



Проблемы логики и методологии науки

УДК 165.41

DOI:

10.15372/PS20200305

В.В. Целищев, А.В. Хлебалин

ИНТЕНСИОНАЛЬНОСТЬ В МАТЕМАТИКЕ И НЕВОЗМОЖНЫЕ ВОЗМОЖНЫЕ МИРЫ*

В статье анализируется способ экспликации интенциональности математического дискурса средствами семантики возможных миров. Несмотря на представление об экстенциональности математики, математические результаты, в частности вторая теорема Гёделя о неполноте, существенно зависят от интерпретации значения математических терминов. Показано, что это затруднение может быть преодолено средствами семантики возможных миров. Вместе с тем обосновывается тезис, что семантика возможных миров С. Крипке не решает указанную проблему в связи с предусмотренной в ней экстенсинализацией интенционального содержания. Тогда как семантика возможных миров Я. Хинтикки и его концепция невозможных возможных миров являются плодотворным средством обнаружения и объяснения интенциональности математического дискурса.

Ключевые слова: интенциональность математики; модальная логика; семантика возможных миров; невозможные возможные миры

V.V. Tselishchev, A.V. Khlebalin

INTENSIONALITY IN MATHEMATICS AND IMPOSSIBLE POSSIBLE WORLDS

The paper analyzes a method of explication of detection and explication of intensionality of mathematical discourse by means of possible worlds semantics. Although there is an idea about extensionality of mathematics, mathematical results, particularly Gödel's Second Incompleteness Theorem, essentially depend on how the meaning of mathematical terms is interpreted. The authors show that this difficulty can be overcome by means of possible worlds semantics.

* Статья подготовлена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 19-011-00518).
© Целищев В.В., Хлебалин А.В., 2020

At the same time, the thesis is substantiated that Kripke's possible worlds semantics does not solve the mentioned problem because it assumes extensionalization of the intensional content. Whereas Hintikka's possible worlds semantics and his concept of impossible possible worlds are a fruitful approach for discovering and explaining the intensionality of mathematical discourse.

Keywords: intensionality of mathematics; modal logic; possible worlds semantics; impossible possible worlds

Проблема различения экстенциональных и интенциональных контекстов лежит в области логики. Математический дискурс является экстенциональным, поскольку математические определения и понятия не подвержены смысловым оттенкам, которые суть проявление неоднозначности соответствующего языка. В первую очередь такая неоднозначность обусловлена употреблением языка в прямом и косвенном модусах, свойственных и модальным контекстам. Различение контекстов связано с нарушением в косвенных контекстах фундаментального логического закона, сформулированного еще Лейбницем, – закона подставимости тождественного. Исчисление равенств Лейбница, предшественник формальных систем логики и математики, основано на строгом соблюдении этого закона. Как показал У. Куайн, кванторная модальная логика, где этот закон нарушается, чревата парадоксами [13]. В формальных системах математики парадоксы исключены, и до недавнего времени понятие интенциональности в математике было скорее оксюмороном, нежели осмысленным словоупотреблением.

Но как оказалось, один из важнейших результатов математической логики, а именно вторая теорема Гёделя о неполноте арифметики, потребовал пересмотра «предубежденности» в отношении интенциональности в математике. Доказательство теоремы оказалось интенциональным, поскольку при формализации концепции непротиворечивости важным было то, какой смысл придается этой концепции, т.е. какое именно неформальное свойство математического дискурса используется в доказательстве [6]. Истинность теоремы зависит от «правильного» выбора, а сама правильность коренится в смысле формализуемых свойств. Так как истинность второй теоремы Гёделя общепризнанна, остается понять, насколько математическому дискурсу присуща интенциональность.

Можно ли провести параллель между нарушением закона подставимости тождественного в лингвистических контекстах и его нарушением в математическом дискурсе? В законе главную роль играет понятие синонимии как экспликации «тождественного». Следует говорить о том, что в экстенциональных контекстах замена в предложении термина его синонимом сохраняет истинность предложения. Р. Карнап сосредоточил

свое внимание на понятии синонимии, тогда как У. Куайн подверг это понятие критике [2]. Хотя долгое время считалось, что в этой полемике победа на стороне Куайна, в настоящее время ситуация не расценивается таким образом [3, с. 245–247]. Даже если отказаться от понятия синонимии, в любом случае требуется некоторого рода аналог. Я. Перегрин предложил анализ закона подставимости тождественного с использованием подобного аналога, параллельный использованию его в математическом дискурсе [11].

Пусть имеется предложение

(1) Иван бородат.

Если есть эмпирическое свидетельство, что Иван оказывается самым высоким из бородатых мужчин, мы как будто в полном праве утверждать

(2) Самый высокий бородатый мужчина бородат.

Эти два предложения имеют разный эпистемический характер: (1) несет эмпирическую информацию, а (2) является трюизмом. Это различие объясняется зависимостью (2) от эмпирического дополнительно-го обстоятельства, которое имеет следующий вид:

(3) Иван – самый высокий бородатый мужчина.

Таким образом, это эмпирическое обстоятельство не позволяет заключить, что (1) и (2) имеют одно и то же значение. Подразумеваемая синонимия не должна зависеть от эмпирических факторов. Могут ли быть случаи, аналогичные (1) и (2), где не было бы влияния этих самых эмпирических факторов? Их отсутствие привычно в случае математики, и тогда вопрос переадресуется в сторону математического дискурса. Пусть имеется утверждение

(1*) Арифметика Пеано (РА) непротиворечива.

Это предложение будет истинным, если РА на самом деле истинна. Непротиворечивость формальной системы РА означает, что ее часть также является непротиворечивой. Тогда мы вправе заключить, что

(2*) самая большая непротиворечивая теория, являющаяся частью РА, непротиворечива.

Опять-таки, как и в предыдущем примере, (1*) и (2*) говорят как будто одно и то же. Но они также должны были бы иметь разный эпистемический статус. Причиной этого было бы утверждение

(3*) РА есть самая большая непротиворечивая теория, входящая в РА.

Однако аналогия с предыдущим примером тут нарушается, потому что (3*) не является эмпирическим примером, а является хотя и тривиальным, но логическим выводом. Так что вполне естественным было бы искушение объявить, что (1*) и (2*) имеют одно и то же значение. Здесь мы наталкиваемся на трудность, заключающуюся в том, что сложно помыслить однозначную реакцию на это искушение. Есть ощущение, что все-таки (1*) и (2*) различны уже потому, что (2*) носит откровенно искусственный характер. Так что сама постановка вопроса может показаться искусственной. Однако, как оказалось, простота приведенных примеров не дает представления об истинной сложности проблемы интенциональности в математике.

Если мы имеем дело с формальными системами арифметики типа РА, символы в этих системах, строго говоря, не имеют «значения», помимо того, что следует из определений. Но доказательство второй теоремы Геделя обязывает нас к исключению из этого правила, а именно к тому, что некоторые символы имеют значение. Как уже было сказано, к таким символам относится утверждение о непротиворечивости формальных систем арифметики, когда мы должны осознанно выбирать, что будем подразумевать под формальным символом, означающим непротиворечивость. Сам акт того, что выше было названо «подразумевать», тесно связан с проблемой перевода содержательных математических понятий (скажем, непротиворечивости) в формальный вид, и от того, как мы сделаем этот перевод, зависит справедливость теоремы [5]. Дело в том, что разные переводы приводят к разным результатам, хотя переводы эти предполагаются эквивалентными, пусть и с экстенциональной точки зрения. Следует ли при этом считать, что один перевод более «правилен», чем другой? С точки зрения логики первого порядка при указанной эквивалентности сама постановка вопроса о «правильности» невозможна. Но оказывается, что при одном переводе вторая теорема Геделя справедлива, а при другом – нет. Таким образом, от перевода зависит многое, и эта зависимость была названа С. Фефферманом интенциональностью [6].

Рассмотрим механизм возникновения интенциональности детально. Бинарный предикат $\text{Prf}(x, y)$ выполним, когда x есть геделев номер РА-доказательства предложения с геделевым номером y . Отсюда имеем предикат доказательства $\text{Prov}(x)_{\text{Df}} = \exists v \text{Prf}(v, x)$. Исходя из интуитивных соображений, что непротиворечивость есть невозможность доказательства ложного предложения, можно определить непротиворечивость Con следующим образом:

$$\text{Con} =_{\text{Df}} \neg \text{Prov}(*\perp*),$$

где $*x*$ означает геделев номер x . Именно при таком определении непротиворечивости вторая теорема Геделя справедлива.

Но свойство непротиворечивости системы может быть определено и по-другому. Возьмем другой бинарный предикат $\text{Prf}^{\#}(x, y)$, определив его как

$$\text{Prf}^{\#}(x, y) =_{\text{Df}} \text{Prf}(x, y) \ \& \ (\forall v \leq x) \neg \text{Prf}(v, *\perp*).$$

Легко видеть, что это определение схватывает точно то в интуитивном понятии непротиворечивости, что и определение Prf , т.е. в интуитивном смысле они эквивалентны. То же относится к новому определению предиката доказуемости, аналогичному прежнему, а именно $\text{Prov}^{\#}(y) =_{\text{Df}} \exists v \text{Prf}^{\#}(v, y)$. Ясно, что $\text{Prov}^{\#}$ выражает свойство быть теоремой РА в той же степени, что и Prov . Таким образом, $\text{Con}^{\#} =_{\text{Df}} \neg \text{Prov}^{\#}(*\perp*)$, т.е. $\text{Con}^{\#}$ утверждает, что РА непротиворечива. Однако сразу следует, что $\text{РА} \vdash \text{Con}^{\#}$, что вступает в противоречие со второй теоремой Геделя о невозможности доказательства непротиворечивости системы в рамках самой системы [15, р. 262–263].

Есть ощутимый контраст между строгой аргументацией об интенциональном характере второй теоремы Геделя и весьма расплывчатым пониманием того, что представляет собой интенциональность. Может вообще возникать вопрос, имеют ли вообще два употребления термина «интенциональность» что-то общее. В современной логической семантике экстенциональность ассоциируется с функцией указания, а интенциональность – с функцией значения. Эти ассоциации идут от введенного Г.Фреге различия *Bedeutung* (экстенциональность) и *Sinn* (интенциональность). Такое различие позволяет по-настоящему разделить экстенциональность и интенциональность, поскольку лингвистическое выражение может иметь один и тот же *Bedeutung*, но разные

Sinne. Это объясняет тот факт, что два выражения могут указывать на один и тот же объект, но иметь различные значения. Идеи Фреге нашли отражение в трактовке Р. Карнапом экстенционала и интенционала как производных от понятия описания состояний [1]. Однако точная трактовка семантики для модальностей, в том числе пропозициональных установок, стала возможной с появлением семантики для модальной логики, традиционно называемой семантикой Крипке. (Справедливости ради надо заметить, что пионером тут был С. Кангер, а одновременно с С. Крипке такую же семантику предложил Я. Хинтикка, названную им моделями для модальностей). (Это замечание в данной статье не является данью историческим фактам, а имеет важное значение для прояснения ситуации с интенциональностью в математике).

Дело в том, что семантика Крипке фактически элиминирует интенциональности путем сведения их к экстенциональностям. Концептуальный аппарат семантики возможных миров позволяет рассматривать интенциональность как функцию от возможных миров к соответствующим объемам терминов. Если такого рода объем сводится к индивиду, он становится обладателем интенционального свойства сверх обладания объемом, или экстенционалом. При этом важно, что релевантные к ситуации возможные миры являются достижимыми от действительного мира с помощью некоторого логического отношения (достижимости). В этом смысле интенциональность зависит от того, какова при этом совокупность возможных миров, что и определяет собственно значение соответствующих концепций. «Число» возможных миров зависит от описываемых эмпирических фактов, и согласно теории информации утверждение тем более информативно, чем больше оно исключает альтернатив, т.е. возможных миров. Но в любом случае смысл термина или предложения варьируется от их «числа», т.е. от числа возможных миров, «достижимых» от действительного мира.

Именно здесь возникает затруднение в экспликации концепции интенциональности для математического дискурса. Дело в том, что в словаре семантики возможных миров математические утверждения истинны во всех возможных мирах. Это означает, что интенциональность как функция от миров к объекту оказывается просто константой. Это полностью обесценивает идею интенциональности в данном контексте и приводит в свете реальной интенциональности второй теореме Геделя к фундаментальному затруднению. В конечном счете даже если не принимать во внимание столь значимый результат, как эта теорема, все равно понятно, что постижимость математических выражений зависит от интенциональ-

ного аспекта, поскольку чисто экстенциональный аспект просто недостаточен. Таким образом оказывается, что объяснение интенциональности с помощью семантики возможных миров не является плодотворным.

Один из путей преодоления этого затруднения заключается в ревизии понятия возможного мира. Я. Перегрин в уже упомянутой статье кратко говорит о возможности такой ревизии в обращении к введенному Я. Хинтиккой понятию невозможного возможного мира. Идея состоит в отказе от использования интерпретации семантики Крипке. Дело в том, что она имеет дело с алетическими модальностями, или же, попросту, логическими модальностями. Следствием этого является то, что возможные миры интерпретируются «онтологически», и хотя сам Крипке говорит о том, что существует лишь один, действительный мир, достижимость от него других возможных миров никак не зависит от нелогических факторов. Понятие достижимости является чистой логической конструкцией в виде отношения, которое удовлетворяет определенным свойствам (рефлексивности, транзитивности, асимметричности и т.п.). Между тем можно потребовать, чтобы отношение достижимости носило более реалистичный характер. Я. Хинтикка настаивает на том, что подобный реализм необходим при рассмотрении возможных миров как эпистемических альтернатив, достижимых с точки зрения познающего субъекта, находящегося в действительном мире. Это означает, что возможные миры у Хинтикки являются «эпистемически» возможными. Самый интересный аспект в этой ситуации – то, что эпистемически возможными мирами могут быть такие миры, которые невозможны онтологически.

Введение эпистемических возможных миров – само по себе благоприятная почва для интенциональностей, поскольку концепция познания предоставляет широкие перспективы для понимания природы интенциональности. Вопрос заключается только в том, что является эпистемически возможным. Для разрешения этого вопроса нужно иметь соответствующую концептуальную схему, в которой было бы понятно, как могут эпистемически возможные миры превышать логически возможные миры. Фактически это означает в определенном смысле выход за пределы логики, поскольку эпистемически возможные миры могут оказаться «невозможными возможными мирами». Хинтикка показал, что такая ситуация концептуально реализуема, если подвергнуть сомнению некоторые неявные предположения относительно применимости семантики возможных миров к анализу знания. Таким предположением является следующее утверждение:

(Н)Каждый эпистемически возможный мир логически возможен.

Это предположение означает, что для данного действительного мира W его эпистемические альтернативы (контрфактические предположения) должны быть логически возможными. Именно это предположение ответственно за парадокс всеведения, один из способов разрешения которого состоит, следовательно, в отказе от (Н) [8]. Но такой отказ означает радикальную ревизию вопроса о соотношении логики и знания: знание предполагается не противоречащим логике. И поэтому апелляция к логически невозможным возможным мирам означает нарушение принятой семантики возможных миров. Однако в самой постановке вопроса кроется такая модификация этой семантики, при которой она становится пригодной для реального объяснения феномена интенциональности в математике. Следует отметить, что эпистемические соображения по поводу такой модифицированной семантики уместны в данном контексте, потому что интенциональность в пропозициональных установках, конечно же, есть результат опять-таки эпистемического аспекта анализа логических структур.

При введении концепции невозможных возможных миров требуется иметь в виду два этапа: во-первых, это задание синтаксиса и, во-вторых, задание собственно семантики. Соотношение их определяется возможностью такой ситуации, когда онтологически непротиворечивая система на определенном уровне своей структуры может оказаться (с точки зрения эпистемического агента) противоречивой. При этом синтаксическая система должна рассматриваться динамически, т.е. как становящаяся структура. Такой логической системой может быть представление логики первого порядка в дистрибутивной нормальной форме [7].

Любое утверждение, сформулированное на языке логики первого порядка, истинно в одних описаниях состояния и ложно в других. Все такие описания состояния являются альтернативами друг другу, что и находит выражение в семантике в виде возможных миров. Один из этих возможных миров принимается за действительный, и тогда другие альтернативы оказываются совместимыми с тем знанием, которое имеется у эпистемического агента. Он, делая такое утверждение, принимает одни и отрицает другие альтернативы. Утверждение является тем более информативным, чем больше альтернатив оно

отрицает. Г. фон Вригт предложил для пропозициональной логики точную форму предложения, из которой видно, что принимается, а что отрицается, путем расписывания предложения в дистрибутивной нормальной форме. Я. Хинтикка обобщил этот метод на логику первого порядка.

Утверждение в дистрибутивной нормальной форме может быть представлено конечным множеством конечных деревьев, называемым конституентой. Конституента является описанием конечного числа индивидов с их свойствами и взаимными отношениями. Каждый узел дерева выступает таким описанием, а в целом конституента характеризуется числом узлов от наименьшего (нулевого) до заданного узла d . Путь вдоль узлов (ветвь логического дерева) определяет индивид, а узел любой глубины определяет свойства и соотношения индивида с другими индивидами на той же самой ветви [4]. Интересующим нас в данном случае свойством такого представления логических утверждений является то, что непротиворечивая конституента глубины d может оказаться противоречивой на глубине $d+n$. Число n , которое характеризует «окончательное» суждение по поводу того, является ли конституента непротиворечивой, неизвестно: этот факт служит свидетельством важного обстоятельства – действия теоремы Черча о неразрешимости логики первого порядка. Действительно, знание n позволило бы говорить о разрешающей процедуре.

С содержательной точки зрения это означает следующее. Конституента, являющаяся представлением некоторого утверждения, может быть непротиворечивой онтологически. Другими словами, соответствующее ей утверждение может быть непротиворечивым или противоречивым при окончательном анализе. Однако для эпистемического агента такой окончательный анализ недоступен, и дистрибутивная нормальная форма отражает степень его «неуверенности» в этом вопросе. Увеличение параметра d ведет эпистемического агента ко все большей уверенности относительно определенного ответа, но не может быть завершено (ввиду теоремы Черча). Эпистемический агент «простирает» свое знание на возможные миры, которые совместимы с тем, что он знает на определенной стадии познания (в данном случае в смысле логическом, а не временном). Его знанию присущи детальность и точность, которые характеризуются уровнем логического анализа (в нашем случае параметром d). Увеличение знания (или информации о мире) отождествляется с уменьшением числа альтернатив, т.е. с устранением противоречивых возможных миров при переходе от d к $d+1$ ($d+2$ и т.д.). Динамика разви-

тия знания состоит в том, что d -инвариантный мир не обязательно будет $(d+1)$ -инвариантным миром.

Этот анализ имеет непосредственное отношение к термину «невозможный возможный мир». Невозможным миром является логически ложное описание состояния, которое не может быть реализовано онтологически. Для эпистемического агента такая уверенность есть результат окончательного анализа, который ему недоступен. Ему доступен определенный уровень «расписывания» конstituенты до параметра d (глубина расписывания). Предположим, что окончательный анализ достигается на уровне $d+n$, где число n неизвестно. Тогда вполне может быть такая ситуация, когда при окончательном анализе конstituента противоречива (в случае заведомо противоречивого утверждения), но на уровне d конstituента пока непротиворечива. Поскольку «горизонт» эпистемического агента ограничен d -уровнем, для него утверждение непротиворечиво. Механизм «расписывания» конstituенты, т.е. увеличения глубины расписывания, позволяет обнаруживать противоречивость, но не является эффективным в строгом смысле слова. В результате конstituента, представляющая определенный возможный мир, является эпистемически возможным миром, который невозможен логически. Отсюда «возможный невозможный мир».

Дистрибутивная нормальная форма предложений логики первого порядка дает возможность различения эпистемических и логических (онтологических) утверждений перечислением всех альтернатив, достижимых от возможного мира эпистемического агента, т.е. совместимых с его знанием. Такое перечисление обладает очень большой комбинаторной сложностью, и поэтому помимо синтаксиса, т.е. собственно дистрибутивных нормальных форм, требуется удобная для понимания семантика.

Для синтаксической системы дистрибутивных нормальных форм логики первого порядка можно построить несколько вариантов семантики. В частности, конечное множество конечных деревьев может при определенных критериях считаться своей собственной моделью [10]. Это так называемые поверхностные модели Хинтикки. Каждая конstituента соотносится по определенным правилам с некоторой поверхностной моделью, в которой она истинна [10]. Явная польза поверхностной семантики проистекает из того, что для нее относительно легко сформулировать критерии непротиворечивости и противоречивости. Соответственно, результаты этих процедур переносятся на конstituенты.

Однако поверхностная семантика является статичной и не дает адекватного представления о динамической эпистемической структуре последовательного описания взаимоотношений различных конститuent. Реальная эпистемическая процедура выявления непротиворечивости или противоречивости конститuent представляет собой поиск определенных ситуаций, в которой «невозможные возможные миры» являются изменяющимися мирами. В. Ранталя предложил так называемые урновые модели для дистрибутивных нормальных форм [14]. Их преимущество по сравнению с поверхностной семантикой состояло в более общем характере моделей. Более того, обычные модели (логически возможных миров) могут считаться подмножеством класса урновых моделей. Это подмножество является инвариантом урновых моделей, представляя собой инвариантные миры. На некотором фиксированном уровне логической точности, скажем глубины d , урновая модель должна быть «практически» неотличимой от инвариантной модели. Слово «практически», как будто неуместное в контексте логических рассуждений, отражает эпистемический характер модели, а именно знание на определенном уровне динамического процесса.

Наличие удовлетворительной семантики для дистрибутивных нормальных форм логики первого порядка означает удовлетворительность понятия эпистемически, но не логически возможных миров. В урновых моделях интенциональности не являются константами, и, стало быть, феномен интенциональности в математике может иметь самостоятельный статус, несводимый к статусу феномена экстенциональности математического дискурса.

Такое решение имеет существенные преимущества. Коль скоро интенциональность тесно связана с семантикой возможных миров и традиционная семантика (семантика Крипке) редуцирует интенциональности к экстенциональностям, «спасение» интенциональностей для математического дискурса (диктуемое второй теоремой Геделя) состоит в обращении к нестандартной семантике (так называемые урновые модели Ранталя). В философском плане это означает введение в обращение понятия невозможного возможного мира. Это понятие может считаться объяснением или даже реабилитацией феномена интенциональности в математике.

Таким образом, концепция интенциональности, эксплицируемая средствами семантики возможных миров с эпистемическим уклоном, является обоснованием законности ее использования в математике,

если принять во внимание роль логики первого порядка как базиса формализованных математических теорий. «Эпистемический уклон» в данном случае означает, что «интуиция» концепции возможного мира, в основе которой лежит представление С. Крипке о «нереальности» возможных миров по сравнению с миром «действительным», заменяется на «интуицию» концепции возможного мира, основанную на представлении Я. Хинтикки о возможных мирах как реальных альтернативах в ходе познавательного процесса. В этом смысле феномен интенциональности в математике в конечном счете является производным от понимания роли модальных концепций в математике. Х. Патнэм представил такое видение математики, в котором эти концепции действительно играют важную роль [12]. В контексте такого представления математики феномен интенциональности представляет интерес в качестве дальнейшего поля исследования.

Литература

1. Карнап Р. Значение и необходимость. – М.: Издательство иностранной литературы, 1959.
2. Куайн У.В.О. Две догмы эмпиризма / Куайн У.В.О. С точки зрения логики. – М.: Канон+, 2010. – С. 45–80.
3. Стролл А. Аналитическая философия: двадцатый век. – М.: Канон+, 2020.
4. Целищев В.В. Философские проблемы семантики возможных миров. – М.: Кранд, 2009.
5. Auerbach D. Intensionality and the Godel Theorem // Philosophical Studies. – 1985. – Vol. 48. – P. 337–351.
6. Feferman S. Reflecting on Incompleteness // Journal of Symbolic Logic. – 1991. – Vol. 56. – P. 1–49.
7. Hintikka J. Distributive Normal Forms in First-Order Logic / Hintikka J. Logic, Language Games, and Information: Kantian Themes in the Philosophy of Logic. – Oxford: Clarendon Press, 1973. – P. 242–286.
8. Hintikka J. Impossible Possible Worlds Vindicated / Hintikka J. The Logic of Epistemology and Epistemology of Logic. – Dordrecht: Kluwer Academic Publishers. – 1989. – P. 63–72.
9. Hintikka J. Surface Information and Depth Information / Hintikka J., Suppes P.(eds). Information and Inference. – Dordrecht: D. Reidel, 1975. – P. 263–297.
10. Hintikka J., Niiniluoto I. On the Surface Semantics of quantificational Proof Procedures // Ajatus. – 1973. – Vol. 35. P. – 195–211.
11. Peregrin J. Intentionality in Mathematics / Piazza M., Pulcini G.(eds) Truth, Existence, and Explication. – N.Y.: Springer. – 2018. – P. 57–70.
12. Putnam H. Mathematics Without Foundations // The Journal of Philosophy. – 1967. – Vol. 64, No. 1. – P. 5–22.

13. *Quine W.V.O.* Three Grades of Modal Involvement / Quine W.V.O. The Ways of Paradox and Other Essays. – N.Y.: Random House, 1966. – P. 156–174.
14. *Rantala V.* Urn Models: A New Kind of Non-Standard Model for First-Order Logic / Leblanc H. (ed). Truth, Syntax, and Modality. – Amsterdam: North-Holland, 1973. – P. 455–474.
15. *Smith P.* An Introduction to Gödel's Theorems. Second Edition. – Cambridge: Cambridge University Press, 2013.

References

1. *Carnap, R.* (1959). Znachenie i neobkhodimost [Meaning and Necessity]. Moscow, Inostrannaya Literatura Publ. (In Russ.).
2. *Quine, W.V.O.* (2010). Dve dogmy empirizma [Two dogmas of empiricism]. In: Quine, W.V.O. S tochki zreniya logiki [From a Logical Point of View]. Moscow, Kanon+ Publ., 45–80. (In Russ.).
3. *Stroll, A.* (2020). Analiticheskaya filosofiya: Dvadsatyy vek [Twentieth-Century Analytic Philosophy]. Moscow, Kanon+ Publ. (In Russ.).
4. *Tselishchev, V.V.* (2009). Filosofskie problemy semantiki vozmoznykh mirov [Philosophical Problems of Possible-World Semantics]. Moscow, Krasand Publ.
5. *Auerbach, D.* (1985). Intensionality and the Gödel Theorems. Philosophical Studies, 48, 337–351.
6. *Feferman, S.* (1991). Reflecting on incompleteness. Journal of Symbolic Logic, 56, 1–49.
7. *Hintikka, J.* (1973). Distributive normal forms in first-order logic. In: Hintikka, J. Logic, Language Games, and Information: Kantian Themes in the Philosophy of Logic. Oxford, Clarendon Press, 242–286.
8. *Hintikka, J.* (1989). Impossible possible worlds vindicated. In: Hintikka, J. The Logic of Epistemology and Epistemology of Logic. Dordrecht, Kluwer Academic Publishers, 63–72.
9. *Hintikka, J.* (1975). Surface information and depth information. In: Hintikka, J. & P. Suppes (Eds.). Information and Inference. Dordrecht, D. Reidel, 263–297.
10. *Hintikka, J. & I. Niiniluoto.* (1973). On the surface semantics of quantificational proof procedures. Ajatus, 35, 195–211.
11. *Peregrin, J.* (2018). Intentionality in mathematics. In: Piazza, M. & G. Pulcini (Eds.). Truth, Existence, and Explication. New York, Springer, 57–70.
12. *Putnam, H.* (1967). Mathematics without foundations. The Journal of Philosophy, Vol. 64, No. 1, 5–22.
13. *Quine, W.V.O.* (1966). Three grades of modal involvement. In: Quine, W.V.O. The Ways of Paradox and Other Essays. New York, Random House, 156–174.
14. *Rantala, V.* (1973). URN models: A new kind of non-standard model for first-order logic. In: Leblanc, H. (Ed.). Truth, Syntax, and Modality. Amsterdam, North-Holland, 455–474.
15. *Smith, P.* (2013). An Introduction to Gödel's Theorems, 2nd ed. Cambridge, Cambridge University Press.

Информация об авторах

Целищев Виталий Валентинович – доктор философских наук, профессор, кафедра гносеологии и истории философии Новосибирского национального исследовательского государственного университета (630090, Новосибирск, ул. Пирогова, 2); научный руководитель Института философии и права СО РАН (630090, Новосибирск, ул. Николаева, 8)
leitval@gmail.com

Хлебалин Александр Валерьевич – кандидат философских наук, старший научный сотрудник Института философии и права СО РАН (630090, Новосибирск, ул. Николаева, 8)
sasha_khl@mail.ru

Information about the authors

Tselishchev Vitaliy Valentinovich – Doctor of Sciences (Philosophy), Professor, the Department of Gnoseology and History of Philosophy at Novosibirsk National Research State University (2, Pirogov st., Novosibirsk, 630090, Russia); Scientific Director at the Institute of Philosophy and Law, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences (8, Nikolaev st., Novosibirsk, 630090, Russia)
leitval@gmail.com

Khlebalin Aleksandr Valerievich – Candidate of Sciences (Philosophy), Researcher at the Institute of Philosophy and Law, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences (8, Nikolaev st., Novosibirsk, 630090 Russia)
sasha_khl@mail.ru

Дата поступления 22.07.2020