

# Методика решения задачи рассеяния света на ледяных кристаллах перистых облаков в направлении рассеяния назад методом физической оптики для лидара с зенитным сканированием

А.В. Коношонкин<sup>1,2</sup>, Н.В. Кустова<sup>2</sup>, В.А. Шишко<sup>2</sup>, А.Г. Боровой<sup>1,2\*</sup>

<sup>1</sup>Национальный исследовательский Томский государственный университет  
634050, г. Томск, пр. Ленина, 36

<sup>2</sup>Институт оптики атмосферы им. В.Е. Зуева СО РАН  
634055, г. Томск, пл. Академика Зуева, 1

Поступила в редакцию 2.11.2015 г.

Рассмотрена методика решения задачи рассеяния света в направлении рассеяния назад методом физической оптики. Даются рекомендации по проведению предварительной оценки вклада геометрооптических пучков, позволяющей сократить список необходимых для расчета пучков в сотни раз. Представленные эмпирические оценочные формулы и рекомендации по выбору оптимального шага численного интегрирования позволяют значительно снизить ресурсоемкость метода физической оптики для указанных микрофизических моделей гексагональных кристаллических частиц. Полученные результаты решения задачи рассеяния света доступны в виде банка данных матриц Мюллера в свободном доступе.

**Ключевые слова:** физическая оптика, алгоритм трассировки пучков, рассеяние света, ледяные кристаллы; physical optics, beams splitting algorithm, light scattering, ice crystals.

## Введение

Оптические свойства перистых облаков являются объектом активного изучения как в России [1–4], так и за рубежом [5–7]. Это связано, во-первых, со значительным влиянием этих облаков на радиационный баланс планеты [8], а во-вторых, с отсутствием общепризнанного метода решения задачи рассеяния света на ледяных кристаллах облаков для интерпретации лидарного сигнала. Попытки найти решение предпринимались как точными методами [9, 10], так и в рамках приближения геометрической оптики [11–13]. Однако только с развитием в 2010-х гг. метода физической оптики [14–16] удалось решить задачу для классических гексагональных ледяных кристаллов перистых облаков в направлении рассеяния назад [17–19].

В настоящей статье представлено решение задачи рассеяния методом физической оптики, подробно изложенным в статье [14]. Метод заключается в трассировке всех геометрооптических пучков внутри кристалла, которые при выходе из частицы испытывают дифракцию. Очевидно, что при решении задачи на кристаллической частице, например

гексагональном столбике или пластинке, образуется, вообще говоря, бесконечное множество таких пучков, многие из которых являются несущественными [20, 21]. В связи с этим прямое применение метода физической оптики для таких расчетов является неоптимальным. Кроме того, в статье приводится ряд упрощений, которые позволяют существенно повысить эффективность метода физической оптики для решения задачи обратного рассеяния света на гексагональных ледяных частицах.

## Микрофизические параметры кристаллической частицы

Ледяная кристаллическая частица в перистом облаке характеризуется своими размерами, формой и ориентацией в пространстве. Экспериментальные исследования указывают на существование некоторой зависимости между геометрическими размерами частицы. Так, в работах [22, 23] утверждается, что высота гексагональной пластинки  $h$  связана с диаметром основания  $D$  (рис. 1) следующим соотношением:

$$h = 2,02D^{0,449}. \quad (1)$$

Соотношение между высотой гексагонального столбика  $L$  и диаметром  $D$  его основания определяется различными авторами по-разному. В частности,

\* Александр Владимирович Коношонкин (sasha\_tvo@iao.ru); Наталья Валентиновна Кустова (kustova@iao.ru); Виктор Андреевич Шишко (sva@iao.ru); Анатолий Георгиевич Боровой (borovoi@iao.ru).

ниже представлены зависимости, используемые в работах Mitchell [22]:

$$D = \begin{cases} 0,7L, & 10 < L < 100, \\ 6,96\sqrt{L}, & 100 \leq L \leq 1000, \end{cases} \quad (2)$$

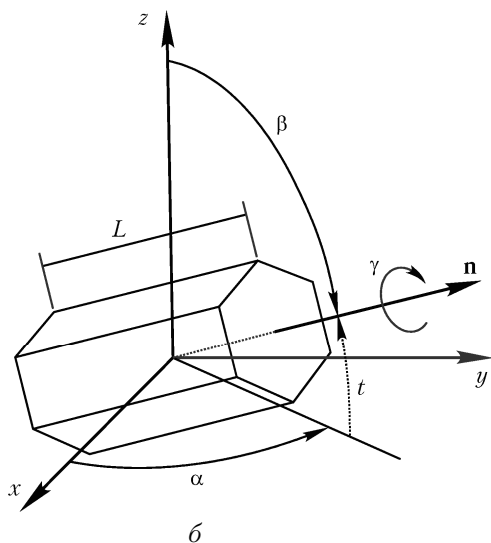
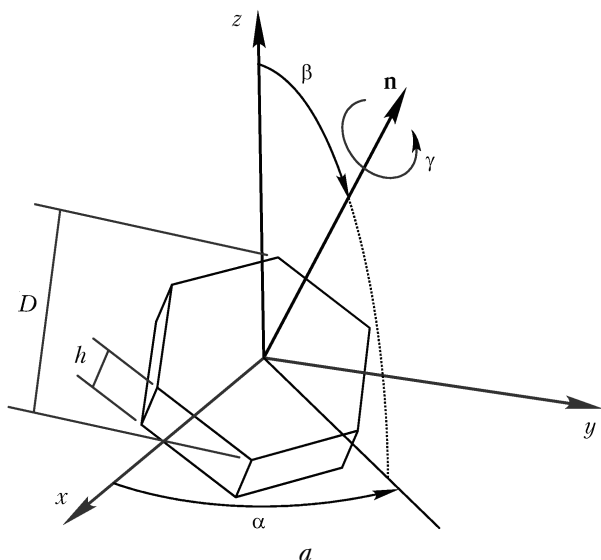


Рис. 1. Размеры и ориентация гексагональной пластинки (а) и столбика (б)

Auer [23]:

$$D = \begin{cases} -8,479 + 1,002L - 0,00234L^2, & L \leq 200, \\ 11,3L^{0,414}, & L > 200, \end{cases} \quad (3)$$

и Okamoto [24]:

$$\begin{cases} D = L, & L < 20, \\ LD = 2,1107(L^2 + D^2)^{0,7945}, & 20 < L < 463, \\ D = L/5,77, & L > 463. \end{cases} \quad (4)$$

Указанные зависимости представлены на рис. 2. Стоит отметить, что используемая Okamoto модель (4) существенно отличается от двух других, поскольку в отличие от первых двух работ, где кристаллы для исследования собирались в горах, в последней использовались результаты, полученные на аэростате в работе [25]. Эти три модели являются основополагающими для большинства современных теоретических исследований оптических свойств гексагональных кристаллов.

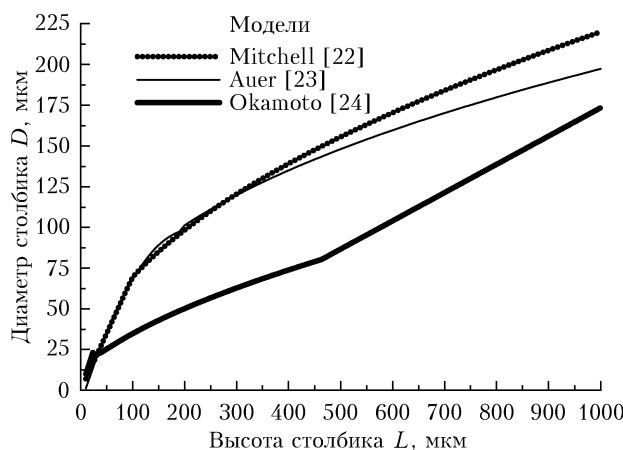


Рис. 2. Сравнение трех моделей зависимости диаметра гексагонального столбика от его высоты

Помимо размеров частица в облаке характеризуется законом, описывающим ее пространственную ориентацию. Как правило, предполагают, что частица имеет или хаотическую [26], или преимущественно горизонтальную [27, 28] ориентацию. Определив ориентацию частицы тремя углами Эйлера ( $\alpha, \beta, \gamma$ ), как показано на рис. 1, можно охарактеризовать пространственную ориентацию частицы функцией плотности вероятностей нахождения частицы в том или ином положении  $p(\alpha, \beta, \gamma)$ .

Для ледяной пластинки, как правило, предполагают, что она ориентирована по углам  $\alpha$  и  $\gamma$  равномерно; по углу  $\beta$  часто предполагается существование нормального закона распределения, что соответствует случаю преимущественно горизонтальной ориентации (квазигоризонтальной ориентации). В некоторых работах делается предположение, что частица также имеет выраженную азимутальную ориентацию [29, 30], т.е. имеет некоторый закон распределения по углу  $\alpha$ , однако в настоящей статье такой случай не рассматривается.

Ввиду того что решение задачи рассеяния света в рамках настоящей статьи будет описываться матрицей Мюллера, указанная пространственная ориентация приводит к усреднению матрицы Мюллера для отдельной частицы следующим образом:

$$\langle \mathbf{M} \rangle = \iiint_{\alpha \beta \gamma} \mathbf{M}(\alpha, \beta, \gamma) p(\alpha, \beta, \gamma) \sin(\beta) d\alpha d\beta d\gamma, \quad (5)$$

где  $\langle \mathbf{M} \rangle$  – усредненная матрица Мюллера,  $\mathbf{M}$  – матрица Мюллера для отдельной фиксированной

ориентации частицы. Закон распределения для случая полностью хаотической ориентации имеет вид

$$p(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{1}{\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \sin(\beta) d\alpha d\beta d\gamma}, \quad (6)$$

а для случая преимущественно горизонтальной ориентации

$$p(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{\exp\left(-\frac{t^2}{2\beta_{eff}^2}\right)}{4\pi^2 \int_0^{\pi} \exp\left(-\frac{t^2}{2\beta_{eff}^2}\right) \sin(\beta) d\beta}, \quad (7)$$

где  $\beta_{eff}$  — эффективный угол наклона частицы, а  $t = \beta$  для пластинок и  $t = \pi/2 - \beta$  для столбиков. Заметим, что при  $\beta_{eff} \rightarrow \infty$  формула (7) переходит в (6). В случае симметрии частицы, характерной для идеальных гексагональных кристаллов, можно проводить усреднение по углу  $\gamma$  в пределах  $[0... \pi/3]$ , а по углу  $\beta$  в пределах  $[0... \pi/2]$ .

Отличие в определении  $t$  для столбиков и пластинок заключается в том, что при горизонтальной ориентации столбика его главная ось направлена не вертикально, как у пластинки, а горизонтально (см. рис. 1, б). Здесь мы не будем рассматривать преимущественную азимутальную ориентацию и Раггу-ориентацию, последняя соответствует случаю, когда столбик не вращается вокруг своей оси.

Во всех расчетах показатель преломления  $n$  принимался равным 1,3249, 1,3116 и 1,3004 для длин волн 0,355, 0,532 и 1,064 мкм соответственно.

## Методика решения задачи рассеяния

Общий ход решения имеет следующий вид:

- 1) методом трассировки пучков производится оценка вклада различных геометрооптических пучков;
- 2) формируются карты для расчета;
- 3) методом физической оптики строится решение для случая  $\alpha = 0$  для всех  $\beta$  и  $\gamma$ . Производится усреднение матриц по углу  $\gamma$ , результат заносится в базу данных частично усредненных матриц;
- 4) на основе частично усредненной матрицы проводится усреднение по углу  $\alpha$  для заданного угла наклона лидара  $\theta$ , результат заносится во вторую базу данных;
- 5) на основе второй базы данных проводится усреднение по углу  $\beta$ .

### Оценка интенсивности пучков

На первом этапе производится расчет интенсивности покидающих частицу геометрооптических пучков методом трассировки пучков [31]. Из этих пучков выбираются только пучки, вышедшие в конус  $20^\circ$ , построенный вокруг направления рассеяния назад. Дифракционный вклад от всех остальных пучков можно считать незначительным (рис. 3). Такой расчет выполняется с достаточно грубым шагом по углам  $\gamma$  и  $\beta$ .

Для учета оценочного вклада интенсивности вместо расчета дифракционного интеграла используется оценочная функция. Каждый вышедший геометрооптический пучок предполагается круглым, при этом радиус круга выбирается таким, чтобы площадь поперечного сечения пучка сохранилась. Оценка выполняется на основе функции

$$y(x) = \begin{cases} I_0 \frac{2,6}{x^3}, & x > 2,2, \\ I_0(0,0688734x^3 - 0,3142876x^2 + 0,0192811x + 0,9998942), & x < 2,2, \end{cases} \quad (8)$$

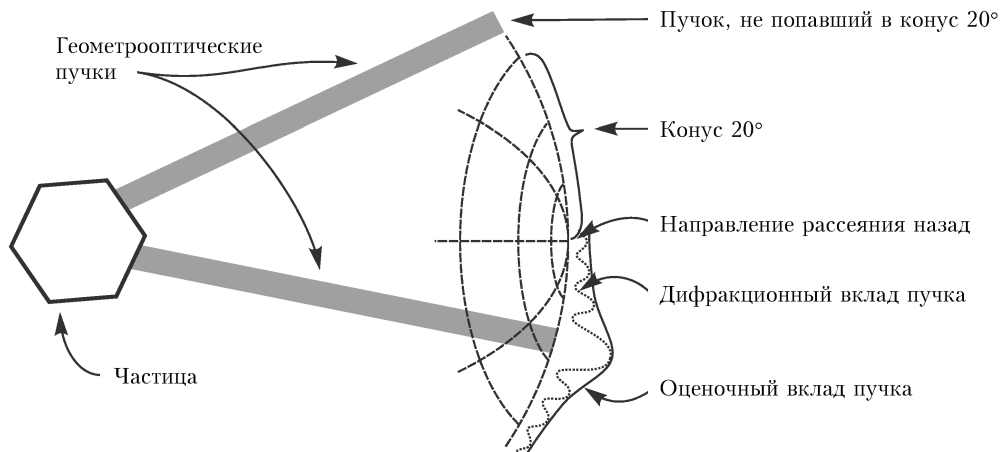


Рис. 3. Иллюстрация покидающих частицу геометрооптических пучков

которая является огибающей к точному решению дифракции на круглом отверстии в приближении Кирхгофа

$$I(x) = I_0 \left( \frac{2J_1(x)}{x} \right)^2, \quad (9)$$

где

$$x = aksin(\theta), \quad (10)$$

$I_0$  – интенсивность в центре дифракционной картины;  $a$  – радиус круга;  $k$  – волновое число;  $\theta$  – угол между точкой наблюдения и направлением выхода пучка;  $J_1$  – функция Бесселя.

Сравнение расчета по формуле (8) со значением дифракционного интеграла (9) представлено на рис. 4. Такая формула не содержит осцилляций и оценивает вклад пучков «с запасом», поэтому мы гарантированно не теряем слабые пучки.

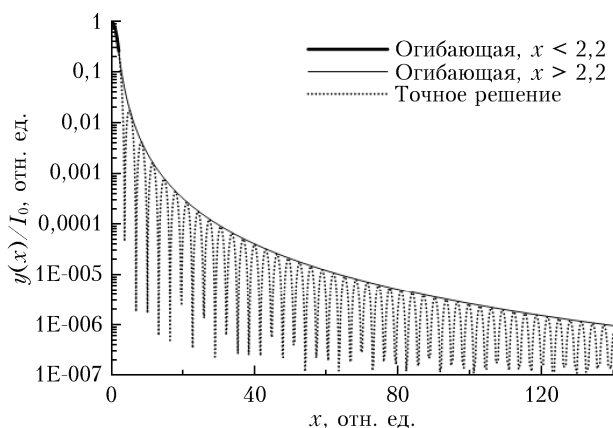


Рис. 4. Сравнение огибающей функции с точным решением дифракционного интеграла

Далее на основе полученной по оценочной формуле интенсивности отдельного  $j$ -го пучка производится расчет среднего вклада пучка в интенсивность рассеянного назад света для данного закона распределения ориентации

$$\langle I_j \rangle = \int_{\beta} \int_{\gamma} I_j(\alpha, \beta, \gamma) p(\alpha, \beta, \gamma) \sin(\beta) d\alpha d\beta d\gamma \Big|_{\alpha=0}. \quad (11)$$

На этом этапе ориентация по углу  $\alpha$  не учитывается, поскольку она не оказывает влияния на интенсивность. Далее для указанного закона распределения по ориентациям происходит сортировка пучков по интенсивности вклада и выбираются только пучки, вносящие 99,9% (для некоторых случаев 99,5%) вклада в интенсивность. На этом же этапе определяются и группируются взаимные траектории, подробно описанные в работах [32, 33].

Для справки: для пластины размером  $D = 794$  мкм,  $h = 40$  мкм из 24224 траекторий, вышедших в конус  $20^\circ$  направления рассеяния назад, только 289 вносят 99,9% интенсивности при хаотической ориентации частицы.

## Этап формирования карт

Рассмотрим в качестве примера дифференциальное сечение рассеяния ( $M_{11}$ ) одного из пучков в направлении рассеяния назад в зависимости от углов  $\gamma$  и  $\beta$  (рис. 5). Видно, что эта величина осциллирует по углу  $\gamma$ . Также видно, что масштаб этих осцилляций меняется с углом  $\beta$ . Более того, с увеличением размера кристалла масштаб этих дифракционных осцилляций будет уменьшаться.

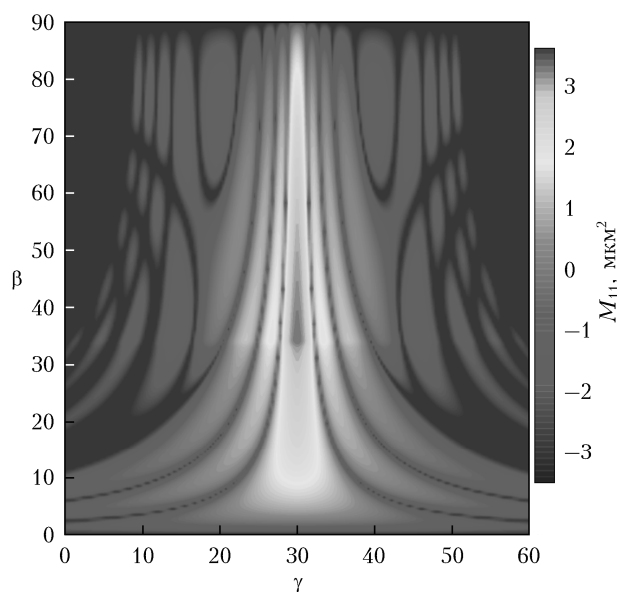


Рис. 5. Зависимость дифференциального сечения рассеяния одного из пучков в направлении рассеяния назад от углов  $\gamma$  и  $\beta$  для частицы диаметром 25,6 мкм и высотой 51,2 мкм

На рис. 5 представлен диапазон углов  $\gamma$  от  $0$  до  $60^\circ$ , так как ввиду симметрии частицы это позволяет значительно сократить расчет. Однако при решении задачи для неидеальной частицы (как, например, в [34]) необходимо рассматривать весь диапазон от  $0$  до  $360^\circ$ , количество траекторий увеличится соответственно в 6 раз.

Для того чтобы провести точное усреднение по углу  $\gamma$ , необходимо, чтобы на одно дифракционное кольцо (рис. 5) приходилось не менее 15 шагов. Поскольку масштаб колец для различных пучков существенно отличается, применять равномерный мелкий шаг на всем диапазоне неэффективно. Поэтому на втором этапе составляется карта размеров шагов по  $\gamma$ . Для этого используется формула, позволяющая определить приближенный номер дифракционного кольца:

$$\tilde{N} = |ab|/\lambda, \quad (12)$$

где  $\lambda$  – длина волны;  $|ab|$  – размер поперечного сечения пучка  $S$  в плоскости  $S$ , образованной векторами  $\mathbf{k}$  (направление распространения света) и  $\mathbf{s}$  (направление, в котором необходимо определить номер кольца) (рис. 6).

Для расчета важно точно усреднить первые 4–5 дифракционных колец, поэтому мы выбираем шаг

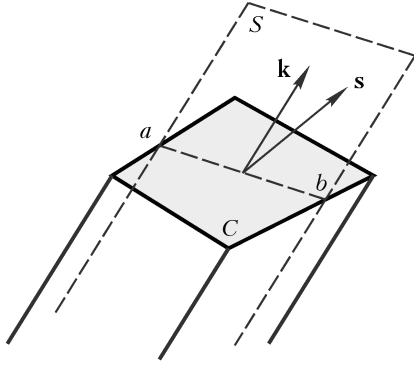


Рис. 6. Поперечное сечение пучка  $C$  в плоскости  $S$

по углу  $\gamma$  такой, чтобы в пределах этого интервала находилось не менее 90 шагов. Такая процедура проводится для всех пучков, и все карты объединяются. Полученная единая карта несет информацию о величине шага в каждой области, что позволяет производить усреднение по углу  $\gamma$  максимально эффективно.

### Усреднение матриц по углу $\gamma$ . Метод физической оптики

Переходим к расчету методом физической оптики. Когда карты шагов по  $\gamma$  готовы, строится решение методом физической оптики для случая  $\alpha = 0$ . Для каждого пучка, выбранного на первом этапе, рассчитывается матрица Мюллера  $\mathbf{M}(\alpha, \beta, \gamma)$  и проводится ее усреднение по углу  $\gamma$  для фиксированного угла  $\beta$ :

$$\mathbf{M}_\gamma(\beta)|_{\alpha=0} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathbf{M}(\alpha=0, \beta, \gamma) d\gamma. \quad (13)$$

Для дальнейшего усреднения матрицы по углу  $\beta$  также эффективно использовать переменный шаг, поскольку типичная зависимость матрицы имеет три различные области.

На рис. 7 представлена типичная зависимость элемента  $M_{11}$  матрицы  $\mathbf{M}_\gamma(\beta)|_{\alpha=0}$  от угла  $\beta$ . Здесь можно выделить три области: дифракционный вклад зеркальных пучков, отраженных от шестиугольного основания частицы (область  $r_2$ ); дифракционный вклад уголкового траекторий (область  $\xi$ ); дифракционный вклад зеркальных пучков, отраженных от прямоугольных боковых граней кристалла (область  $R_2$ ). Очевидно, что с увеличением размера частицы происходит уменьшение размера дифракционных колец ( $r_1, R_1$ ) и размер первой ( $r_2$ ) и третьей ( $R_2$ ) областей будет уменьшаться. Как уже отмечалось ранее, для проведения процедуры усреднения необходимо, чтобы на одно дифракционное кольцо приходилось не менее 15 точек пространственной ориентации, в данном случае по углу  $\beta$ . При этом во второй области  $\xi$ , не имеющей осцилляций, можно использовать грубый шаг.

Проведенные нами исследования позволили установить оценочные формулы, определяющие раз-

меры указанных областей и дифракционных колец в них.

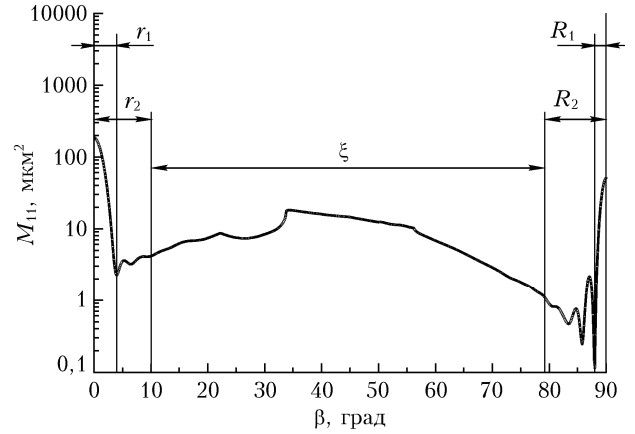


Рис. 7. Типичный профиль дифференциального сечения рассеяния в зависимости от угла наклона частицы  $\beta$  на примере гексагонального столбика размером  $16 \times 11$  мкм

Для гексагональных пластинок, удовлетворяющих микрофизической модели (1),

$$r_1 \approx 0,69 \frac{180 \lambda}{\pi D}, \quad (14)$$

$$R_1 \approx 0,55 \frac{180 \lambda}{\pi h}, \quad (15)$$

$$r_2 \approx \frac{180 \cdot 0,39\lambda + 0,3}{\pi \sqrt{h}}, \quad (16)$$

$$R_2 \approx \frac{180 \cdot 0,27\lambda + 0,64}{\pi h}. \quad (17)$$

Для гексагональных столбиков, удовлетворяющих моделям (2) и (3):

$$r_1 \approx 0,69 \frac{180 \lambda}{\pi D}, \quad (18)$$

$$R_1 \approx 0,5 \frac{180 \lambda}{\pi L}, \quad (19)$$

$$r_2 \approx \begin{cases} 40L^{-0,5}, & \lambda = 1,064, \\ 29L^{-0,5}, & \lambda = 0,532, \\ 22L^{-0,5}, & \lambda = 0,355, \end{cases} \quad (20)$$

$$R_2 \approx \begin{cases} 37,5D^{-0,47}, & \lambda = 1,064, \\ 27,5D^{-0,47}, & \lambda = 0,532, \\ 21D^{-0,47}, & \lambda = 0,355. \end{cases} \quad (21)$$

Для гексагональных столбиков, удовлетворяющих модели Okamoto (4):

$$r_1 \approx 0,69 \frac{180 \lambda}{\pi D}, \quad (22)$$

$$R_1 \approx 0,5 \frac{180 \lambda}{\pi L}, \quad (23)$$

$$r_2 \approx \begin{cases} 85D^{-0.7}, & \lambda = 1,064, \\ 65D^{-0.73}, & \lambda = 0,532, \\ 55D^{-0.78}, & \lambda = 0,355, \end{cases} \quad (24)$$

$$R_2 \approx \begin{cases} 45D^{-0.5}, & \lambda = 1,064, \\ 40D^{-0.5}, & \lambda = 0,532, \\ 28D^{-0.5}, & \lambda = 0,355. \end{cases} \quad (25)$$

Сопоставление оценок по приведенным формулам с наблюдаемыми нами в численном счете размерами областей приведено на рис. 8–10, а поскольку точно определить границы областей невозможно, то приведены лишь интервалы, в которых лежат границы.

Видно, что указанные формулы дают верхнюю оценку, пригодную в большинстве прикладных задач. Также видно, что для задач, не требующих особой точности, расчетные интервалы можно уменьшить на 30%.

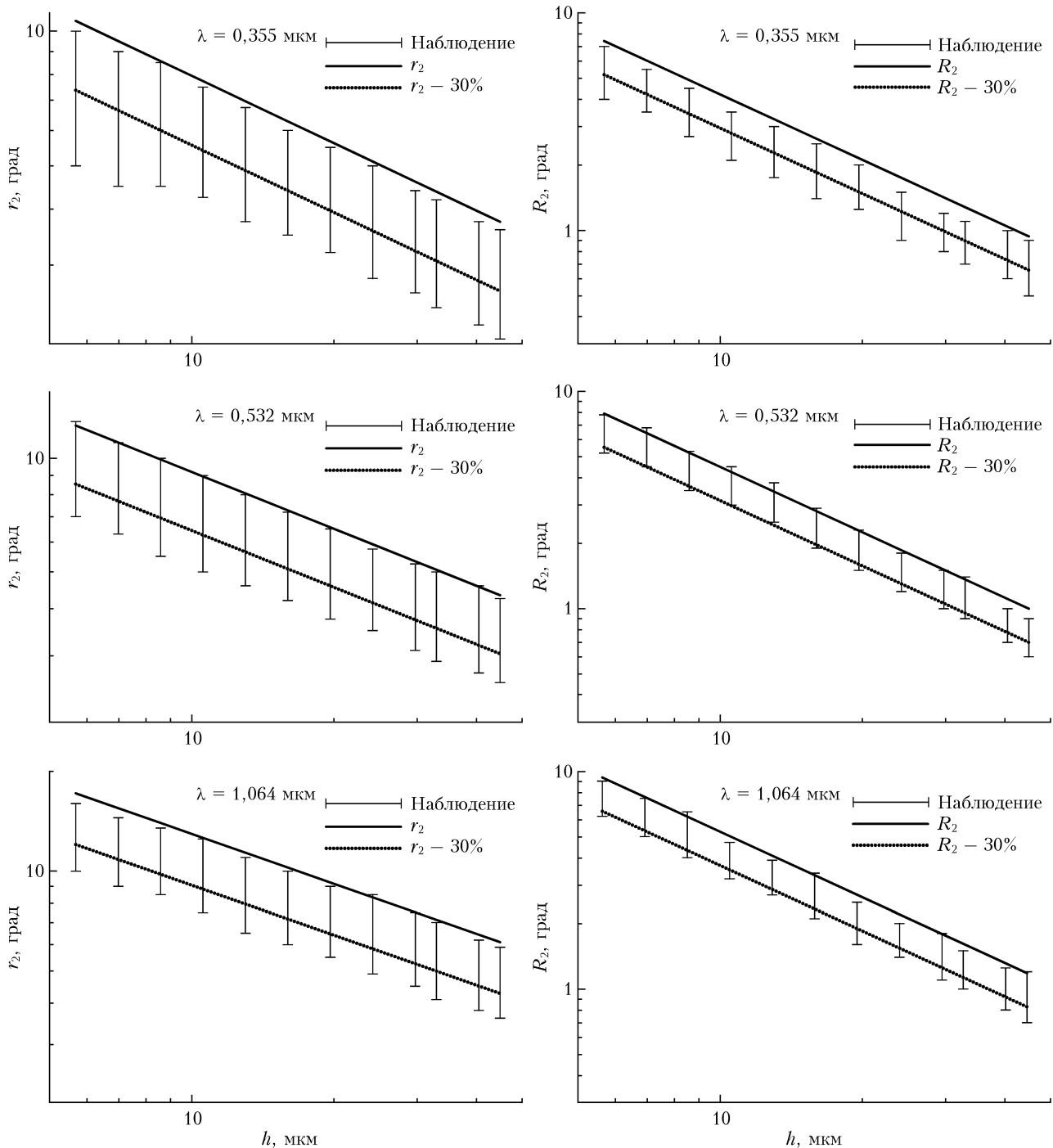


Рис. 8. Сопоставление модельных оценок с результатами наблюдений для пластинок. Микрофизическая модель (1)

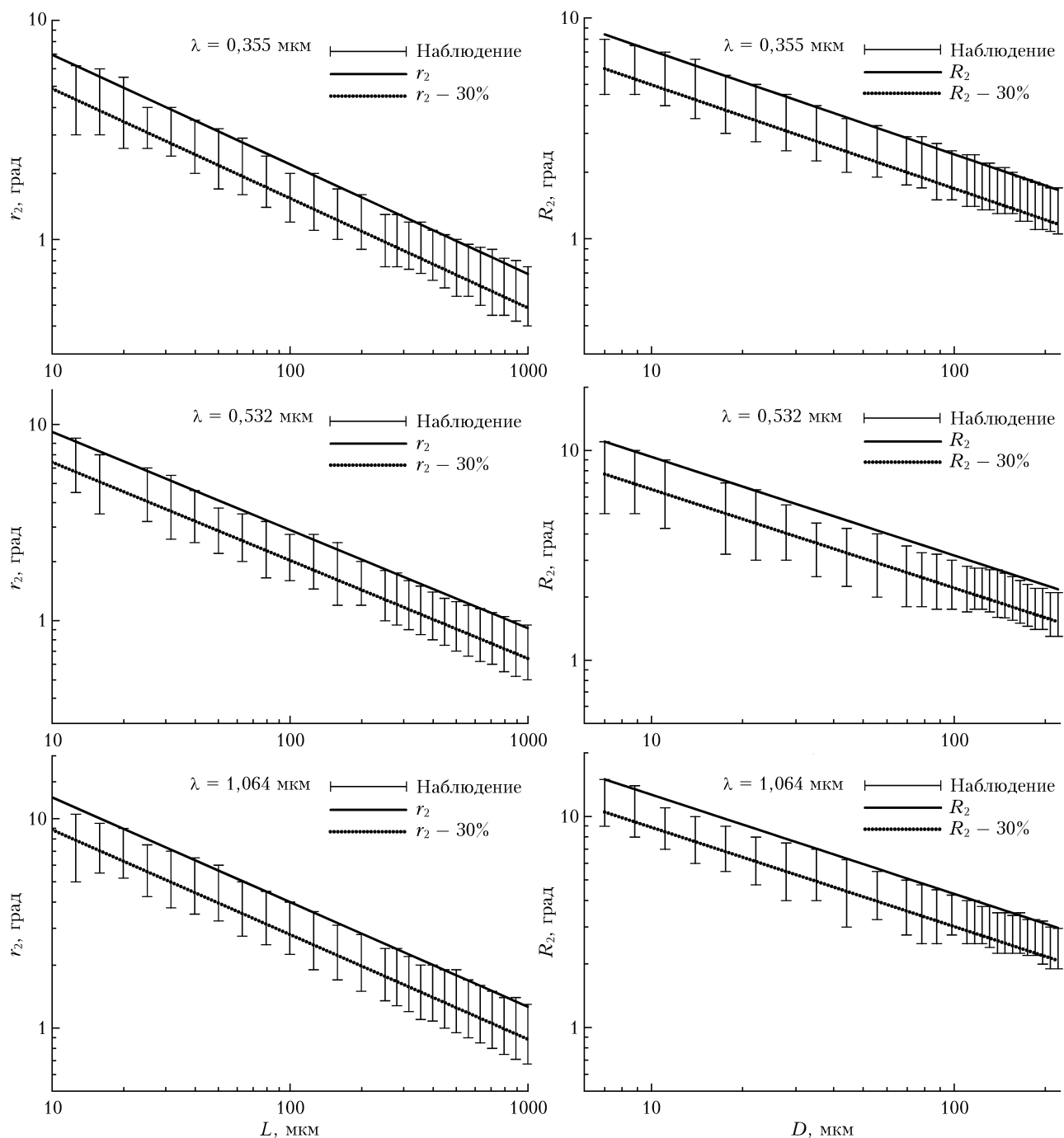


Рис. 9. Сопоставление модельных оценок с результатами наблюдений для столбиков. Микрофизическая модель Mitchell

### Методика расчета матрицы Мюллера для случая наклонного лидара

В предыдущем разделе получено усредненное решение задачи рассеяния света для каждого фиксированного угла  $\beta$  при  $\alpha = 0$ , представленное в виде базы данных матриц Мюллера  $\mathbf{M}_r(\beta)$  с переменным шагом по углу  $\beta$  в указанной на рис. 11, а системе координат. Базис для матрицы Мюллера определен тремя векторами: направлением падения света  $\mathbf{i}$ , вектором, перпендикулярным плоскости рассеяния

$$\mathbf{E}_{\perp}^1 = \begin{cases} \frac{\mathbf{i} \times \mathbf{n}}{|\mathbf{i} \times \mathbf{n}|}, & |\mathbf{i} \times \mathbf{n}| \neq 0, \\ \{0, 1, 0\}, & |\mathbf{i} \times \mathbf{n}| = 0, \end{cases} \quad (26)$$

и вектором  $\mathbf{E}_{\parallel}^1 = \mathbf{i} \times \mathbf{E}_{\perp}^1$ , образующим правую тройку, где  $\mathbf{n}$  — нормаль к шестиугольной грани кристалла.

Необходимо получить решение для случая наклонного лидара для частицы с произвольным углом наклона  $\beta$  и поворота  $\alpha$  (рис. 11, б). Положим, что лидар наклоняется в плоскости  $xOz$  на угол  $\theta$ .

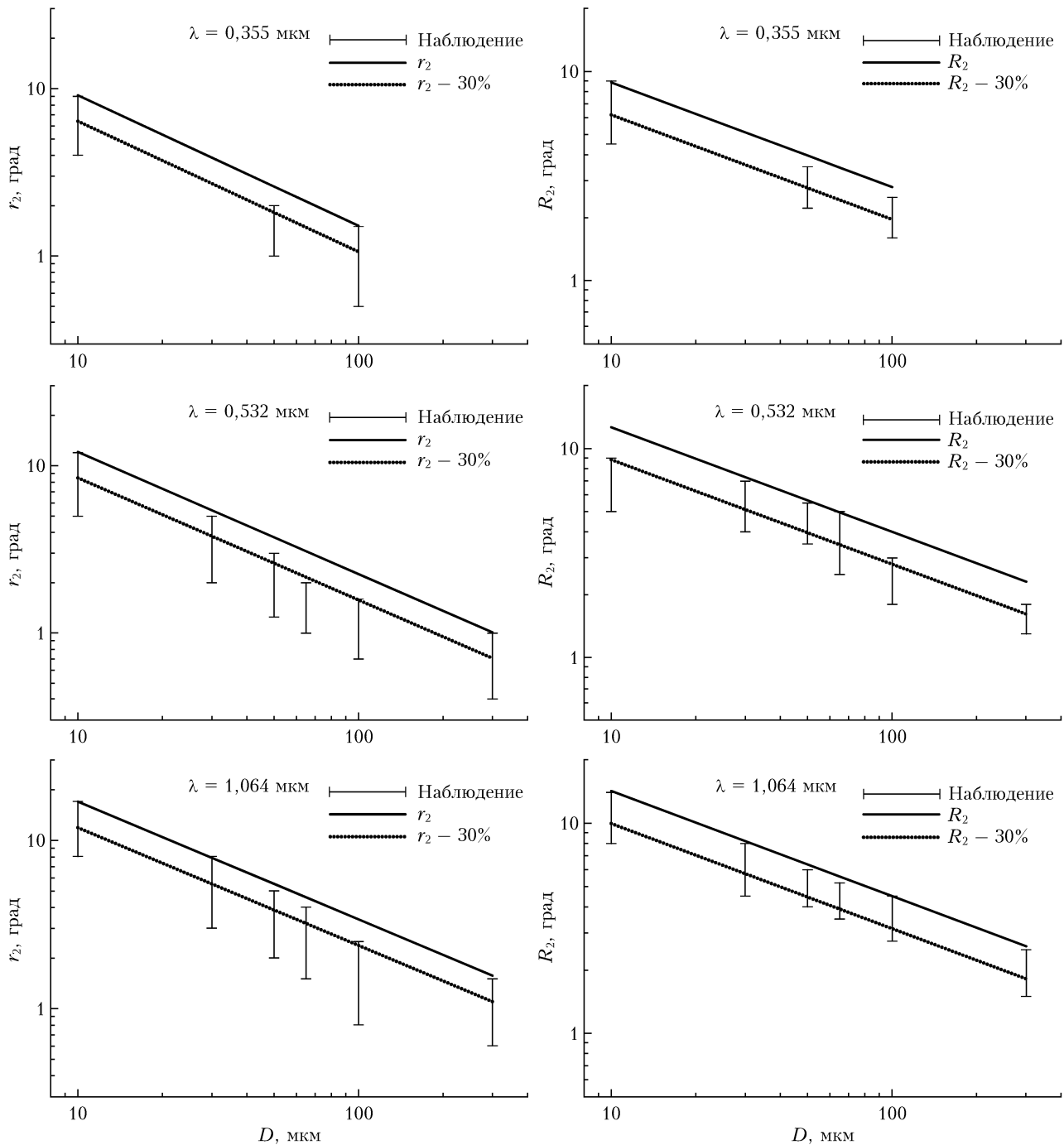


Рис. 10. Сопоставление модельных оценок с результатами наблюдений для столбиков. Микрофизическая модель Okamoto

В этом случае матрица Мюллера для лидара определена базисом в плоскости  $xOz$ , заданным тремя векторами, образующими правую тройку:  $\mathbf{E}_{\parallel}^2 = \mathbf{i} \times \mathbf{E}_{\perp}^1$ , где

$$\mathbf{E}_{\perp}^2 = \frac{\mathbf{z} \times (-\mathbf{i})}{|\mathbf{z} \times (-\mathbf{i})|} \equiv \mathbf{y} = \{0, 1, 0\}. \quad (27)$$

На рис. 11, б также указан вектор  $\mathbf{E}_{\perp}^1$  и два угла  $\varphi = \widehat{\mathbf{E}_{\perp}^2, \mathbf{E}_{\perp}^1}$ ,  $\sigma = \widehat{-\mathbf{i}, \mathbf{n}}$ . Видно, что указанную задачу можно выразить через решение, полученное в преды-

дущем разделе. Для этого сначала нужно перейти от базиса  $\mathbf{E}_{\perp}^2$  к базису  $\mathbf{E}_{\perp}^1$  матрицей поворота  $\mathbf{L}_1(\varphi)$ , затем использовать имеющееся решение, заменив угол  $\beta$  углом  $\sigma$  в матрице  $\mathbf{M}_r$ , затем вернуться обратно к базису  $\mathbf{E}_{\perp}^1$  матрицей поворота  $\mathbf{L}_2(\varphi)$ , что соответствует выражению

$$\mathbf{M}(\alpha, \beta, \theta) = \mathbf{L}_1(\varphi) \mathbf{M}(\sigma) \mathbf{L}_2(\varphi), \quad (28)$$

где матрицы  $\mathbf{L}_1(\varphi)$  и  $\mathbf{L}_2(\varphi)$  совпадают в силу смены направления движения света, а углы  $\sigma$  и  $\varphi$  являются



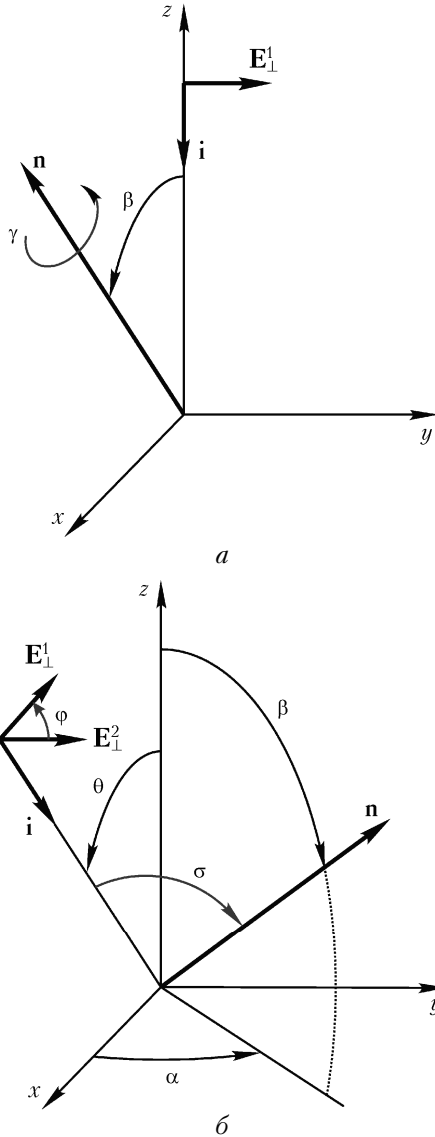


Рис. 11. Системы координат для  $\mathbf{M}_\gamma(\beta)$  (а) и для случая наклонного лидара (б)

неявными функциями углов  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\theta$  и могут быть вычислены по формулам

$$\varphi = \begin{cases} \arccos(\mathbf{E}_\perp^2 \cdot \mathbf{E}_\perp^1), & 0 \leq \alpha < \pi, \\ -\arccos(\mathbf{E}_\perp^2 \cdot \mathbf{E}_\perp^1), & \pi \leq \alpha < 2\pi, \end{cases} \quad (29)$$

$$\sigma = \arccos(-\mathbf{i} \cdot \mathbf{n}). \quad (30)$$

Матрицы  $\mathbf{L}(\varphi)$  и  $\mathbf{M}(\sigma)$  имеют вид

$$\mathbf{L}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(2\varphi) & \sin(2\varphi) & 0 \\ 0 & -\sin(2\varphi) & \cos(2\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (31)$$

$$\mathbf{M}(\sigma) = \begin{cases} \mathbf{M}_\gamma(\sigma), & 0 \leq \sigma \leq \pi/2, \\ \mathbf{M}_\gamma(\pi - \sigma), & \pi/2 < \sigma \leq \pi, \end{cases} \quad (32)$$

поскольку  $\mathbf{M}_\gamma$  в силу симметрии частицы рассчитывается только для углов меньше  $\pi$ .

Полученная матрица (28) усредняется по углам поворота частицы  $\alpha$  согласно выражению

$$\mathbf{M}_{\alpha\gamma}(\beta, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathbf{M}(\alpha, \beta, \theta) d\alpha. \quad (33)$$

Отметим, что в случае вертикального лидара ( $\theta = 0$ ) имеем  $\sigma = \beta$ ,  $\varphi = \alpha$  и выражение (33) примет классический вид усреднения по углу поворота

$$\mathbf{M}_{\alpha\gamma}(\beta, \theta = 0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathbf{L}(\alpha) \mathbf{M}_\gamma(\beta) \mathbf{L}(\alpha) d\alpha. \quad (34)$$

### Усреднение по углу наклона частицы. Полученные результаты

На последнем этапе производится усреднение матрицы  $\mathbf{M}_{\alpha\gamma}$  согласно выбранному закону распределения по углам наклона  $p(\beta)$ :

$$\langle \mathbf{M}(\theta) \rangle = \int_0^{\pi/2} \mathbf{M}_{\alpha\gamma}(\beta, \theta) p(\beta) \sin(\beta) d\beta, \quad (35)$$

где  $p(\beta)$  согласно (7) имеет вид

$$p(\beta) = \exp\left(\frac{-t^2}{2\beta_{eff}^2}\right) \left( \int_0^{\pi/2} \exp\left(\frac{-t^2}{2\beta_{eff}^2}\right) \sin(\beta) d\beta \right)^{-1}, \quad (36)$$

при этом  $t = \beta$  для пластинок и  $t = \pi/2 - \beta$  для столбиков.

Нами рассчитаны матрицы Мюллера для гексагональных пластинок и столбиков, соответствующих микрофизическим моделям (1) и (2), для частиц размерами от 10 до 1000 мкм. Результаты получены для трех длин волн 0,355, 0,532, 1,064 мкм, для углов наклона лидара 0 и 5°, для эффективных углов наклона частицы  $\beta_{eff}$  от 0 до 90°, а также для полностью хаотически ориентированных частиц. Результаты доступны в банке данных по ссылке [35]. В качестве примера на рис. 12 представлено деполяризационное отношение для гексагонального столбика для микрофизической модели (2).

### Заключение

Представленная методика решения задачи рассеяния света на ледяных кристаллических частицах в направлении рассеяния назад методом физической оптики позволяет существенно ускорить процесс получения решения. Предложенная авторами функция оценки дифракционного вклада позволяет эффективно получить предварительную информацию о списке геометрооптических пучков, вносящих основной вклад в обратное рассеяние.

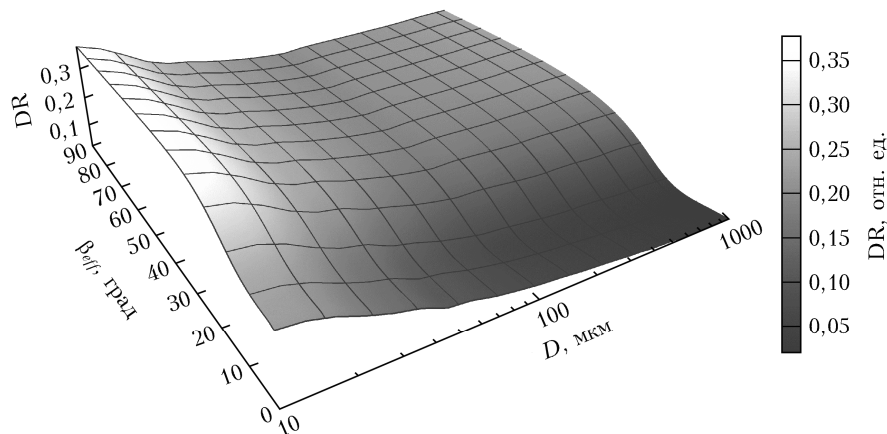


Рис. 12. Деполяризационное отношение (DR) для гексагонального столбика в зависимости от эффективного угла наклона и размера частицы

В статье подробно исследованы угловые размеры трех характерных областей в профиле интенсивности в зависимости от угла наклона частицы. Установленные эмпирические закономерности дают возможность произвести выбор оптимального шага по углу наклона на этапе численного интегрирования, что значительно ускоряет процесс решения без снижения его точности.

Предложенная аналитическая формула, с помощью которой можно получать решения для наклонного лидара на основе известного решения для вертикального лидара, позволяет значительно (в сотни раз) сократить трудоемкость получения решения.

Представленный авторами банк данных матриц Мюллера для гексагональных ледяных кристаллических частиц, размещенный в открытом доступе, позволяет строить эффективные алгоритмы интерпретации лидарного сигнала, что имеет важное значение для задач атмосферной оптики.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты № 15-05-06100а, 15-55-53081), Минобрнауки РФ в рамках «Программы повышения конкурентоспособности ТГУ», частичной поддержке РНФ (соглашение № 14-27-00022), Гранта президента РФ (МК-6680.2015.5).

1. Самохвалов И.В., Кауль Б.В., Насонов С.В., Животенюк И.В., Брюханов И.Д. Матрица обратного рассеяния света зеркально отражающих слоев облаков верхнего яруса, образованных кристаллическими частицами, преимущественно ориентированными в горизонтальной плоскости // Оптика атмосфер. и океана. 2012. Т. 25, № 5. С. 403–411.
2. Балин Ю.С., Кауль Б.В., Коханенко Г.П. Наблюдения зеркально отражающих частиц и слоев в кристаллических облаках // Оптика атмосфер. и океана. 2011. Т. 24, № 4. С. 293–299.
3. Кауль Б.В., Волков С.Н., Самохвалов И.В. Результаты исследований кристаллических облаков посредством лидарных измерений матриц обратного рассеяния света // Оптика атмосфер. и океана. 2003. Т. 16, № 4. С. 354–361.
4. Borovoi A., Balin Y., Kokhanenko G., Penner I., Konoshonkin A., Kustova N. Layers of quasi-horizontally oriented ice crystals in cirrus clouds observed by a two-wavelength polarization lidar // Opt. Exp. 2014. V. 22, N 20. P. 24566–24573.

5. Sassen K., Benson S. A midlatitude cirrus cloud climatology from the Facility for Atmospheric Remote Sensing: II. Microphysical properties derived from lidar depolarization // J. Atmos. Sci. 2001. V. 58, N 15. P. 2103–2112.
6. Cho H.M., Yang P., Kattawar G.W., Nasiri S.L., Hu Y., Minnis P., Trepte C., Winker D. Depolarization ratio and attenuated backscatter for nine cloud types: Analyses based on collocated CALIPSO lidar and MODIS measurements // Opt. Exp. 2014. V. 16, N 6. P. 3931–3948.
7. Noel V., Chepfer H., Ledanois G., Delaval A., Flamant P.H. Classification of particle effective shape ratios in cirrus clouds based on the lidar depolarization ratio // Appl. Opt. 2002. V. 41, N 21. P. 4245–4257.
8. Liou K.N. Influence of cirrus clouds on weather and climate processes: A global perspective // Mon. Wea. Rev. 1986. V. 114, N 6. P. 1167–1199.
9. Liu C., Panetta R.L., Yang P. Application of the pseudo-spectral time domain method to compute particle single-scattering properties for size parameters up to 200 // J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer. 2012. V. 113, N 13. P. 1728–1740.
10. Bi L., Yang P., Kattawar G.W., Baum B.A., Hu Y.X., Winker D.M., Brock R.S., Lu J.Q. Simulation of the color ratio associated with the backscattering of radiation by ice particles at the wavelengths of 0.532 and 1.064  $\mu\text{m}$  // J. Geophys. Res. 2009. V. 114. P. D00H08.
11. Takano Y., Liou K.N. Solar radiative transfer in cirrus clouds. Part I. Single-scattering and optical properties of hexagonal ice crystals // J. Atmos. Sci. 1989. V. 46, N 1. P. 3–19.
12. Коношонкин А.В., Боровой А.Г. Зеркальное рассеяние света на ледяных кристаллах облаков и взволнованной поверхности воды // Оптика атмосфер. и океана. 2013. Т. 26, № 1. С. 64–69.
13. Коношонкин А.В., Кустова Н.В., Боровой А.Г. Граница применимости приближения геометрической оптики для решения задачи обратного рассеяния света на квазигоризонтально ориентированных гексагональных ледяных пластинках // Оптика атмосфер. и океана. 2014. Т. 27, № 8. С. 705–712.
14. Borovoi A., Konoshonkin A., Kustova N. The physical-optics approximation and its application to light backscattering by hexagonal ice crystals // J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer. 2014. V. 146. P. 181–189.
15. Коношонкин А.В., Кустова Н.В., Осипов В.А., Боровой А.Г., Masuda K., Ishimoto H., Okamoto H. Метод физической оптики для решения задачи рассеяния света на кристаллических ледяных частицах: сравнение

- дифракционных формул // Оптика атмосф. и океана. 2015. Т. 28, № 9. С. 830–843.
16. *Bi L., Yang P., Kattawar G.W., Hu Y., Baum B.A.* Scattering and absorption of light by ice particles: Solution by a new physical-geometric optics hybrid method // *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer.* 2011. V. 112, N 9. P. 1492–508.
  17. *Коношонкин А.В., Кустова Н.В., Боровой А.Г.* Особенности в деполяризованном отношении лидарных сигналов для хаотически ориентированных ледяных кристаллов перистых облаков // Оптика атмосф. и океана. 2013. Т. 26, № 5. С. 385–387.
  18. *Borovoi A., Konoshonkin A., Kustova N., Okamoto H.* Backscattering Mueller matrix for quasihorizontally oriented ice plates of cirrus clouds: Application to CALIPSO signals // *Opt. Exp.* 2012. V. 20, N 27. P. 28222–28233.
  19. *Borovoi A., Konoshonkin A., Kustova N.* Backscatter ratios for arbitrary oriented hexagonal ice crystals of cirrus clouds // *Opt. Lett.* 2014. V. 39, N 19. P. 5788–5791.
  20. *Коношонкин А.В., Кустова Н.В., Боровой А.Г.* Алгоритм трассировки пучков для задачи рассеяния света на атмосферных ледяных кристаллах. Часть 1. Теоретические основы алгоритма // Оптика атмосф. и океана. 2015. Т. 28, № 4. С. 324–330.
  21. *Коношонкин А.В., Кустова Н.В., Боровой А.Г.* Алгоритм трассировки пучков для задачи рассеяния света на атмосферных ледяных кристаллах. Часть 2. Сравнение с алгоритмом трассировки лучей // Оптика атмосф. и океана. 2015. Т. 28, № 4. С. 331–337.
  22. *Mitchell D.L.* A model predicting the evolution of ice particle size spectra and radiative properties of cirrus clouds. Part 1. Microphysics // *J. Atmos. Sci.* 1994. V. 51, N 6. P. 797–816.
  23. *Auer A.H., Veal D.L.* The dimension of ice crystals in natural clouds // *J. Atmos. Sci.* 1970. V. 27, N 6. P. 919–926.
  24. *Sato K., Okamoto H.* Characterization of  $Z(e)$  and LDR of nonspherical and inhomogeneous ice particles for 95-GHz cloud radar: Its implication to microphysical retrievals // *J. Geophys. Res.* 2006. V. 111. P. D22213.
  25. *Heymsfield A.J., Miloshevich L.M.* Parameterizations for the Cross-Sectional Area and Extinction of Cirrus and Stratiform Ice Cloud Particles // *J. Atmos. Sci.* 2003. V. 60, N 7. P. 936–956.
  26. *Heymsfield A.J., Bansemer A., Field P.R., Durden S.L., Stith J., Dye J.E., Hall W.* Observations and parameterizations of particle size distributions in deep tropical cirrus and stratiform precipitating clouds: Results from in situ observations in TRMM field campaigns // *J. Atmos. Sci.* 2002. V. 59, N 24. P. 3457–3491.
  27. *Самохвалов И.В., Насонов С.В., Брюханов И.Д., Боровой А.Г., Кауль Б.В., Кустова Н.В., Коношонкин А.В.* Анализ матрицы обратного рассеяния перистых облаков с аномальным обратным рассеянием // Изв. вузов. Физ. 2013. № 8/3. С. 281–283.
  28. *Кауль Б.В., Самохвалов И.В.* Ориентация частиц кристаллических облаков  $Ci$ : Часть 1. Ориентация при падении // Оптика атмосф. и океана. 2005. Т. 18, № 11. С. 963–967.
  29. *Кауль Б.В., Самохвалов И.В.* Ориентация частиц в кристаллических облаках  $Ci$ : Часть 2. Азимутальная ориентация // Оптика атмосф. и океана. 2006. Т. 19, № 1. С. 44–46.
  30. *Кауль Б.В., Самохвалов И.В.* Физические факторы, определяющие пространственную ориентацию частиц кристаллических облаков // Оптика атмосф. и океана. 2008. Т. 21, № 1. С. 27–34.
  31. *Konoshonkin A., Kustova N., Borovoi A.* Beam-splitting code for light scattering by ice crystal particles within geometric-optics approximation // *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer.* 2015. V. 164. P. 175–183.
  32. *Borovoi A., Konoshonkin A., Kustova N.* Backscattering reciprocity for large particles // *Opt. Lett.* 2013. V. 38, N 9. P. 1485–1487.
  33. *Borovoi A., Konoshonkin A., Kustova N.* Backscattering by hexagonal ice crystals of cirrus clouds // *Opt. Lett.* 2013. V. 38, N 15. P. 2881–1884.
  34. *Borovoi A., Kustova N., Konoshonkin A.* Interference phenomena at backscattering by ice crystals of cirrus clouds // *Opt. Exp.* 2015. V. 23, N 19. P. 24557–24571.
  35. URL: [ftp://ftp.iao.ru/pub/GWDT/Physical\\_optics/Backscattering/](ftp://ftp.iao.ru/pub/GWDT/Physical_optics/Backscattering/)

***A.V. Konoshonkin, N.V. Kustova, V.A. Shishko, A.G. Borovoi. Method of solving the problem of the light backscattering by ice crystals of cirrus clouds within the physical optics approximation for a lidar with zenith scanning.***

The method of solving the light scattering problem in the backscattering direction within the framework of physical optics approximation has been considered. The recommendations on preliminary estimate of the contribution geometrical optics beams to the backward direction that can reduce the number of the beams for the calculation has been given. Presented empirical estimates and the guidelines for choosing the optimal step of numerical integration can significantly reduce the resource consumption of the physical optics method. The results of the solutions of the light scattering problem are available free in the form of a data bank of the Mueller matrices.