УДК 532.62

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО ТЕЧЕНИЯ НЕНЬЮТОНОВСКОЙ ЖИДКОСТИ НА НЕСТАЦИОНАРНО РАСТЯГИВАЕМОЙ ПЛАСТИНЕ С УЧЕТОМ ВЯЗКОСТНОЙ ДИССИПАЦИИ

М. Н. Туфайл[*,**], А. С. Бат[*], А. Али[*,***]

[*] Университет Куэд-и-Азам, 44000 Исламабад, Пакистан
[**] Университет менеджмента и технологий, 51310 Сиялкот, Пакистан
[***] Университет принца Мухаммада Бин Фахда, 31952 Эль Хобар, Саудовская Аравия
E-mails: nazimtufail@gmail.com, adnansaeedbutt85@gmail.com, dr_asif_ali@hotmail.com

Проведено исследование теплопереноса в магнитогидродинамическом течении жидкости Кэссона на нестационарно растягиваемой пластине с учетом вязкостной диссипации. С использованием безразмерных переменных дифференциальные уравнения в частных производных преобразованы в обыкновенные дифференциальные уравнения, которые решаются методом гомотопического анализа. Получены зависимости характеристик течения от различных параметров уравнений.

Ключевые слова: неньютоновская жидкость, магнитогидродинамическое течение, вязкостная диссипация, теплоперенос.

DOI: 10.15372/PMTF20160518

Введение. Исследованию течений в пограничных слоях ньютоновской и неньютоновской жидкостей на растягиваемых поверхностях уделяется большое внимание, что обусловлено применением данных течений в производственных процессах. Течение в пограничном слое на движущейся твердой поверхности представляет собой важный тип течений, используемых при экструзии и термической обработке материалов. Исследование течений на растягиваемых пластинах было начато в работе [1], в которой получено автомодельное решение для потока вязкой жидкости в случае линейного закона растяжения поверхности. В [2] изучен тепломассоперенос в потоке жидкости, текущем через растягиваемую проницаемую пластину. Магнитогидродинамический (МГД) поток и теплоперенос в вязкой жидкости, текущей через растягиваемую пластину, проанализированы в работе [3]. В [4] изучен теплоперенос в случае степенного закона изменения температуры. Вязкостная и джоулева диссипация в МГД-потоке, а также тепломассоперенос в случае растягиваемой проницаемой поверхности, помещенной в пористую среду, рассматривались в [5]. Известно, что большинство существующих в природе жидкостей являются неньютоновскими (биожидкости, жир, покрытия из глины и ее взвеси, косметические продукты и др.). Для описания динамики неньютоновских жидкостей предложено большое количество моделей. В работе [6] исследованы течение на растягиваемой пластине и характеристики теплопереноса в жидкости второго порядка. В [7] изучены магнитогидродинамика и тепломассоперенос в потоке неньютоновской жидкости на растягиваемой поверхности. В [8] рассмотрены течение и теплоперенос в электропроводящей жидкости второго порядка в пористой среде на растягиваемой поверхности при наличии поперечного магнитного поля. В работе [9] с помощью метода конечных элементов исследован пульсирующий поток неньютоновской жидкости Кэссона в пористой среде, для которой не выполняется закон фильтрации Дарси. Процесс теплопереноса в МГД-потоке жидкости, удовлетворяющей степенному закону для вязкости, на неизотермической растягиваемой поверхности изучался в [10]. В [11] решена задача об МГД-потоке и теплопереносе в неньютоновской жидкой пленке по нестационарно растягиваемой поверхности. В работе [12] с использованием метода гомотопического анализа (МГА) изучалось свободно-конвективное МГД-течение на растягиваемой пластине с учетом эффекта Холла. Трехмерный поток жидкости второго порядка во вращающемся канале с растягиваемой нижней стенкой рассмотрен в [13]. В [14] проведен анализ осесимметричного потока жидкости Сиско на радиально растягиваемой пластине. В работе [15] методом численного анализа изучались течение и теплоперенос в тонкой пленке жидкости Пауэлла — Эйринга на нестационарно растягиваемой пластине с учетом внутреннего выделения тепла. Влияние вязкоупругих свойств материала на энтропию течения на растягиваемой поверхности через пористую среду исследовано в [16]. В работе [17] проведен анализ течения в пограничном слое жидкости Сиско по растягиваемой поверхности и с использованием МГА получено аналитическое решение. В [18] рассмотрен процесс теплопереноса в микрополярной жидкости, текущей на растягиваемой пластине, с учетом подвода тепла на поверхности пластины. В [19] исследовано течение жидкости Максвелла на нестационарно растягиваемой проницаемой поверхности, находящейся в пористой среде, с учетом теплового излучения.

В настоящей работе изучаются МГД-течение и теплоперенос в потоке жидкости Кэссона на нестационарно растягиваемой пластине с учетом вязкостной диссипации.

1. Математическое моделирование задачи. Рассмотрим нестационарное двумерное ламинарное течение несжимаемой жидкости Кэссона на растягиваемой пластине. Жидкость Кэссона имеет предел текучести и, в случае если сдвиговые напряжения не превышают его, движется как твердое тело. Пластина расположена в плоскости $y = 0$, жидкость движется в верхней полуплоскости $y > 0$. Ось x направлена вдоль пластины, ось y — перпендикулярно ей. Вдоль оси y к обоим концам пластины приложены противоположно направленные равные силы, так чтобы поверхность растягивалась, при этом начало координат фиксировано. Параллельно оси y приложено магнитное поле с индукцией B_0. Жидкость является проводящей, магнитное число Рейнольдса мало, поэтому индуцированным магнитным полем можно пренебречь. Также предполагается, что электрическое поле отсутствует. Следуя [20], для описания жидкости будем использовать модифицированную реологическую модель Кэссона. Реологическое уравнение состояния для изотропного несжимаемого течения жидкости Кэссона имеет вид

$$\tau_{ij} = \begin{cases} 2(\mu_B + p_y/\sqrt{2\pi})e_{ij}, & \pi > \pi_c, \\ 2(\mu_B + p_y/\sqrt{2\pi_c})e_{ij}, & \pi < \pi_c, \end{cases} \tag{1}$$

где $\pi = e_{ij}e_{ij}$; e_{ij} — компонента тензора скоростей деформации; π_c — критическое значение π; μ_B — пластическая вязкость жидкости; p_y — предел текучести. Используя (1), законы сохранения массы, количества движения и уравнение теплопереноса, получаем уравнения для пограничного слоя

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\,\frac{\partial u}{\partial x} + v\,\frac{\partial u}{\partial y} = \nu\Big(1 + \frac{1}{\beta}\Big)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\sigma B^2(t)}{\rho}\,u, \tag{2}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u\,\frac{\partial T}{\partial x} + v\,\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{k}{\rho c_p}\,\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\nu}{c_p}\Big(1 + \frac{1}{\beta}\Big)\Big(\frac{\partial u}{\partial y}\Big)^2$$

с граничными условиями

$$y = 0: \qquad u(t,x,y) = U_m(t,x), \quad v(t,x,y) = 0, \quad -k\,\frac{\partial T(t,x,y)}{\partial y} = h(T_f - T),$$

$$y \to \infty: \qquad u(t,x,y) \to 0, \quad T(t,x,y) \to 0,$$

где

$$B(t) = \frac{B_0}{\sqrt{1-ct}}, \qquad U_m(t,x) = \frac{ax}{1-ct}, \qquad T_f(t,\,x) = T_\infty + \frac{ex}{1-ct},$$

$\nu = \mu/\rho$ — кинематическая вязкость; μ — постоянная вязкость; ρ — плотность жидкости; $\beta = \mu_B\sqrt{2\pi_c}/p_y$ — параметр модели Кэссона; σ — электрическая проводимость жидкости; c_p — теплоемкость при постоянном давлении; k — теплопроводность; T, T_∞ — температура жидкости и окружающей среды соответственно; T_f — температура стенки; u, v — компоненты скорости вдоль осей x, y соответственно; a — параметр растяжения; e — температурный параметр; c — константа.

Вводя переменные

$$u(t,x,y) = \frac{ax}{1-ct}\,f'(\eta), \qquad v(t,x,y) = -\sqrt{\frac{a\nu}{1-ct}}\,f(\eta),$$
$$T(t,x,y) = T_\infty + (T_f - T_\infty)\theta(\eta), \qquad \eta = \sqrt{\frac{a}{\nu(1-ct)}}\,y, \tag{3}$$

из системы уравнений (2) получаем

$$\Big(1 + \frac{1}{\beta}\Big)f''' + ff'' - f'^2 - A\Big(f' + \frac{1}{2}\,\eta f''\Big) - Mf' = 0; \tag{4}$$

$$\theta'' - \Pr A\Big(\theta + \frac{1}{2}\,\eta\theta'\Big) - \Pr\,(f'\theta - f\theta') + \Big(1 + \frac{1}{\beta}\Big)\Pr\mathrm{Ec}\,f''^2 = 0. \tag{5}$$

Граничные условия для уравнений (4), (5) имеют вид

$$f(0) = 0, \qquad f'(0) = 1, \qquad f'(\infty) = 0,$$
$$\theta'(0) = -\gamma(1 - \theta(0)), \qquad \theta(\infty) = 0. \tag{6}$$

В (4)–(6) $A = c/a$ — параметр нестационарности; $\Pr = c_p\mu/k$ — число Прандтля; $M = \sigma B_0^2/(a\rho)$ — параметр магнитного поля; $\mathrm{Ec} = U_w^2/[c_p(T_f - T_\infty)]$ — число Эккерта; $\gamma = (h/k)\sqrt{\nu(1-ct)/a}$ — число Био. Коэффициент поверхностного трения и локальное число Нуссельта определяются по формулам

$$C_f = \frac{\mu_B + p_y/\sqrt{2\pi_c}}{\rho U_w^2}\,\Big(\frac{\partial u}{\partial y}\Big)\Big|_{y=0}, \qquad \mathrm{Nu}_x = \frac{x}{T_f - T_\infty}\,\Big(\frac{\partial T}{\partial y}\Big)\Big|_{y=0}. \tag{7}$$

Используя (3), (7), получаем выражения для коэффициента поверхностного трения и числа Нуссельта в безразмерном виде

$$\mathrm{Re}_x^{1/2}\,C_f = -(1 + 1/\beta)f''(0), \qquad \mathrm{Re}_x^{-1/2}\,\mathrm{Nu}_x = -\theta'(0).$$

2. Решение задачи. Для решения нелинейных уравнений (4), (5) с граничными условиями (6) используется МГА. В соответствии с постановкой задачи вводятся вспомогательные линейные операторы

$$L_f = \frac{d^3 f}{d\eta^3} - \frac{df}{d\eta}, \qquad L_\theta = \frac{d^2\theta}{d\eta^2} + \frac{d\theta}{d\eta}$$

и начальные условия для функций $f(\eta)$ и $\theta(\eta)$:

$$f_0(\eta) = 1 - \mathrm{e}^{-\eta}, \qquad \theta_0(\eta) = \frac{\gamma}{\gamma+1}\,\mathrm{e}^{-\eta}\,.$$

Задачи о деформации нулевого порядка формулируются следующим образом:

$$(1-p)L_f[\hat f(\eta;p) - f_0(\eta)] = p h_f N_f[\hat f(\eta;p)],$$
$$(1-p)L_\theta[\hat\theta(\eta;p) - \theta_0(\eta)] = p h_\theta N_\theta[\hat f(\eta;p), \hat\theta(\eta;p)],$$
$$\hat f(0;p) = 0, \qquad \hat f'(0;p) = 1, \qquad \hat f'(\infty;p) = 0,$$
$$\hat\theta'(0;p) = -\gamma[1 - \hat\theta(0;p)], \qquad \hat\theta(\infty;p) = 0.$$

Здесь h_f, h_θ — ненулевые вспомогательные параметры; $p \in [0,1]$ — внутренний параметр; N_f, N_θ — нелинейные операторы:

$$N_f[\hat f(\eta;p)] = \Big(1+\frac{1}{\beta}\Big)\frac{\partial^3 \hat f(\eta;p)}{\partial\eta^3} + \hat f(\eta;p)\,\frac{\partial^2 \hat f(\eta;p)}{\partial\eta^2} - \Big(\frac{\partial \hat f(\eta;p)}{\partial\eta}\Big)^2 -$$
$$- M\,\frac{\partial \hat f(\eta;p)}{\partial\eta} - A\Big(\frac{\partial \hat f(\eta;p)}{\partial\eta} + \frac{1}{2}\,\eta\,\frac{\partial^2 \hat f(\eta;p)}{\partial\eta^2}\Big),$$

$$N_\theta[\hat\theta(\eta;p), \hat f(\eta;p)] = \frac{\partial^2\hat\theta(\eta;p)}{\partial\eta^2} - \Pr\Big(\hat\theta(\eta;p)\,\frac{\partial \hat f(\eta;p)}{\partial\eta} - \hat f(\eta;p)\,\frac{\partial\hat\theta(\eta;p)}{\partial\eta}\Big) -$$
$$- \Pr A\Big(\hat\theta(\eta;p) + \frac{1}{2}\,\eta\,\frac{\partial\hat\theta(\eta;p)}{\partial\eta}\Big) + \Big(1+\frac{1}{\beta}\Big)\Pr\mathrm{Ec}\,\Big(\frac{\partial^2 \hat f(\eta;p)}{\partial\eta^2}\Big)^2.$$

Задачи о деформации m-го порядка имеют вид

$$L_f[f_m(\eta) - \chi_m f_{m-1}(\eta)] = h_f R_m^f(\eta), \qquad L_\theta[\theta_m(\eta) - \chi_m\theta_{m-1}(\eta)] = h_\theta R_m^\theta(\eta),$$

где

$$R_m^f(\eta) = \Big(1+\frac{1}{\beta}\Big)\frac{\partial^3 f_{m-1}}{\partial\eta^3} + \sum_{k=0}^{m-1}\Big(f_{m-1-k}\,\frac{\partial^2 f_k}{\partial\eta^2} - \frac{\partial f_{m-1-k}}{\partial\eta}\,\frac{\partial f_k}{\partial\eta}\Big) -$$
$$- A\Big(\frac{\partial f_{m-1}}{\partial\eta} + \frac{1}{2}\,\eta\,\frac{\partial^2 f_{m-1}}{\partial\eta^2}\Big) - M\,\frac{\partial f_{m-1}}{\partial\eta},$$

$$R_m^\theta(\eta) = \frac{\partial^2\theta_{m-1}}{\partial\eta^2} + \Pr\sum_{k=0}^{m-1}\Big(f_{m-1-k}\,\frac{\partial\theta_k}{\partial\eta} - \theta_{m-1-k}\,\frac{\partial f_k}{\partial\eta}\Big) -$$
$$- A\Pr\Big(\theta_{m-1} + \frac{1}{2}\,\eta\,\frac{\partial\theta_{m-1}}{\partial\eta}\Big) + \Big(1+\frac{1}{\beta}\Big)\Pr\mathrm{Ec}\sum_{k=0}^{m-1}\Big(\frac{\partial^2 f_{m-1-k}}{\partial\eta^2}\,\frac{\partial^2 f_k}{\partial\eta^2}\Big),$$

$$\chi_m = \begin{cases} 0, & m \leqslant 1, \\ 1, & m > 1. \end{cases}$$

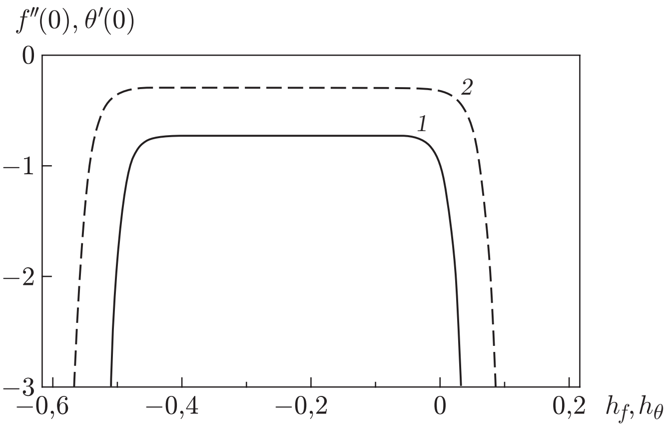

Рис. 1. h-кривые для функций $f''(0)$ (*1*) и $\theta'(0)$ (*2*) при $\mathrm{Ec} = 0{,}2$, $\mathrm{Pr} = 1$, $\beta = 0{,}3$, $M = 1$, $A = 0{,}5$, $\gamma = 0{,}5$ и порядке аппроксимации решения, равном 15

Решения уравнений (4), (5) с граничными условиями (6), полученные с помощью МГА, можно записать в виде рядов

$$f(\eta) = \sum_{m=0}^{\infty} f_m(\eta), \qquad \theta(\eta) = \sum_{m=0}^{\infty} \theta_m(\eta). \tag{8}$$

Следует отметить, что ряды (8) содержат вспомогательные параметры h_f и h_θ, обеспечивающие их сходимость. Для определения допустимых диапазонов значений h_f и h_θ построены так называемые h-кривые 15-го порядка аппроксимации. На рис. 1 показаны h-кривые для функций $f''(0)$, $\theta'(0)$. Видно, что допустимые значения h_f и h_θ находятся в диапазонах $-0{,}7 < h_f < 0$ и $-0{,}7 < h_\theta < 0$. Заметим, что ряд для значения $f''(0)$ сходится с точностью до шестого знака при аппроксимации выше 12-го порядка, а ряд для значения $\theta'(0)$ — при аппроксимации выше 30-го порядка.

3. Обсуждение результатов. Система обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений (4), (5) с граничными условиями (6) решалась численно методом Рунге — Кутты четвертого и пятого порядков с использованием метода пристрелки. На рис. 2–4 показано влияние различных параметров на скорость. На рис. 2 видно, что при $\eta > 4{,}2$ с увеличением параметра нестационарности A скорость увеличивается. На рис. 3 показано влияние параметра магнитного поля M на скорость $f'(\eta)$. Видно, что с увеличением M скорость уменьшается. Это обусловлено тем, что при наличии внешнего магнитного поля в электропроводной жидкости возникает сила Лоренца, замедляющая движение жидкости. На рис. 4 показано влияние параметра жидкости Кэссона β на скорость. Видно, что с увеличением β скорость уменьшается. Влияние различных параметров задачи на температуру $\theta(\eta)$ показано на рис. 5–9. Из рис. 5 следует, что с увеличением параметра нестационарности A толщина теплового пограничного слоя уменьшается. С увеличением параметра магнитного поля M температура $\theta(\eta)$ увеличивается (см. рис. 6). Из рис. 7 следует, что с увеличением параметра жидкости Кэссона β температура $\theta(\eta)$ уменьшается. Из рис. 8, 9 следует, что при увеличении числа Эккерта Ec и числа Био γ температура в пограничном слое $\theta(\eta)$ увеличивается.

4. Выводы. В работе исследовано МГД-течение жидкости Кэссона на нестационарно растягиваемой поверхности с учетом вязкой диссипации. Дифференциальные уравнения в частных производных преобразованы в обыкновенные дифференциальные уравнения. Для решения полученной системы уравнений использовался метод гомотопического анализа. Проведенное исследование позволяет сделать следующие выводы.

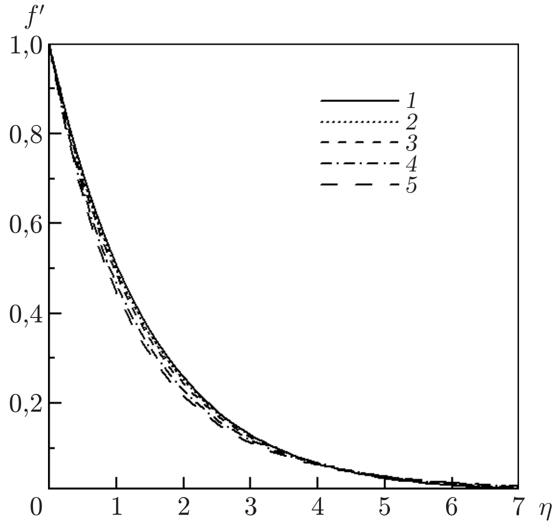

Рис. 2

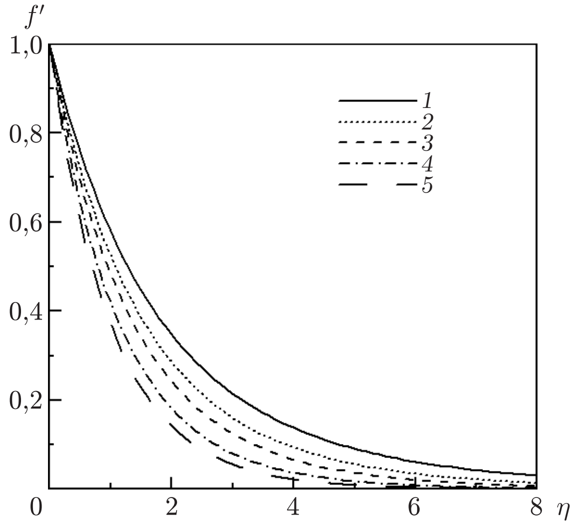

Рис. 3

Рис. 2. Зависимость $f'(\eta)$ при различных значениях параметра нестационарности A:
1 — $A = 0$, *2* — $A = 0{,}2$, *3* — $A = 0{,}5$, *4* — $A = 1{,}0$, *5* — $A = 1{,}5$

Рис. 3. Зависимость $f'(\eta)$ при различных значениях параметра магнитного поля M:
1 — $M = 0$, *2* — $M = 0{,}5$, *3* — $M = 1{,}0$, *4* — $M = 2{,}0$, *5* — $M = 3{,}0$

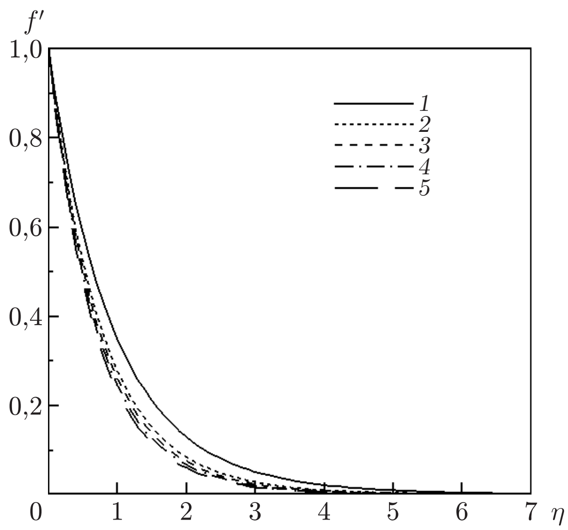

Рис. 4

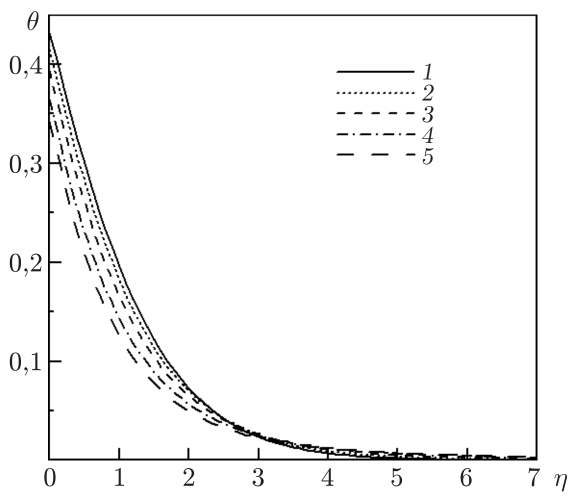

Рис. 5

Рис. 4. Зависимость $f'(\eta)$ при различных значениях параметра жидкости Кэссона β:
1 — $\beta = 1$, *2* — $\beta = 3$, *3* — $\beta = 5$, *4* — $\beta = 10$, *5* — $\beta = 10^8$

Рис. 5. Зависимость $\theta(\eta)$ при различных значениях параметра нестационарности A:
1 — $A = 0$, *2* — $A = 0{,}2$, *3* — $A = 0{,}5$, *4* — $A = 1{,}0$, *5* — $A = 1{,}5$

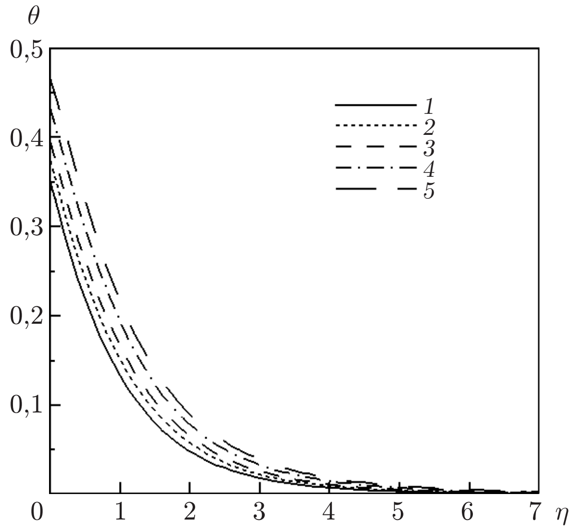

Рис. 6. Зависимость $\theta(\eta)$ при различных значениях параметра магнитного поля M:
1 — $M = 0$, *2* — $M = 0{,}5$, *3* — $M = 1{,}0$, *4* — $M = 2{,}0$, *5* — $M = 3{,}0$

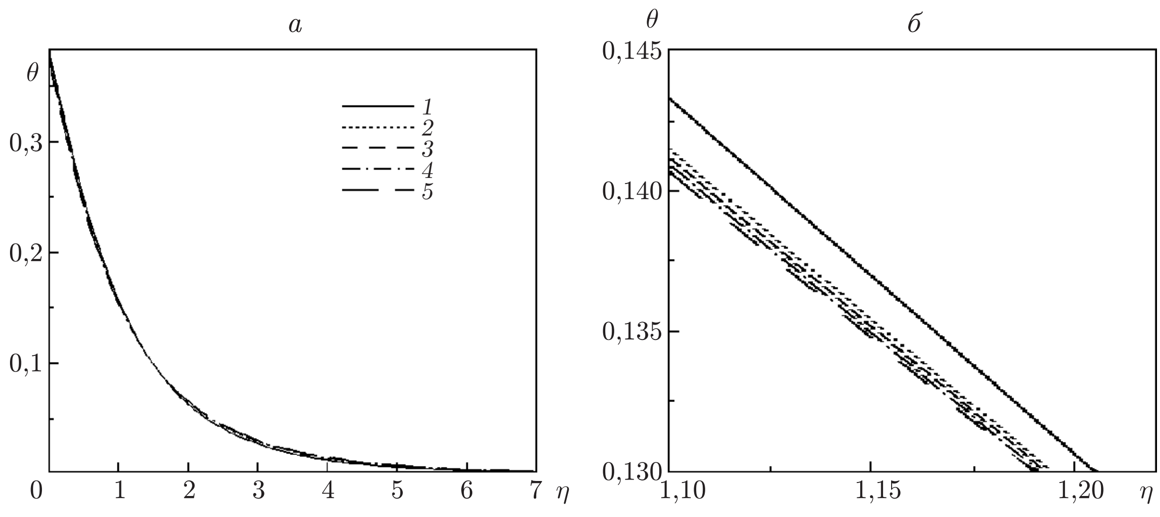

Рис. 7. Зависимость $\theta(\eta)$ при различных значениях параметра жидкости Кэссона β:
а — $0 < \eta < 7$, *б* — $1{,}1 < \eta < 1{,}3$; *1* — $\beta = 1$, *2* — $\beta = 3$, *3* — $\beta = 5$, *4* — $\beta = 10$, *5* — $\beta = 10^8$

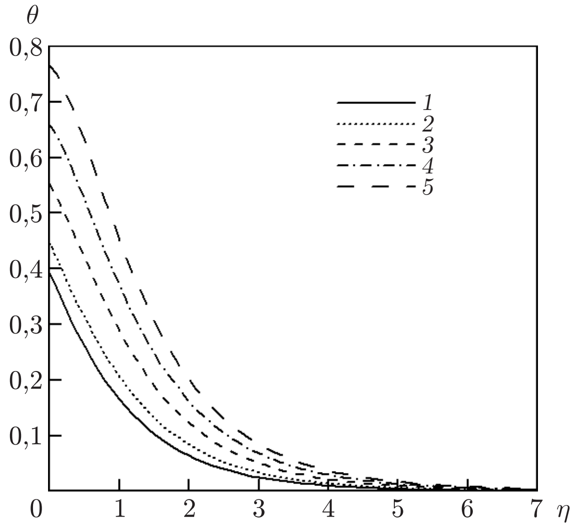

Рис. 8

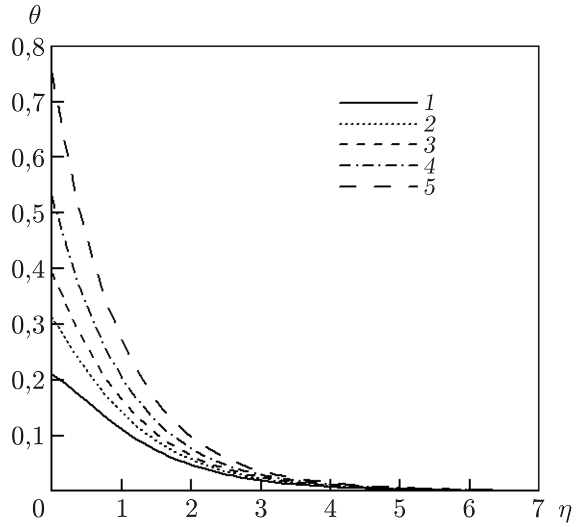

Рис. 9

Рис. 8. Зависимость $\theta(\eta)$ при различных значениях числа Эккерта Ec:
1 — Ec = 0,2, *2* — Ec = 0,3, *3* — Ec = 0,5, *4* — Ec = 0,7, *5* — Ec = 0,9

Рис. 9. Зависимость $\theta(\eta)$ при различных значениях числа Био γ:
1 — $\gamma = 0{,}1$, *2* — $\gamma = 0{,}3$, *3* — $\gamma = 0{,}5$, *4* — $\gamma = 1{,}0$, *5* — $\gamma = 3{,}0$

При увеличении параметра исследуемой жидкости β скорость и температура уменьшаются, при увеличении параметра магнитного поля M скорость уменьшается, а температура увеличивается.

При увеличении параметра нестационарности A вблизи пластины скорость и температура уменьшаются, а по мере удаления от нее — увеличиваются.

С увеличением чисел Эккерта Ec и Био γ температура увеличивается.

С увеличением параметров A и M поверхностное трение увеличивается, а с увеличением параметра β — уменьшается.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Crane L. J.** Flow past a stretching sheet // Z. angew. Math. Phys. 1970. Bd 21. S. 645–647.
2. **Gupta P. S., Gupta A. S.** Heat and mass transfer on a stretching sheet with suction or blowing // Canad. J. Chem. Engng. 1977. V. 55. P. 744–746.
3. **Chakrabarti A., Gupta A. S.** Hydromagnetic flow and heat transfer over a stretching sheet // Quart. Appl. Math. 1979. V. 37. P. 73–78.
4. **Grubka L. J., Bobba K. M.** Heat transfer characteristics of a continuous, stretching surface with variable temperature // J. Heat Transfer. 1985. V. 107. P. 248–250.
5. **Anjali Devi S. P., Ganga B.** Effects of viscous and Joules dissipation on MHD flow, heat and mass transfer past a stretching porous surface embedded in a porous medium // Nonlinear Anal., Model. Control. 2009. V. 14, N 3. P. 303–314.
6. **Vajravelu K., Roper T.** Flow and heat transfer in a second grade fluid over a stretching sheet // Intern. J. Non-Linear Mech. 1999. V. 34, N 6. P. 1031–1036.
7. **Abel S., Veena P. H., Rajgopal K., et al.** Non-Newtonian magnetohydrodynamic flow over a stretching surface with heat and mass transfer // Intern. J. Non-Linear Mech. 2004. V. 39. P. 1067–1078.

8. **Chung Liu I.** Flow and heat transfer of an electrically conducting fluid of second grade in a porous medium over a stretching sheet subject to a transverse magnetic field // Intern. J. Non-Linear Mech. 2005. V. 40. P. 465–474.
9. **Bhargava R., Takhar H. S., Kawat S.** Finite element solutions for non-Newtonian pulsatile flow in a non Darcian porous medium conduit // Nonlinear Anal. 2007. V. 12, N 3. P. 317–327.
10. **Parasad K. V., Vajravelu K.** Heat transfer in the MHD flow of a power law fluid over a non-isothermal stretching sheet // Intern. J. Heat Mass Transfer. 2009. V. 52. P. 4956–4965.
11. **Mahmoud M. A. A., Megahed A. M.** MHD flow and heat transfer in a non-Newtonian liquid film over an unsteady sheet with variable fluid properties // Canad. J. Phys. 2009. V. 87, N 10. P. 1065–1071.
12. **Tabaei H., Moghimi M. A., Kimiaeifar A., Moghimi M. A.** Homotopy analysis and differential quadrature solution of the problem of free-convective magnetohydrodynamic flow over a stretching sheet with the Hall effect and mass transfer taken into account // J. Appl. Mech. Tech. Phys. 2011. V. 52, N 4. P. 624–636.
13. **Hussnain S., Mehmood A., Ali A.** Three-dimensional channel flow of second grade fluid in rotating frame // Appl. Math. Mech. (English Ed.) 2012. V. 33, N 3. P. 289–302.
14. **Khan M., Shahzad A.** On axisymmetric flow of Sisko fluid over a radially stretching sheet // Intern. J. Non-Linear Mech. 2012. V. 47. P. 999–1007.
15. **Khader M. M., Megahed A. M.** Numerical studies for flow and heat transfer of the Powell — Eyring fluid thin film over an unsteady stretching sheet with internal heat generation using the Chebyshev finite difference method // J. Appl. Mech. Tech. Phys. 2013. V. 54, N 3. P. 440–450.
16. **Butt A. S., Munawar S., Ali A., Mehmood A.** Effect of viscoelasticity on entropy generation in a porous medium over a stretching plate // World Appl. Sci. J. 2012. V. 17, N 4. P. 516–523.
17. **Khan M., Shahzad A.** On boundary layer flow of a Sisko fluid over a stretching sheet // Quaest. Math. 2012. V. 36, N 1. P. 137–151.
18. **Qasim M., Khan I., Shafie S.** Heat transfer in a micropolar fluid over a stretching sheet with Newtonian heating // PLoS One. 2013. V. 8, N 4. e59393.
19. **Mukhopadhyay S., Ranjan De P., Layek G. C.** Heat transfer characteristics for the Maxwell fluid flow past an unsteady stretching permeable surface embedded in a porous medium with thermal radiation // J. Appl. Mech. Tech. Phys. 2013. V. 54, N 3. P. 385–396.
20. **Nakamura M., Sawada T.** Numerical study on the flow of a non-Newtonian fluid through an axisymmetric stenosis // Trans. ASME. J. Biomech. Engng. 1988. V. 110, N 2. P. 137–143.

Поступила в редакцию 7/IV 2014 г.,
в окончательном варианте — 10/X 2014 г.