_T(T_1 - T_0)\sqrt{k/c_{\parallel}})$; $\eta = c_{\parallel}^2 t/k$.

Для определения КИН при относительно больших временах к берегам трещины необходимо приложить нормальную нагрузку, изображение которой по Лапласу определяется выражением (4).

После преобразований с использованием таблиц интегралов [12, 13] это выражение принимает вид

$$\bar{\sigma}_{yy}^T(x, 0, s) = -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1 - v_T^2/(2c_{\perp}^2)}{\sqrt{1 - v_T^2/c_{\parallel}^2}} \mu \frac{1 + \nu}{1 - \nu} \alpha_T \frac{T_1 - T_0}{s} \times \\ \times \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2\gamma}{\beta + \gamma} \right)^{n-1} \sqrt{\frac{\beta - \gamma}{\beta + \gamma}} \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(n + 3/2)} {}_1F_1 \left[n, \frac{3}{2} + n, (\beta - \gamma)x \right], \quad (7)$$

где $\Gamma(n)$ — гамма-функция; ${}_1F_1$ — вырожденная гипергеометрическая функция.

Следует отметить, что в [11] при определении КИН предполагалось, что к берегам движущейся трещины симметрично приложены нормальные сосредоточенные ступенчатые во времени нагрузки. С использованием принципа суперпозиции [14] эти результаты можно обобщить на случай произвольного распределения нагрузки на берегах трещины и произвольных зависимостей ее от времени. В случае относительно больших времен изображение по времени для КИН определяется соотношением

$$\bar{K}_I^d(s) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{\bar{\sigma}_{yy}^T(-\zeta, 0, s)}{\sqrt{\zeta}} d\zeta,$$

подставляя в которое (7) находим

$$\bar{K}_I^d(s) = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1 - v_T^2/(2c_{\perp}^2)}{\sqrt{1 - v_T^2/c_{\parallel}^2}} \mu \frac{1 + \nu}{1 - \nu} \alpha_T \frac{T_1 - T_0}{s} \times \\ \times \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2\gamma}{\beta + \gamma} \right)^{n-1} \frac{1}{\sqrt{\beta + \gamma}} \frac{\Gamma(n - 1/2)}{n\Gamma(n)}. \quad (8)$$

Переходя в (8) к оригиналу с использованием обозначения β и таблиц обратных интегральных преобразований Лапласа [15], получаем

$$K_I^d(t) = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1 - v_T^2/(2c_{\perp}^2)}{\sqrt{1 - v_T^2/c_{\parallel}^2}} \mu \frac{1 + \nu}{1 - \nu} \alpha_T (T_1 - T_0) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2\gamma)^{n-1} \Gamma(n - 1/2)}{n\Gamma(n)} \times \\ \times k \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(n - \frac{1}{2} \right) \frac{1}{k} \gamma^{-(n-1/2)} \int_0^{\sqrt{2k\gamma^2 t}} x^{n-1/2-1} e^{-x^2/4} D_{-(n-1/2)-1}(x) dx, \quad (9)$$

где $D(x)$ — функция параболического цилиндра.

С использованием таблицы интегралов [16] выражение (9) принимает вид

$$K_I^d(t) = -\sqrt{2} \mu \frac{1 + \nu}{1 - \nu} \alpha_T (T_1 - T_0) \sqrt{\frac{k}{c_{\parallel}}} \frac{1 - v_T^2/(2c_{\perp}^2)}{\sqrt{1 - v_T^2/(2c_{\parallel}^2)}} F(\eta),$$

где

$$F(\eta) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} (2\gamma^*)^{n-1} \frac{\Gamma(n - 1/2)}{\Gamma(n + 1)} \left(n - \frac{1}{2} \right) \left\{ \frac{\eta^{(n-1/2)/2}}{2\Gamma(n/2 + 3/4)(n/2 - 1/4)} \times \right.$$

$$\times {}_2F_2\left[-\frac{1}{2}n + \frac{1}{4}, \frac{1}{2}\left(n - \frac{1}{2}\right); \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\left(n - \frac{1}{2}\right) + 1; -(\gamma^*)^2\eta\right] - \frac{\eta^{(n+1/2)/2}}{\Gamma[(n+1/2)/2](n/2+1/4)\gamma^*} \gamma^* \times$$

$$\times {}_2F_2\left[-\frac{1}{2}n + \frac{3}{4}, \frac{1}{2}\left(n + \frac{1}{2}\right); \frac{3}{2}, \frac{1}{2}\left(n + \frac{1}{2}\right) + 1; -(\gamma^*)^2\eta\right]\}, \quad \frac{1}{2} < \eta < \infty,$$

${}_2F_2$ — обобщенная гипергеометрическая функция; $\gamma^* = \gamma k/c_{\parallel}$; $\eta = c_{\parallel}^2 t/k$.

Таким образом, безразмерный КИН для относительно больших времен выражается зависимостью

$$(K_I^d)^* = \frac{1 - v_T^2/(2c_{\perp}^2)}{\sqrt{1 - v_T^2/(2c_{\parallel}^2)}} F(\eta), \quad \frac{1}{2} < \eta < \infty. \quad (10)$$

Рассмотрим поведение КИН при $t \rightarrow \infty$.

Так как при $s \rightarrow 0$ ($t \rightarrow \infty$), $\beta \rightarrow \gamma$ выражение (8) упрощается, то изображение имеет вид

$$\bar{K}_I^d(s) = -2 \frac{1 - v_T^2/(2c_{\perp}^2)}{\sqrt{1 - v_T^2/c_{\parallel}^2}} \mu \frac{1 + \nu}{1 - \nu} \alpha_T \frac{T_1 - T_0}{s} \frac{1}{\sqrt{\gamma}}.$$

Поэтому при $t \rightarrow \infty$ оригинал записывается следующим образом:

$$K_I^d(t) = -\sqrt{2} \mu \frac{1 + \nu}{1 - \nu} \alpha_T (T_1 - T_0) \sqrt{\frac{k}{c_{\parallel}}} \frac{1 - v_T^2/(2c_{\perp}^2)}{\sqrt{1 - v_T^2/c_{\parallel}^2}} \sqrt{\frac{c_{\parallel}}{k}} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\gamma}}, \quad t \rightarrow \infty.$$

В безразмерном виде КИН определяется выражением

$$(K_I^d)^* = \frac{1 - v_T^2/(2c_{\perp}^2)}{\sqrt{1 - v_T^2/c_{\parallel}^2}} \sqrt{\frac{2}{\gamma^*}}, \quad \eta \rightarrow \infty. \quad (11)$$

Из (11) следует, что при $t \rightarrow \infty$ зависимость $(K_I^d)^*(\eta)$ стремится к постоянному значению. Это обусловлено тем, что с течением времени вершина трещины входит в область неразвившихся температурных градиентов, причем чем больше скорость вершины трещины, тем меньше эти градиенты и тем меньше $(K_I^d)^*$.

В случае неподвижной трещины ($\gamma^* = 0$) выражения (6), (10) записываются в виде

$$(K_I^d)^* = \eta^{1/4} \frac{1}{\sqrt{2}} \left[-M\left(\frac{1}{\eta}\right) \right], \quad (12)$$

где функция M определяется из выражений

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left[-M\left(\frac{1}{\eta}\right) \right] = 2 \frac{c_{\parallel}^2}{c_{\perp}^2} \frac{\sqrt[4]{\eta}}{\sqrt{\pi} S_+(0) c_{\parallel}/c_R}, \quad \eta \ll \frac{1}{2}; \quad (13)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left[-M\left(\frac{1}{\eta}\right) \right] = \frac{4}{\pi} \frac{\Gamma(3/4)}{\sqrt{2}}, \quad \eta \gg \frac{1}{2}, \quad (14)$$

$S_+(0) = \sqrt{1 - \nu} c_R/c_{\perp}$ [14, 17].

В случае неподвижной трещины формулы (12)–(14) получены в работе [18] другим методом. Кроме того, в [18] функция $-M(1/\eta)/\sqrt{2}$ для неподвижной трещины определена численно для различных времен; показано, что результаты численного расчета КИН для больших и малых времен совпадают с результатами соответствующего расчета по формулам (12)–(14).

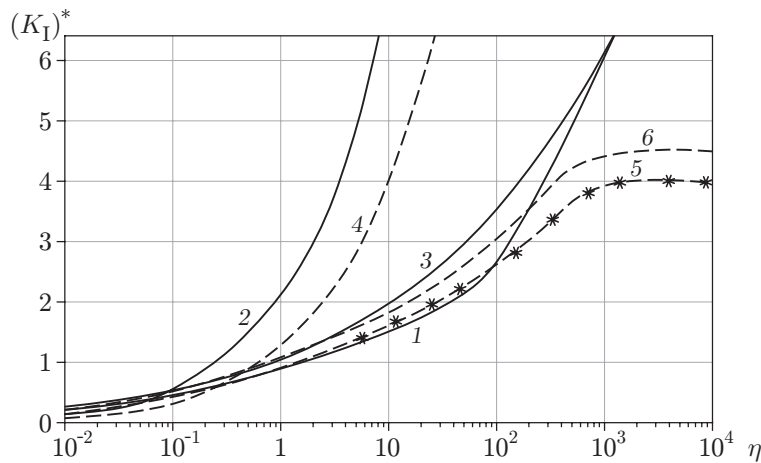


Рис. 1. Зависимость КИН $(K_I)^*$ от времени η для неподвижной ($\gamma^* = 0$) (1–3) и подвижной ($\gamma^* = 0,1$) (4–6) трещин:

1 — динамическое решение, полученное по формуле (12) с использованием результатов численных расчетов [18], 2 — динамическое решение, полученное по формуле (13) для малых времен, 3 — динамическое решение, полученное по формуле (14) для больших времен (квазистатическое решение для любых времен), 4 — динамическое решение, полученное по формуле (6) для малых времен, 5 — динамическое решение, полученное по формуле (10) для больших времен, 6 — квазистатическое решение, полученное по формуле (10) при $c_{\perp} \rightarrow \infty$, $c_{\parallel} \rightarrow \infty$

Квазистатический случай реализуется, если в полученных решениях массу плотность материала пространства положить равной нулю ($c_{\parallel} \rightarrow \infty$, $c_{\perp} \rightarrow \infty$, $c_R \rightarrow \infty$). Тогда асимптотические решения (6), (13) для малых времен справедливы только при $t = 0$, а асимптотические решения (10), (14) для больших времен переходят в соответствующие квазистатические решения, так как в этом случае $\eta \gg 1/2$ на всем интервале $0 < t < \infty$. Этот результат получен также в работе [19] в случае подвижной трещины и в работах [20, 21] в случае неподвижной трещины при исследовании квазистатической задачи.

По формулам (12)–(14) проведен расчет $(K_I)^*$ для оргстекла в зависимости от безразмерного времени η при различных значениях скорости движения трещин γ^* . При $\nu = 0,36$ согласно [22] $c_{\perp}/c_{\parallel} = 0,48$, $c_R/c_{\parallel} = 0,45$.

На рис. 1 приведена зависимость $(K_I)^*$ от безразмерного времени η для покоящейся и движущейся трещин. Как отмечено выше, решение $(K_I)^* = \sqrt{2/\gamma^*}$ при $\eta \rightarrow \infty$ (кривая 6), получено в работе [19]. На рис. 1 видно, что при $\eta \approx 2 \cdot 10^3$ кривая 6 выходит на горизонтальную прямую $(K_I)^* = 4,47$. Аналогично кривая 5 выходит на постоянное значение $(K_I)^* = 4,06$ при $\eta = 2 \cdot 10^3$.

Рассмотрим случай неподвижных трещин, поскольку, во-первых, согласно рис. 1 динамические эффекты проявляются более отчетливо для неподвижных трещин, во-вторых, зависимости $(K_I)^*$ от η для динамического (кривая 1) и квазистатического (кривая 3) случаев известны во всем временном интервале.

3. Оценка связанности в уравнении теплопроводности. Сначала проведем оценку динамических эффектов для рассмотренного выше случая наиболее интенсивного теплообмена между берегами трещины, расположенной в пространстве с начальной температурой T_0 , и средой с температурой T_1 , находящейся в трещине (коэффициент теплообмена $\alpha \rightarrow \infty$).

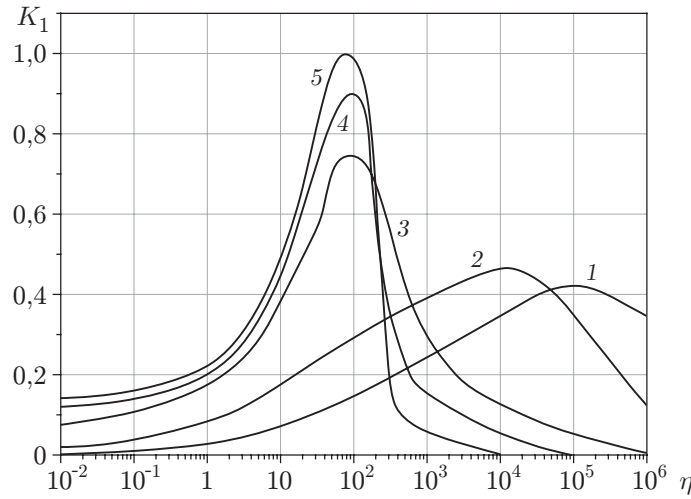


Рис. 2. Зависимость относительного изменения КИН K_1 , характеризующего инерционные эффекты, от времени η при различных значениях H :

1 — $H = 0,1$, 2 — $H = 0,5$, 3 — $H = 5,0$, 4 — $H = 15,0$, 5 — $H = \infty$

Введем относительное изменение КИН

$$K_{\infty}(\eta) = [(K_I^{st})^*(\eta) - (K_I^d)^*(\eta)]_{\infty} / [(K_I^{st})^* - (K_I^d)]_{\infty}^{\max}.$$

Здесь значения $(K_I^{st})^*(\eta)$ и $(K_I^d)^*(\eta)$ соответствуют зависимостям, приведенным на рис. 1; $[(K_I^{st})^* - (K_I^d)^*]_{\infty}^{\max}$ — максимальная во времени разность $(K_I^{st})^*(\eta)$ и $(K_I^d)^*(\eta)$ в случае мгновенного достижения на берегах трещины температуры, равной температуре T_1 окружающей среды. На рис. 2 зависимость $K_{\infty}(\eta)$ ($H = \alpha k / (\lambda_T c_{||}) \rightarrow \infty$) показана кривой 5.

Ниже исследуются две задачи о тепловом воздействии на берега трещины. В первой задаче рассматривается теплообмен с конечным коэффициентом α между берегами трещины и средой с температурой T_1 и определяется безразмерная температура $\theta_1(\eta) = [T_1(0, \eta) - T_0] / (T_1 - T_0)$ в зависимости от времени η при различных значениях H . Построены зависимости $\theta_1(\eta)$ при $H = \infty$; 15,0; 5,0; 0,5; 0,1. При $H = \infty$ и $\eta = 0$ $\theta_1(\eta)$ мгновенно изменяется от 0 до 1.

Во второй задаче для имеющего начальную температуру T_0 пространства с полубесконечной трещиной температура $T_2(0, \eta)$ на берегах этой трещины изменяется со временем по линейному закону от значения T_0 до значения, равного температуре среды T_1 , за малый промежуток времени t_0 и далее не изменяется, что соответствует реальным условиям теплового воздействия. Построены зависимости $\theta_2(\eta) = [T_2(0, \eta) - T_0] / (T_1 - T_0)$ для различных временных интервалов линейного изменения температуры на берегах трещины $\eta_0 = c_{||}^2 t_0 / k = 0$; 10^2 ; $5 \cdot 10^2$; 10^3 ; $2 \cdot 10^3$. При $\eta_0 = 0$ $\theta_2(\eta)$ мгновенно изменяется от 0 до 1.

Случаи $H \rightarrow \infty$ в первой задаче и $\eta_0 = 0$ во второй задаче одинаковы, поэтому зависимость $K_{\infty}(\eta)$ соответствует второй задаче для $\eta_0 = 0$ (кривая 1 на рис. 3).

Для реальных условий теплового воздействия на берега трещины в первой ($H < \infty$) и второй ($\eta_0 > 0$) задачах для определения относительной погрешности $K_{1,2}(\eta)$, которая возникает в том случае, если динамическую задачу термоупругости рассматривать как квазистатическую, необходимо использовать теорему Дюамеля, аппроксимируя $\theta_{1,2}(\eta)$ ступенчатыми функциями.

На рис. 2, 3 приведены зависимости $K_1(\eta)$ (задача 1) при различных значениях интенсивности теплообмена H и зависимости $K_2(\eta)$ (задача 2) для различных временных интервалов линейного изменения температуры на берегах трещины η_0 .

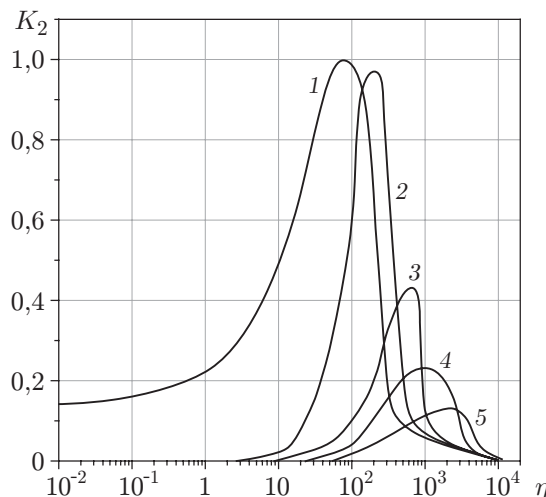


Рис. 3. Зависимость относительного изменения КИН K_2 , характеризующего инерционные эффекты, от времени η при различных значениях η_0 :

1 — $\eta_0 = 0$, 2 — $\eta_0 = 10^2$, 3 — $\eta_0 = 5 \cdot 10^2$, 4 — $\eta_0 = 10^3$, 5 — $\eta_0 = 2 \cdot 10^3$

Из рис. 2 следует, что по мере уменьшения интенсивности теплообмена H относительная разность КИН K_1 с учетом и без учета инерционных эффектов уменьшается, что обусловлено уменьшением градиентов температуры вблизи берегов трещины. Наибольшее реальное значение коэффициента теплообмена равно $\alpha = 5,8 \cdot 10^6$ Дж/(м²·с·К) [1], а наибольшие реальные значения H равны $1,28 \cdot 10^{-3}$ для оргстекла и $0,48 \cdot 10^{-3}$ для стекла, т. е. эти значения пренебрежимо малы.

Данный вывод справедлив также для второй задачи, в которой температура на берегах трещины на некотором начальном временном интервале η_0 изменяется по линейному закону от T_0 до T_1 . На рис. 3 видно, что по мере увеличения линейного участка η_0 относительная разность КИН K_2 с учетом и без учета инерционных эффектов уменьшается. В частности, при значении $\eta_0 = 2 \cdot 10^3$, соответствующем нереально малым временным интервалам линейного изменения температуры на берегах трещины $t_0 = 2,34 \cdot 10^{-11}$ с для стекла и $t_0 = 3,11 \cdot 10^{-11}$ с для оргстекла, максимальное значение K_2 составляет приблизительно 14 % максимального значения K_∞ при $\eta_0 = 0$, т. е. влияние инерционных эффектов незначительно.

На основе рассмотренных задач динамической термоупругости можно сделать вывод, что задачи термоупругости для оргстекла и стекла ($\Delta \ll 1$) при наличии внешнего теплообмена, которые встречаются на практике, можно рассматривать как квазистатические, а значит, и как несвязанные.

Заключение. В работе для оргстекла, температура которого меньше температуры стеклования $T_g = 363$ К, и для стекла, температура которого значительно меньше $T_g = 770$ К, рассматривается несвязанная динамическая задача термоупругости для пространства с полубесконечной плоской движущейся трещиной. В диапазоне температур $360 \div 273$ К для оргстекла и $450 \div 273$ К для стекла термомеханические постоянные осреднялись и полагались не зависящими от времени. Повышенная температура оргстекла в начальные моменты времени частично компенсируется большой скоростью охлаждения.

На берегах трещины моделировалось реальное тепловое воздействие. Показано, что в этом случае динамическими эффектами для оргстекла и стекла можно пренебречь, а значит, для этих материалов ($\Delta \ll 1$) можно пренебречь также связанностью в уравнении

теплопроводности. В этих случаях задача теплопроводности рассматривается независимо от механической, что позволяет значительно упростить решение задачи термоупругости.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Боли Б.** Теория температурных напряжений / Б. Боли, Дж. Уэйнер. М.: Мир, 1964.
2. **Христич Д. В., Астапов Ю. В.** Учет взаимного влияния полей напряжений, деформаций и температур при решении задач Ламе // Изв. Тул. гос. ун-та. Естеств. науки. 2015. Вып. 1. С. 67–73.
3. **Князева А. Г., Парфенова Е. С.** Нелинейная связанная модель обработки поверхности потоком частиц с учетом формирования новой фазы // ПМТФ. 2021. Т. 62, № 4. С. 124–133.
4. **Шанин С. А., Князева А. Г.** Связанная модель формирования покрытия на подложке цилиндрической формы // ПМТФ. 2014. Т. 55, № 3. С. 192–204.
5. **Шляхтин Д. А., Даулетмуратова (Кусаева) Ж. М.** Нестационарная связанная осесимметричная задача термоупругости для жестко закрепленной круглой пластины // Вестн. Перм. нац. исслед. политехн. ун-та. Механика. 2019. № 4. С. 192–200.
6. **Шляхтин Д. А., Кусаева Ж. М.** Решение связанной нестационарной задачи термоупругости для жестко закрепленной многослойной круглой пластины методом конечных интегральных преобразований // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2021. Т. 25, № 2. С. 320–342.
7. **Кусаева Ж. М.** Исследование связанных нестационарных термоупругих полей в однослойных и многослойных круглых пластинах: Автореф. дис. ... канд. техн. наук. Самара: Сам. гос. техн. ун-т, 2021.
8. **Canadija M.** Thermomechanics of solids and structures: Physical mechanisms, continuum mechanics, and applications. S. l.: Elsevier, 2023.
9. **Carrera E.** Thermal stress analysis of composite beams, plates and shells: Computational modelling and applications / E. Carrera, F. Fazzolari. S. l.: Acad. Press, 2016.
10. **Жорник А. И., Киричек В. А.** Динамическая задача термоупругости для пространства с движущейся полубесконечной трещиной // Тепловые процессы в технике. 2017. Т. 9, № 10. С. 463–471.
11. **Жорник А. И., Киричек В. А.** Динамическая задача о полубесконечной трещине, движущейся в упругом пространстве // ПМТФ. 2018. Т. 59, № 2. С. 209–217.
12. **Градштейн А. П.** Таблицы интегралов сумм, рядов и произведений / А. П. Градштейн, И. М. Рыжик. М.: Физматгиз, 1962.
13. **Прудников А. П.** Интегралы и ряды. Элементарные функции / А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев. М.: Наука, 1981.
14. **Freund L. B.** The stress intensity factor due to normal impact loading of the faces of a crack // Intern. J. Engng Sci. 1974. V. 12, N 2. P. 179–189.
15. **Бейтмен Г.** Таблицы интегральных преобразований. Т. 1 / Г. Бейтмен, А. Эрдейи. М.: Наука, 1969.
16. **Прудников А. П.** Интегралы и ряды. Специальные функции / А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев. М.: Наука, 1983.
17. **Freund L. B.** Crack propagation in an elastic solid subjected to general loading. 3. Stress wave loading // J. Mech. Phys. Solids. 1973. V. 21. P. 47–61.
18. **Козлов В. А., Мазья В. Г., Партон В. З.** О тепловом ударе в области с трещиной // Прикл. математика и механика. 1988. Т. 52, вып. 2. С. 318–326.

19. **Салганик Р. Л., Чертков В. Я.** О понижении прочности под действием усадочных напряжений // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1969. № 3. С. 126–133.
20. **Козлов В. А., Мазья В. Г., Партон В. З.** Асимптотика коэффициентов интенсивности напряжений в квазистатических температурных задачах для области с разрезами // Прикл. математика и механика. 1985. Т. 49, вып. 4. С. 627–636.
21. **Побережный О. В., Гайвась И. В.** Влияние нестационарного температурного поля и теплоотдачи пластины на коэффициенты интенсивности напряжений // Прикл. механика. 1982. Т. 28, № 6. С. 124–127.
22. **Новацкий В.** Теория упругости. М.: Мир, 1975.

*Поступила в редакцию 24/IV 2023 г.,
после доработки — 21/VI 2023 г.
Принята к публикации 4/VIII 2023 г.*
