1 соответствует $q = -0{,}45$, *2* — 0,62. Заметны быстрое уменьшение деформаций профиля скорости, локализация рейнольдсовых напряжений у одной из стенок канала. Сплошными кривыми *1*, *2* нанесены ламинарные профили скорости при тех же q, крестиками на них отмечены положения критических слоев y_c, где $U(y_c) = C$. Заметна тенденция приближения одного из критических слоев к стенке на границе области существования решения.

Таким образом, область существования рассмотренных трехмерных автоколебаний конечной амплитуды не захватывает собственно течения Куэтта. По-видимому, это связано с тем, что наиболее опасные для течения Куэтта возмущения имеют другую структуру, чем в случае течения Пуазейля.

Авторы выражают глубокую признательность В. Н. Штерну и М. А. Гольдштику за ценные советы и постоянное внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Гольдштик М. А., Штерн В. Н.** Гидродинамическая устойчивость и турбулентность. Новосибирск: Наука, 1977.
2. **Davis S. J., White C. M.** An experimental study of flow of water in pipes of rectangular section.— Proc. Roy. Soc., 1928, v. 119, N 781.
3. **Potter M. C.** Stability of plane Couette — Poiseuille flow.— J. Fluid Mech., 1966, v. 24, N 3.
4. **Hains F. D.** Stability of plane Couette — Poiseuille flow.— Phys. Fluids, 1967, v. 10, N 9.
5. **Reihardt H.** Über die Geschwindigkeitsverteilung in einer geradlinigen Turbulenten Couetteströmung.— Z. angew. Math. und Mech., 1956, Bd 36, Sonderheft.
6. **Robertson J. M.** On turbulent plane Couette flow.—In: Proceedings of the 6th Midwestern Conference of Fluid Mechanics, 1959.
7. **Козлов В. В., Рамазанов М. П.** Развитие возмущений конечной амплитуды в течении Пуазейля.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1983, № 1.
8. **Качанов Ю. С., Левченко В. Я.** Резонансное взаимодействие возмущений при переходе к турбулентности в пограничном слое. Препринт № 10. Новосибирск: ИТПМ СО АН СССР, 1982.
9. **Nishioka M., Iida S., Ichikawa Y.** An experimental investigation of the stability of plane Poiseuille flow.— J. Fluid. Mech., 1975, v. 72, N 4.
10. **Orszag S. A., Kells L. C.** Transition to turbulence in plane Poiseuille and plane Couette flow.— J. Fluid Mech., 1980, v. 96, N 1.
11. **Гольдштик М. А., Лифшиц А. М., Штерн В. Н.** Число Рейнольдса перехода в плоском канале.— ДАН СССР, 1983, т. 273, № 1.

Поступила 14/VI 1984 г.

УДК 532.526

КЛАСС АВТОМОДЕЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ ДЛЯ ВЫСОКОТЕМПЕРАТУРНОЙ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ СТРУИ

А. А. Бобнев

(Новосибирск)

При исследовании неизотермических струйных течений сжимаемого газа наиболее простые и строгие результаты можно получить, воспользовавшись преобразованием Дородницына [1]. Однако этот прием пригоден лишь для плоских (или сводящихся к плоским) течений газа при линейной зависимости теплопроводности и динамической вязкости от температуры, при этом затруднителен переход от переменных Дородницына к физическим. В случае истечения осесимметричной струи из точечного источника для области, где температура на оси значительно больше температуры на бесконечности, можно построить, воспользовавшись идеей существования разделительного слоя [2], автомодельное решение при степенной зависимости теплопроводности и вязкости от температуры, причем от исходной двухпараметрической задачи (число Прандтля, показатель степени) можно перейти к однопараметрической.

1. Задачу, описывающую истечение неизотермической струи из цилиндрического отверстия в приближении пограничного слоя, запишем в безразмерном виде

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[r\mu(T)\frac{\partial w}{\partial r}\right] = \rho\left(v\frac{\partial w}{\partial r} + w\frac{\partial w}{\partial z}\right), \tag{1.1}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\rho v)+\frac{\partial}{\partial z}(\rho w)=0,\quad \rho T=1,$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[r\lambda(T)\frac{\partial T}{\partial r}\right]=\Pr\rho\left(v\frac{\partial T}{\partial r}+w\frac{\partial T}{\partial z}\right);$$

(1.2) $$v=\frac{\partial w}{\partial r}=\frac{\partial T}{\partial r}=0 \quad \text{при } r-0;$$

(1.3) $$T=\varepsilon,\ w=0 \text{ при } r\to\infty,$$

где r, $z\mathrm{R}$ — цилиндрические координаты (r, z — внутренние координаты в асимптотическом разложении по малому параметру R^{-1}); $\mathrm{R} = \sqrt{\rho_m I_{1m}/2\pi}/\mu_m$ — некоторый аналог числа Рейнольдса; $v\mathrm{R}^{-1}$, w — r, z — составляющие скорости; $\Pr = c_{pm}\mu_m/\lambda_m$ — число Прандтля; ε — значение температуры на бесконечности; обозначение остальных величин общепринятое. При обезразмеривании считались заданными масштабы T_m, ρ_m, c_{pm}, μ_m, λ_m (масштабные величины помечены индексом m), а также масштабы полного импульса I_{1m} и потока энтальпии I_{2m}, определяемые по формулам

$$I_{1m}=2\pi\rho_m V_m^2 L_m^2\int_0^\infty \rho w^2 r dr,\quad I_{2m}=2\pi c_{pm}\rho_m T_m V_m L_m^2\int_0^\infty \rho w(T-\varepsilon)rdr.$$

В качестве масштабов скорости V_m и длины L_m выбраны

$$V_m=c_{pm}T_m I_{1m}/I_{2m},\quad L_m=(I_{2m}/c_{pm}T_m)/\sqrt{2\pi\rho_m I_{1m}}.$$

При записи уравнений (1.1) было принято, что удельная теплоемкость является постоянной величиной. Для системы (1.1) следовало бы поставить начальные условия при $z = z_0$, однако в рамках этой работы будут рассматриваться только автомодельные решения, поэтому для замыкания задачи (1.1)—(1.3) сформулируем условия сохранения импульса и потока энтальпии

(1.4) $$\int_0^\infty \rho w^2 r dr=1,\quad \int_0^\infty \rho w(T-\varepsilon)rdr=1.$$

Задачу (1.1)—(1.4) будем рассматривать при $\varepsilon\to 0$. Для этого случая можно построить асимптотическое разложение по малому параметру ε, пригодное вблизи границы $r = 0$ (в дальнейшем это разложение назовем разложением для горячего пограничного слоя). Следуя [2], предположим, что эти разложения будут непригодны вблизи поверхности, где локализуется разделительный слой, т. е. область пригодности разложений лежит в интервале $0 \leqslant r < r_0(z)$, где $r = r_0(z)$ — поверхность раздела, на которой температура в нулевом приближении горячего пограничного слоя равна нулю. В рамках этой работы не будем останавливаться на построении решений для разделительного слоя, отметим только, что причины возникновения этой области неравномерности и методология построения решений в разделительном слое рассмотрены в [2]. С физической точки зрения тонкий (по сравнению с толщиной пограничного слоя) разделительный слой отделяет высокотемпературную область течения сжимаемого газа от низкотемпературной области течения несжимаемого газа с постоянной температурой.

В нулевом приближении по ε задача для горячего слоя описывается системой уравнений (1.1), граничными условиями (1.2) и интегральными условиями, которые теперь запишутся в виде

(1.5) $$\int_0^{r_0(z)} \rho w^2 r dr=1,\quad \int_0^{r_0(z)} w r dr=1.$$

Условия сохранения (1.5) можно получить, лишь предполагая существование этих интегралов. Задача (1.1), (1.2), (1.5) допускает автомодельное решение, если

(1.6) $$\mu = \lambda = T^{\gamma},$$

где γ — заданная постоянная; здесь и ниже следует иметь в виду, что при возведении положительного числа в нецелую степень результат считается вещественным и положительным. Тогда, полагая

(1.7) $$w(r, z) = z^{\alpha_w} u(x),\ v = z^{\alpha_v} f(x),\ T = z^{\alpha_T}\theta(x),\ r = xz^{\alpha},$$

где

(1.8) $$\alpha_w = \alpha_T = -1/(1+\gamma),\ \alpha_v = -(3+2\gamma)/[2(1+\gamma)],\ \alpha = 1/[2(1+\gamma)],$$

получим из (1.1), (1.2), (1.5)

(1.9) $$\frac{1}{x}(x\theta^{\gamma}u')' = \frac{1}{\theta}[fu' + u(\alpha_w u - \alpha x u')],$$

$$\frac{1}{x}\left(x\frac{f}{\theta}\right)' - \alpha x\left(\frac{u}{\theta}\right)' = 0,\ \frac{1}{x}(x\theta^{\gamma}\theta')' = \Pr\frac{1}{\theta}[f\theta' + u(\alpha_T\theta - \alpha x\theta')];$$

(1.10) $$f = u' = \theta' = 0 \text{ при } x = 0;$$

(1.11) $$\int_0^{x_0}(u^2/\theta)\,xdx = 1,\ \int_0^{x_0} uxdx = 1,$$

где штрих обозначает производную по x; x_0 — точка раздела ($\theta(x_0) = 0$), если она существует, в противном случае $x_0 \to \infty$. Отметим, что при $\gamma < -1$ температура и продольная скорость на оси возрастают вниз по потоку (см. (1.8)). Физически такая ситуация, по-видимому, возникнуть не может, поэтому следует иметь в виду, что в дальнейшем будет рассматриваться лишь случай

(1.12) $$\gamma > -1.$$

Вообще для ламинарных струй можно предположить, что вязкость и теплопроводность растут с увеличением температуры, т. е. $\gamma > 0$, однако описание некоторых турбулентных течений можно сводить к ламинарным моделям с $\gamma < 0$.

В связи с тем что задача (1.9), (1.10) инвариантна к преобразованию

(1.13) $$u \to C_1 u,\ \theta \to C_2\theta,\ x \to C_1^{-1/2}C_2^{(1+\gamma)/2}x,\ f \to G^{1/2}C_2^{(1+\gamma)/2}f,$$

в качестве замыкающих задачу (1.9), (1.10) условий используем

(1.14) $$u = 1,\ \theta = 1 \text{ при } x = 0.$$

Решив задачу (1.9), (1.10), (1.14) и использовав свойства (1.13), можно определить постоянные C_1, C_2, удовлетворяющие условиям нормировки (1.11). Поэтому в дальнейшем будем заниматься исследованием задачи (1.9), (1.10), (1.14).

2. Задачу (1.9), (1.10), (1.14) с помощью преобразования

(2.1) $$s = \Pr(f - \alpha x u),$$

используя свойства которого и свойства функций θ, u, следующие из задачи (1.9), (1.10), (1.14):

(2.2) $$s = \theta^{\gamma}\theta',\ u = \theta^{1/\Pr},$$

приведем к виду

(2.3) $$\frac{1}{x}(x\theta^{\gamma}\theta')' = \theta^{\gamma-1}\theta'^2 + \Pr\alpha_T\theta^{1/\Pr},\ \theta = 1,\ \theta' = 0 \quad \text{при } r = 0.$$

Задача (2.3) имеет некоторые простые решения. Так, при $\gamma = 0$ уравнение (2.3) связано с известным уравнением Эмдена — Фаулера [3], и решением задачи (2.3) является

$$\theta = \left(1 + \frac{1 - \mathrm{Pr}}{8} x^2\right)^{-2\mathrm{Pr}/(1-\mathrm{Pr})}. \tag{2.4}$$

Из условия существования интегралов (условия существования автомодельных решений в форме (1.7), (1.8)) можно получить, что решение (2.4) приемлемо при $\mathrm{Pr} < 3$. При $0 < \mathrm{Pr} \leqslant 1$ решение (2.4) пригодно на полубесконечном интервале задания переменной $x(0 \leqslant x < \infty)$, т. е разделительного слоя при этом не возникает. При $1 < \mathrm{Pr} < 3$ решение (2.4) пригодно на интервале $0 \leqslant x < x_0$, и разделительный слой локализуется вблизи поверхности (точки) раздела $x_0 = \sqrt{8/(\mathrm{Pr} - 1)}$.

При $\mathrm{Pr} = 1$ решением задачи (2.3) является

$$\theta = (1 + \alpha_T^* \gamma x^2/4)^{1/\gamma} = \left[1 - \frac{\gamma x^2}{4(1+\gamma)}\right]^{1/\gamma}. \tag{2.5}$$

Это решение пригодно, если $\gamma > 0$, при $0 \leqslant x < x_0 = 2\sqrt{(1+\gamma)/\gamma}$, а если $\gamma < 0$, то при $0 \leqslant x < \infty$. Условия существования интегралов приводят к ограничениям на γ, не более сильным, чем (1.12).

Задачу (2.3) введением новых переменных

$$\eta = \bar{x}\sqrt{\mathrm{Pr}(-\alpha_T)|\gamma|}, \quad \tau = \theta^\gamma \tag{2.6}$$

преобразуем к виду

$$\frac{1}{\eta}\frac{d}{d\eta}\left(\eta \frac{d\tau}{d\eta}\right) + \mathrm{sign}(\gamma)\tau^\beta = 0, \quad \tau = 1, \quad \frac{d\tau}{d\eta} = 0 \quad \text{при} \quad \eta = 0, \tag{2.7}$$

где $\beta = (1 - \mathrm{Pr})/(\gamma \mathrm{Pr})$. Таким образом, исходную двухпараметрическую задачу (γ, Pr) пятого порядка удалось преобразовать к двум ($\mathrm{sign}(\gamma) = \pm 1$) однопараметрическим второго порядка. Решив (2.7), можно, воспользовавшись формулами (2.6), (2.2), (2.1), определить автомодельные функции u, θ, f автомодельной переменной x, а затем при необходимости полученное решение пронормировать с помощью (1.13), (1.11).

Задача (2.7) также имеет некоторые простые решения. При $\beta = 0$ ($\mathrm{Pr} = 1$) решение было уже получено (см. формулу (2.5)). При $\beta = 1$ решением (2.7) является

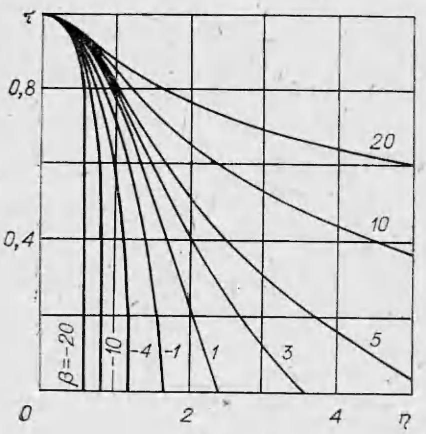
$$\tau = J_0(\sqrt{\mathrm{sign}(\gamma)}\eta), \tag{2.8}$$

где J_0 — функция Бесселя. При $\gamma > 0$ решение (2.8) пригодно в интервале $0 \leqslant \eta < k_1$, где k_1 — наименьший положительный корень уравнения $J_0(k_n) = 0$. Условия существования интегралов (1.11) при $\beta = 1$ и $\gamma > 0 (\mathrm{Pr} < 1)$ на приемлемость решения (2.8) ограничений не накладывают. При $\beta = 1$ и $\gamma < 0$ ($\mathrm{Pr} > 1$) решение (2.8) пригодно на полубесконечном интервале $0 \leqslant \eta < \infty$, а из условия существования интегралов (1.11) следует ограничение $\mathrm{Pr} < 2$.

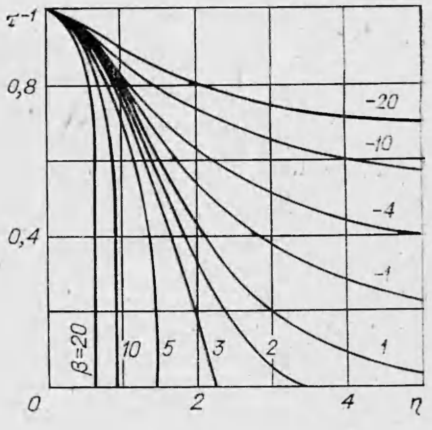
На фиг. 1 построены полученные численным методом Рунге — Кутта кривые $\tau = \tau(\eta)$ при $\gamma > 0$ и разных значениях β. Отметим, что при любых значениях $\beta(-\infty < \beta < \infty)$ решения задачи (2.7) пригодны в ограниченном интервале переменной $\eta(0 \leqslant \eta < \eta_0)$. Об ограничениях, накладываемых на решения задачи (2.7), можно судить по поведению функции τ (или τ^{-1} при $\gamma < 0$) в окрестности ее нуля, так как именно этим определяется существование интегралов (1.11). Не проводя подробный анализ, отметим конечные формулы, описывающие поведение функции τ (или τ^{-1} при $\gamma < 0$) в окрестности ее нуля и ограничения, следующие из условия существования интегралов (1.11). Так, при $\gamma > 0$ и $\beta > -1$ ($(1 - \gamma)\mathrm{Pr} < 1$) в окрестности нуля

$$\tau = \sqrt{\frac{2}{\beta+1}}(\eta_0 - \eta) + O\left((\eta_0 - \eta)^{\beta+2}\right),$$

откуда следует ограничение $(1 - \gamma)\mathrm{Pr} < 2$, которое является не более



Фиг. 1



Фиг. 2

сильным, чем условие $\beta > -1((1-\gamma)\mathrm{Pr} < 1)$. При $\gamma > 0$ и $\beta < -1$ $((1-\gamma)\mathrm{Pr} > 1)$ в окрестности точки раздела η_0 функция τ ведет себя степенным образом:

$$\tau = \left[\frac{1-\beta}{2}\sqrt{-\frac{2}{\beta+1}}\,(\eta_0-\eta)\right]^{2/(1-\beta)} + O\left((\eta_0-\eta)^{1-2(\beta+1)/(1-\beta)}\right),$$

откуда можно получить

$$(1-\gamma)\mathrm{Pr} < 3. \tag{2.9}$$

Из условия (2.9) и поведения функции при $\beta > -1$ следует, что решения задачи (2.7) пригодны при любых значениях Pr, если $\gamma \geqslant 1$. При $\gamma > 0$ и $\beta = -1$ $(\mathrm{Pr} > 1)$ асимптотическая оценка дает в окрестности точки раздела

$$\eta_0 - \eta = \frac{\tau}{\sqrt{-2\ln\tau}}\left(1 + O\left(\ln^{-1}\tau\right)\right),$$

откуда следует, что интегралы (1.11) существуют при любых значениях γ (или Pr).

При $\gamma < 0$ и разных значениях параметра β на фиг. 2 представлены решения задачи (2.7). При $\beta > 1((1+\gamma)\mathrm{Pr} > 1)$ и $\gamma < 0$ решение задачи (2.7) для τ пригодно в ограниченной области переменной $\eta(0 \leqslant \eta < \eta_0)$ и ведет себя в окрестности нуля функции τ^{-1} как

$$\tau = \left[\frac{\beta-1}{2}\sqrt{\frac{2}{\beta+1}}\,(\eta_0-\eta)\right]^{2/(1-\beta)} + O\left((\eta_0-\eta)^{1-2(\beta+1)/(1-\beta)}\right),$$

а условия существования интегралов (1.11) приводят к ограничению (2.9). При $\gamma < 0$ и $-1 < \beta < 1$ решение для τ пригодно на полубесконечном интервале $0 \leqslant \eta < \infty$, и при $\eta \to \infty$ функция τ ведет себя как

$$\tau = \left(\frac{1-\beta}{2}\sqrt{\frac{2}{\beta+1}}\,\eta\right)^{2/(1-\beta)} + O\left(\eta^{-1}\right) + O\left(\eta^{-(2+2\beta)/(1-\beta)}\right).$$

Тогда при $\gamma < 0$ и $-1 < \beta < 1$ из условия существования интегралов (1.11) можно получить $\mathrm{Pr} < -1/\gamma$. При $\beta > 1$ и $\eta \to \infty$ функция $\tau \sim \ln\eta$ и интегралы (1.11) не существуют. Следовательно, автомодельное представление (1.7), (1.8) при $\gamma < 0$ и $\beta < -1$ непригодно.

Отметим, что условия существования интегралов (1.11) допускают бесконечные производные по η для продольной скорости или температуры в окрестности точки раздела. Например, при $\mathrm{Pr} = 2$ и $\gamma = 3/2$ вблизи точки $\eta = \eta_0$ $u \sim (\eta_0-\eta)^{1/3}$, $\theta \sim (\eta_0-\eta)^{2/3}$.

3. Исследуем решение задачи (2.7) в случае больших по модулю β. При построении решений будут использованы терминология и идеи (в частности, наиболее мощный, на наш взгляд, прием теории возмущений —

сращивание на промежуточном пределе) сращиваемых асимптотических разложений [4]. Задачу (2.7) целесообразно введением новой функции

$$g = \tau^{\beta-1} \tag{3.1}$$

преобразовать к виду

$$\frac{1}{\eta}\frac{d}{d\eta}\left(\eta\frac{dg}{d\eta}\right) - (1-\varepsilon_1)\frac{1}{g}\left(\frac{dg}{d\eta}\right)^2 + \frac{\operatorname{sign}(\gamma)}{\varepsilon_1}g^2 = 0, \tag{3.2}$$

$$g = 1, \ \frac{dg}{d\eta} = 0 \quad \text{при } \eta = 0,$$

где $\varepsilon_1 = 1/(\beta - 1)$.

Задачу (3.2) рассмотрим сначала в случае $0 < \varepsilon_1 \ll 1$. Сформулируем внутренний предельный процесс в виде

$$\varepsilon_1 \to 0 \ (\beta \to \infty), \ \zeta = \eta/\sqrt{\varepsilon_1} \text{ фиксировано.} \tag{3.3}$$

Тогда построим внутреннее разложение решений задачи (3.2) как

$$g(\eta, \varepsilon_1) = g_0(\zeta) + \nu_1(\varepsilon_1)g_1(\zeta) + \ldots \nu_n(\varepsilon_1)g_n(\zeta) + \ldots (n = 1, 2, \ldots), \tag{3.4}$$

где $\nu_n(\varepsilon_1)$ — некоторая асимптотическая последовательность. Подставив (3.4) в задачу (3.2) и имея в виду определение внутреннего предела (3.3), получим

$$\frac{1}{\zeta}\frac{d}{d\zeta}\left(\zeta\frac{dg_0}{d\zeta}\right) - \frac{1}{g_0}\left(\frac{dg_0}{d\zeta}\right)^2 + g_0^2 = 0, \ g_0 = 1, \ \frac{dg_0}{d\zeta} = 0 \quad \text{при } \zeta = 0. \tag{3.5}$$

Уравнение (3.5) связано с уравнением Эмдена — Фаулера [3], и решением задачи (3.5) является

$$g_0 = (1 + \zeta^2/8)^{-2}. \tag{3.6}$$

Решение задачи (3.2) в виде (3.6) пригодно с уверенностью лишь при сколь угодно малых η, так как из вышеизложенного очевидно, что при $\beta > 0$ и $\gamma > 0$ существует точка раздела (нуль функции τ). Следовательно, пригодность разложения (3.5) уже в окрестности не сколь угодно малых η (т. е. в случае, когда $\eta \to 0$ не так быстро, как на внутреннем пределе (3.3)) вызывает сомнение. Поэтому сформулируем внешний предельный процесс:

$$\tilde{\zeta} = \eta/\delta(\varepsilon_1) \text{ фиксировано}, \ \delta(\varepsilon_1)/\sqrt{\varepsilon_1} \to \infty \text{ при } \varepsilon_1 \to 0. \tag{3.7}$$

Здесь $\delta(\varepsilon_1)$ характеризует масштаб переменной η на внешнем пределе, а функция $\delta(\varepsilon_1)$ еще не определена.

Из задачи (2.7) видно, что при $\beta \to \infty$ и $0 < \tau < 1$ (последнее следует из соображений о положительности и монотонности температуры) ее решение с погрешностью до трансцендентно малых членов, по крайней мере при больших или не слишком малых значениях η, ведет себя как

$$\tau = A + B \ln \eta + \mathrm{TST}(\beta^{-1}),$$

где A, B — постоянные, не зависящие от η. Поэтому, имея в виду формулу (3.1) и определение параметра ε_1, можно предположить, что разложение для функции g на внешнем пределе (3.7) имеет вид

$$g(\eta, \varepsilon_1) = [A_0\tilde{\nu}_0(\varepsilon_1) + \ldots A_n\tilde{\nu}_n(\varepsilon_1) + \ldots]\{1 + [B_0\tilde{\mu}_0(\varepsilon_1) + \tag{3.8}$$

$$+ \ldots B_n\tilde{\mu}_n(\varepsilon_1) + \ldots] \ln \eta\}^{1/\varepsilon_1},$$

где A_n, B_n — постоянные, не зависящие от ε_1; $\tilde{\nu}_n(\varepsilon_1)$, $\tilde{\mu}_n(\varepsilon_1)$ — асимптотические последовательности. При записи (3.8), не ограничивая общности внешнего предельного процесса (3.7) и самого разложения (3.8), было принято, что

$$\delta(\varepsilon_1) = 1. \tag{3.9}$$

Сращивание разложений (3.4), (3.8) произведем на пределе, промежуточном между пределами (3.3) и (3.7). Промежуточный предельный процесс сформулируем в виде

(3.10) $\varkappa \to 0$, $\varkappa/\sqrt{\varepsilon_1} \to \infty$, $\eta_\varkappa = \eta/\varkappa$ фиксировано при $\varepsilon_1 \to 0$.

Тогда, сращивая (3.4) и (3.8) на пределе (3.10), имеем

$$\left(1 + \frac{\eta_\varkappa^2 \varkappa^2}{8\varepsilon_1}\right)^{-2} + \nu_1(\varepsilon_1) g_1(\eta_\varkappa \varkappa/\sqrt{\varepsilon_1}) + \ldots = [A_0 \tilde{\nu}_0(\varepsilon_1) + \ldots]\{1 + [B_0 \tilde{\mu}_0(\varepsilon_1) + \ldots] \ln \eta_\varkappa \varkappa\}^{1/\varepsilon_1},$$

откуда последовательно получим

$$\tilde{\mu}_0 = \varepsilon_1, \quad \tilde{\nu}_0 = \varepsilon_1^2, \quad B_0 = -4, \quad A_0 = 64$$

и в нулевом приближении по ε_1 на внешнем пределе (3.7), (3.9)

$$g = 64\varepsilon_1^2 (1 - 4\varepsilon_1 \ln \eta)^{1/\varepsilon_1},$$

т. е. разделительный слой возникает при этом вблизи точки $\eta = \eta_0 = \exp(1/4\varepsilon_1)$.

Аналогичным образом строится и решение задачи (3.2) в случае $\operatorname{sign}(\gamma) = -1$ при $\beta \to -\infty$. Равномерное приближение можно получить, складывая решения, пригодные на внутреннем и внешнем пределе, и вычитая общую их часть. Тогда в случае $\gamma\beta > 0$ при $\beta \to \pm\infty$ ($\varepsilon_1 \to \pm 0$) для задачи (3.2) равномерно пригодным по ε_1 и η приближением будет

$$g = \left(1 + \frac{\eta^2}{8|\varepsilon_1|}\right)^{-2} + 64\varepsilon_1^2 (1 - 4\varepsilon_1 \ln \eta)^{1/\varepsilon_1} - \frac{64\varepsilon_1^2}{\eta^2}.$$

При $\gamma\beta < 0$ и $\beta \to \pm\infty$ ($\varepsilon_1 \to \pm 0$) для задачи (3.2) равномерно пригодным будет разложение вида (3.4) с предельным процессом в форме

$$\varepsilon_1 \to \pm 0 (\beta \to \pm\infty), \quad \zeta = \eta/\sqrt{|\varepsilon_1|} \text{ фиксировано.}$$

Решение (3.2) в нулевом приближении по ε_1 в этом случае имеет вид

$$g(\eta, \varepsilon_1) = \left(1 - \frac{\eta^2}{8|\varepsilon_1|}\right)^{-2} + O(\varepsilon_1).$$

Очевидно, что разделительный слой при этом возникает при $\eta = \eta_0 = \sqrt{8|\varepsilon_1|}$.

В заключение автор выражает глубокую благодарность В. В. Пухначеву за обсуждение результатов работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Вулис Л. А., Кашкаров В. П.** Теория струй вязкой жидкости. М.: Наука, 1965.
2. **Бобнев А. А.** Разделительный слой в высокотемпературных потоках.— ПМТФ, 1983, № 6.
3. **Камке Э.** Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1971, т. 1.
4. **Коул Дж.** Методы возмущений в прикладной математике. М.: Мир, 1972.