ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА И ТЕХНИЧЕСКАЯ ФИЗИКА, 1995, т. 36, № 3

УДК 532.546:66.071.7

ПЛЕНОЧНАЯ АБСОРБЦИЯ НА ПЛОСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ, ПОГРУЖЕННОЙ В ЗЕРНИСТУЮ СРЕДУ

А. В. Горин, А. И. Федорченко

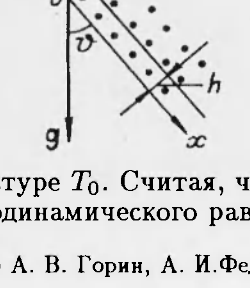
Институт теплофизики СО РАН,
630090 Новосибирск

1. Введение. Одним из основных процессов, определяющих эффективность работы абсорбционного преобразователя теплоты (АПТ), является абсорбция летучего компонента абсорбентом. Так, по данным [1], основные потери эксергии (до 45 %) в абсорбционных бромистолитиевых холодильных машинах приходятся на абсорбер. Кроме того, из-за недостаточной интенсивности тепломассопереноса в абсорберах АПТ наблюдается значительное снижение холодопроизводительности и, следовательно, снижение эффективности работы машины в целом.

Отметим, что до недавнего времени расчет процессов в абсорберах АПТ и анализ их эффективности осуществлялись без учета совместности протекания тепломассопереноса, что приводило к существенному расхождению экспериментальных и расчетных показателей реальных процессов абсорбции. Впервые совместный тепломассоперенос при абсорбции на стекающей пленке жидкости и на каплях рассмотрен в [2, 3]. Было показано, что неучет тепловыделения при абсорбции для системы LiBr — водяной пар приводит к значительному завышению коэффициента массоотдачи. В то же время из теоретических расчетов видно, что существуют принципиальные ограничения на способы повышения интенсивности тепломассопереноса при пленочной абсорбции, связанные с низкими коэффициентами молекулярного переноса.

Естественный путь преодоления указанных ограничений заключается в погружении теплообменных поверхностей в зернистый слой. В этом случае коэффициенты переноса значительно возрастают за счет дисперсионных членов. Однако резко увеличивается и гидравлическое сопротивление прохождению пара. Поэтому одних качественных рассуждений относительно перспективности такого рода нововведений здесь явно недостаточно, а количественные теории в настоящее время отсутствуют. Это и послужило побудительной причиной настоящей работы.

2. Физико-математическая модель тепломассопереноса в зернистом слое. Рассмотрим пленочную неизотермическую абсорбцию на наклонной плоскости, погруженной в зернистую среду. Схема течения и система координат приведены на рисунке.



По плоскости стекает раствор с объемным расходом Q на единицу ширины пленки. В начальном сечении пленки заданы постоянные относительная массовая концентрация более летучего компонента C_0 и температура T_0, причем C_0 меньше равновесной концентрации C_e, соответствующей температуре T_0. Считая, что на поверхности пленки реализуются условия термодинамического равновесия, и используя правило фаз Гиббса, получим

$$C_s = \Omega(T_s, P), \tag{2.1}$$

где P — давление среды, а конкретный вид функции Ω определяется выбором абсорбента и абсорбируемого вещества. В общем случае зависимость (2.1) нелинейная, однако, так как в процессе абсорбции давление остается постоянным, а температура изменяется в узком диапазоне, можно ограничиться линейным членом разложения выражения (2.1) в ряд Тейлора:

$$C_s = \xi_1 + \xi_2 T_s. \tag{2.2}$$

Здесь ξ_1, ξ_2 — заданные функции давления. Как отмечалось выше, в начальном сечении пленки концентрация C_0 меньше равновесной C_e, соответствующей начальной температуре T_0. Следовательно, из (2.2) вытекает неравенство $C_0 < \xi_1(P) + \xi_2(P)T_0$.

Считая, что течение пленки является установившимся, а зернистая среда изотропна, уравнения импульса, диффузии и энергии для пленки запишем в виде

$$\frac{\mu}{K} u + \frac{\rho c}{\sqrt{K}} u^2 = \rho g \cos \vartheta = \rho g_\vartheta; \tag{2.3}$$

$$u \frac{\partial C}{\partial x} = D_{\text{eff}} \frac{\partial^2 C}{\partial y^2}; \tag{2.4}$$

$$u \frac{\partial T}{\partial x} = a_{\text{eff}} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}, \tag{2.5}$$

где μ, ρ — динамическая вязкость и плотность раствора; K, c — проницаемость и инерционный коэффициент; D_{eff}, a_{eff} — эффективные коэффициенты диффузии и температуропроводности. Для плотных слоев сферических частиц диаметром d_p с пористостью ε проницаемость определяется выражением [4]

$$K = \frac{d_p^2 \varepsilon^3}{150(1-\varepsilon)^2}.$$

Эффективные коэффициенты определим следующим образом [5]:

$$a_{\text{eff}} = a^0_{\text{eff}} + 0{,}1 u d_p, \quad D_{\text{eff}} = 0{,}28 D_L + 0{,}1 u d_p, \quad \lambda^0_{\text{eff}} = \lambda_L \varepsilon + \lambda_p (1-\varepsilon).$$

Здесь λ^0_{eff} — эффективный коэффициент теплопроводности зернистой среды в отсутствие фильтрации; D_L — коэффициент молекулярной диффузии; λ_p — коэффициент теплопроводности частиц зернистого слоя.

Так как коэффициенты уравнения (2.3) не зависят от скорости фильтрации, можно разрешить его явно относительно u:

$$u = u_D \frac{\sqrt{1 + 4\mathrm{Ga}^*_\vartheta} - 1}{2\mathrm{Ga}^*_\vartheta}. \tag{2.6}$$

Здесь $u_D = K g_\vartheta / \nu$ — скорость, определяемая законом Дарси; $\Psi = (\sqrt{1 + 4\mathrm{Ga}^*_\vartheta} - 1)/(2\mathrm{Ga}^*_\vartheta)$ — множитель, учитывающий влияние инерционных эффектов; ν — коэффициент кинематической вязкости; $\mathrm{Ga}^*_\vartheta = c K^{3/2} g_\vartheta / \nu^2$ — модифицированное число Галилея для зернистой среды.

В табл. 1 представлены значения скорости течения, модифицированного числа Галилея, дисперсионного члена и проницаемости зернистых слоев, соответствующих различным диаметрам зерен. Согласно экспериментальным данным [6], для течения через различные пористые среды с числами Рейнольдса $\mathrm{Re} = u\sqrt{K}/\nu$ вплоть до 18,1 можно принять $c = 0{,}55$.

Таблица 1

Номер режима	d_p, мм	$K \cdot 10^9$, м^2	Ga*	u, $\frac{см}{с}$	u_D, $\frac{см}{с}$	Ψ	$0{,}1ud_p$, 10^{-7} $\frac{м^2}{с}$
1	0,5	2,25	0,15	1,00	1,14	0,880	5,02
2	1,0	9,00	1,23	2,66	4,56	0,580	26,55
3	1,5	20,25	4,14	3,95	10,25	0,385	59,22
4	2,0	36,00	9,82	4,96	18,22	0,270	99,20
5	2,5	56,30	19,19	5,80	28,47	0,200	145,02
6	3,0	81,00	33,15	6,53	41,00	0,159	195,88

Так как максимальное значение Re, отвечающее шестому режиму табл. 1, почти в 2 раза меньше (Re = 9,6), во всех расчетах принималось указанное выше значение инерциального коэффициента.

Остановимся несколько подробнее на выборе значения пористости ε. Хорошо известно [5], что для пористости в центральной части плотно упакованного слоя сферических частиц можно принять $\varepsilon = 0{,}4$. Однако в данном случае течение осуществляется в узком слое, непосредственно примыкающем к стенке. Поверхности, ограничивающие зернистый слой, существенно изменяют структуру укладки зерен в пристенном слое и, следовательно, наблюдается значительное увеличение ε.

Согласно [5], для зернистого слоя из гладких шаров искажается структура лишь одного ряда, непосредственно примыкающего к стенке. В этом случае за среднее значение пористости в пристеночном слое можно принять $\varepsilon = 0{,}6$, которое и будем использовать в дальнейших расчетах.

Из выражения (2.6) для скорости фильтрации следует, что при $4\mathrm{Ga}^*_\vartheta \ll 1$ можно пренебречь квадратичным по скорости членом уравнения (2.3). Максимальное значение диаметра зерен слоя, начиная с которого наблюдается значительное отклонение от закона Дарси, оценим из условия $4\mathrm{Ga}^*_\vartheta = 1$:

$$d_p = \left(\frac{\nu^2}{2{,}2\,\omega g_\vartheta}\right)^{1/3}, \qquad \omega = \left[\frac{\varepsilon^3}{150\,(1-\varepsilon)^2}\right]^{3/2}. \tag{2.7}$$

Для раствора бромистого лития при температуре $t = 35\,°\mathrm{C}$ и концентрации по нелетучему компоненту $\xi = 51{,}12\,\%$ ($\nu = 1{,}936 \cdot 10^{-6}$ м^2/с) из (2.7) имеем $d_p = 0{,}588$ мм (данное значение соответствует случаю течения пленки по вертикальной поверхности, т. е. $\vartheta = 0$). Таким образом, большинство практически интересных случаев ($d_p \geq 1$ мм) требует учета инерциальных эффектов, т. е. использования уравнения (2.3).

Перейдем теперь к формулировке краевой задачи. В начальном сечении пленки ($x = 0$), как уже отмечалось выше, заданы температура T_0 и концентрация C_0:

$$T(0,y) = T_0, \qquad C(0,y) = C_0. \tag{2.8}$$

На свободной поверхности, считая, что тепло в пленку переносится только вместе с абсорбированной массой пара, можно записать

$$\lambda_{\mathrm{eff}} \left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_{y=h} = \rho r_{\mathrm{a}} D_{\mathrm{eff}} \left.\frac{\partial C}{\partial y}\right|_{y=h}, \tag{2.9}$$

где r_{a} — теплота абсорбции; $h = Q/u$ — толщина пленки раствора, определяемая по заданному расходу Q. На плоскости $y = 0$ для диффузионной задачи ставится очевидное условие непроницаемости:

$$\left.\frac{\partial C}{\partial y}\right|_{y=0} = 0, \tag{2.10}$$

а для тепловой задачи представляют интерес два варианта граничных условий: изотермическая и адиабатическая поверхности.

В первом и втором случае граничные условия примут вид

$$T(x,0) = T_w; \tag{2.11}$$

$$\left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_{y=0} = 0. \tag{2.12}$$

Приведем задачу (2.3)–(2.5), (2.8)–(2.12) к безразмерной форме, вводя следующие безразмерные параметры и переменные:

$$\overline{y} = \frac{y}{h}, \quad x = \frac{x}{\mathrm{Pe}_Q^* h}, \quad T = \frac{T - T_0}{T_e - T_0}, \quad \overline{C} = \frac{C - C_0}{C_e - C_0}. \tag{2.13}$$

Здесь $C_e = \xi_1 + \xi_2 T_0$; $C_0 = \xi_1 + \xi_2 T_e$; $\mathrm{Pe}_Q^* = Q/a_{\mathrm{eff}}$. В результате имеем

$$\frac{\partial^2 \overline{T}}{\partial y^2} - \frac{\partial T}{\partial x}, \qquad \frac{\partial^2 \overline{C}}{\partial y^2} - \frac{1}{\mathrm{Le}^*}\frac{\partial C}{\partial x}; \tag{2.14}$$

$$T(0,y) = 0, \qquad \overline{C}(0,y) = 0; \tag{2.15}$$

$$C(x,1) = 1 - T(x,1); \tag{2.16}$$

$$\left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_{\overline{y}=1} = \mathrm{Le}^* K_a \left.\frac{\partial C}{\partial y}\right|_{y=1}; \tag{2.17}$$

$$T(x,0) = T_w; \tag{2.18}$$

$$\left.\frac{\partial T}{\partial \overline{y}}\right|_{y=0} = 0, \tag{2.19}$$

где $\mathrm{Le}^* = \dfrac{D_{\mathrm{eff}}}{a_{\mathrm{eff}}}$ — модифицированное число Льюиса; $K_a = \dfrac{r_a(C_e - C_0)}{c_p(T_e - T_0)}$. Система (2.14)–(2.19) представляет собой краевую задачу с граничными условиями четвертого рода, поэтому наиболее удобным методом ее решения является преобразование Лапласа.

3. Изотермическая поверхность. Рассмотрим случай изотермической поверхности. Применяя преобразование Лапласа по переменной $\overline{x}$ к уравнениям (2.14) и граничным условиям (2.16)–(2.18), соответственно получим

$$\frac{d^2 \tilde{\tilde{C}}}{d y^2} = \frac{1}{\mathrm{Le}^*} s\tilde{\tilde{C}}, \qquad \frac{d^2 \tilde{\tilde{T}}}{d \overline{y}^2} = s\tilde{\tilde{T}}; \tag{3.1}$$

$$\tilde{\tilde{T}}(\overline{s},0) = \frac{T_w}{s}, \qquad \left.\frac{d\tilde{\tilde{C}}}{d y}\right|_{\overline{y}=0} = 0; \tag{3.2}$$

$$\tilde{\tilde{C}}(s,1) = \frac{1}{s} - \tilde{\tilde{T}}(\overline{s},1), \qquad \left.\frac{d\tilde{\tilde{T}}}{d y}\right|_{\overline{y}=1} = \mathrm{Le}^* K_a \left.\frac{d\tilde{\tilde{C}}}{d y}\right|_{\overline{y}=1} \tag{3.3}$$

Общие решения уравнений (3.1) имеют вид

$$\tilde{\tilde{C}} = M_1 \operatorname{ch} \sqrt{\frac{s}{\mathrm{Le}^*}}\, y + M_2 \operatorname{sh} \sqrt{\frac{s}{\mathrm{Le}}}\, y,$$

$$\tilde{\tilde{T}} = N_1 \operatorname{ch} \sqrt{s}\, y + N_2 \operatorname{sh} \sqrt{s}\, y.$$

Удовлетворяя условиям (3.2), (3.3), находим решение краевой задачи (3.1)–(3.3) в пространстве изображений:

$$\tilde{\tilde{C}} = \frac{1}{s} \frac{(\operatorname{ch}\sqrt{s} - \overline{T}_w) \operatorname{ch} \sqrt{\frac{s}{\mathrm{Le}^*}}\, y}{\left(\sqrt{\mathrm{Le}^*} K_a \operatorname{sh}\sqrt{s} \operatorname{sh}\sqrt{\frac{s}{\mathrm{Le}^*}} + \operatorname{ch}\sqrt{\frac{s}{\mathrm{Le}^*}} \operatorname{ch}\sqrt{s}\right)} = \frac{\Phi_1(s)}{s\varphi(s)}; \tag{3.4}$$

$$\tilde{\tilde{T}} = \frac{1}{s} \frac{\overline{T}_w \sqrt{\mathrm{Le}^*} K_a \operatorname{sh}\sqrt{\frac{s}{\mathrm{Le}^*}} \operatorname{sh}[\sqrt{s}(1-y)] + \overline{T}_w \operatorname{ch}\sqrt{\frac{s}{\mathrm{Le}^*}} \operatorname{ch}[\sqrt{s}(1-y)]}{\left(\sqrt{\mathrm{Le}^*} K_a \operatorname{sh}\sqrt{s} \operatorname{sh}\sqrt{\frac{s}{\mathrm{Le}^*}} + \operatorname{ch}\sqrt{\frac{s}{\mathrm{Le}^*}} \operatorname{ch}\sqrt{s}\right)} +$$

$$+ \frac{1}{s} \frac{\sqrt{\mathrm{Le}^*} K_a \operatorname{sh}\sqrt{\frac{s}{\mathrm{Le}^*}} \operatorname{sh}\sqrt{s}\, y}{\left(\sqrt{\mathrm{Le}^*} K_a \operatorname{sh}\sqrt{s} \operatorname{sh}\sqrt{\frac{s}{\mathrm{Le}^*}} + \operatorname{ch}\sqrt{\frac{s}{\mathrm{Le}^*}} \operatorname{ch}\sqrt{s}\right)} = \frac{\Phi_2(s)}{s\varphi(s)}. \tag{3.5}$$

Профили температуры и концентрации на начальном участке ($x \to 0$) и на бесконечности ($x \to \infty$) определим, не переходя в пространство оригиналов. Для этого воспользуемся следствиями теоремы подобия преобразования Лапласа:

$$\lim_{s\to\infty} sF(s) \to f(0), \qquad \lim_{s\to 0} sF(s) \to f(\infty). \tag{3.6}$$

Особенностью рассматриваемой задачи является существование на начальном участке трех пограничных слоев — теплового и диффузионного возле свободной поверхности и только теплового возле стенки. Используя первое из соотношений (3.6), найдем асимптоту в области $D_0 = \{(x,y) \mid x \to 0,\ y \in O_\delta(0)\}$:

$$\overline{T}(D) \simeq L^{-1}\left[\lim_{\substack{s\to\infty \\ y\in O_\delta(0)}} \frac{\Phi_2(s)}{\varphi(s)}\right]. \tag{3.7}$$

При больших значениях параметра s положим $\operatorname{sh} s = \operatorname{ch} s = \mathrm{e}^s/2$. Так как $y \in O_\delta(0)$, можно пренебречь последним слагаемым в Φ_2, и в результате из (3.7) получим

$$\overline{T}(D_0) \simeq L^{-1}\left(\frac{\overline{T}_w}{s} \mathrm{e}^{-y\sqrt{s}}\right) = \overline{T}_w \operatorname{erfc}\left(\frac{y}{2\sqrt{x}}\right).$$

Аналогичным образом найдем асимптоту в области $D_1 = \{(x,y) \mid x \to 0,\ y \in O_\delta(1)\}$:

$$T(D_1) \simeq L^{-1}\left[\lim_{\substack{s\to\infty\\ y\in O_\delta(1)}} \frac{\Phi_2(s)}{\varphi(s)}\right] = \frac{\sqrt{\mathrm{Le}^*}\,K_a}{\sqrt{\mathrm{Le}^*}\,K_a+1} L^{-1}\left[\frac{1}{s}\,\mathrm{e}^{-\sqrt{s}(1-\bar{y})}\right] =$$

$$= \frac{\sqrt{\mathrm{Le}^*}\,K_a}{\sqrt{\mathrm{Le}^*}\,K_a+1}\,\mathrm{erfc}\left[\frac{1-y}{2\sqrt{x}}\right]; \tag{3.8}$$

$$\overline{C}(D_1) \simeq L^{-1}\left[\lim_{\substack{s\to\infty\\ y\in O_\delta(1)}} \frac{\Phi_1(s)}{\varphi(s)}\right] = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{Le}^*}\,K_a+1} L^{-1}\left[\frac{1}{s}\,\mathrm{e}^{-\sqrt{s/\mathrm{Le}^*}\,(1-\bar{y})}\right] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\mathrm{Le}^*}\,K_a+1}\,\mathrm{erfc}\left[\frac{1-y}{2\sqrt{\mathrm{Le}^*\,x}}\right]. \tag{3.9}$$

Асимптотические значения температуры и концентрации на бесконечности легко получить из (3.4), (3.5) и второго соотношения (3.6), устремляя s к нулю и пользуясь линейными членами разложения гиперболических функций: $\mathrm{ch}\, s \simeq 1$, $\mathrm{sh}\, s \simeq s$. В результате имеем

$$\overline{C}_\infty = 1 - \overline{T}_w, \qquad T_w = T_\infty. \tag{3.10}$$

Воспользовавшись соотношением (2.13), легко убедиться, что решение (3.10) удовлетворяет уравнению равновесия (2.2). Применяя выражения (3.8), (3.9), найдем потоки тепла и массы в глубь пленки:

$$j = -\rho D_{\mathrm{eff}} \left.\frac{\partial C}{\partial y}\right|_{y=h} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\rho D_{\mathrm{eff}}(C_e - C_0)}{1 + \sqrt{\dfrac{D_{\mathrm{eff}}}{a_{\mathrm{eff}}}}\,\dfrac{r_a(C_e - C_0)}{c_p(T_e - T_0)}} \sqrt{\frac{u}{D_{\mathrm{eff}}\,x}}; \tag{3.11}$$

$$q = -\lambda_{\mathrm{eff}} \left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_{y=h} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\lambda_{\mathrm{eff}}(T_e - T_0)}{1 + \sqrt{\dfrac{a_{\mathrm{eff}}}{D_{\mathrm{eff}}}}\,\dfrac{c_p(T_e - T_0)}{r_a(C_e - C_0)}} \sqrt{\frac{u}{a_{\mathrm{eff}}\,x}}. \tag{3.12}$$

Из (3.11), (3.12) получим локальные значения чисел Нуссельта и Шервуда на свободной поверхности пленки:

$$\mathrm{Nu} = \frac{\alpha x}{\lambda_L} = \frac{q x}{\lambda_L(T_e - T_0)} = \frac{a_{\mathrm{eff},L}}{\sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{\mathrm{Le}^*}\,K_a}{\sqrt{\mathrm{Le}^*}\,K_a + 1} \sqrt{\mathrm{Pe}_x^*},$$

$$\mathrm{Sh} = \frac{\beta x}{D_L} = \frac{j x}{\rho D_L(C_e - C_0)} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{D_{\mathrm{eff},L}}{\sqrt{\mathrm{Le}^*}(\sqrt{\mathrm{Le}^*}\,K_a + 1)} \sqrt{\mathrm{Pe}_x^*}.$$

Здесь $\mathrm{Pe}_x^* = \dfrac{ux}{a_{\mathrm{eff}}}$; α, β — коэффициенты тепломассоотдачи соответственно. Для средних по длине пластины значений чисел Нуссельта и Шервуда имеем

$$\overline{\mathrm{Nu}} = \frac{1}{L}\int_0^L \mathrm{Nu}\,dx = \frac{2a_{\mathrm{eff},L}\sqrt{\mathrm{Le}^*}\,K_a}{3\sqrt{\pi}\,\sqrt{\mathrm{Le}^*}\,K_a + 1} \sqrt{\mathrm{Pe}_L^*}; \tag{3.13}$$

$$\overline{\mathrm{Sh}} = \frac{1}{L}\int_0^L \mathrm{Sh}\,dx = \frac{2D_{\mathrm{eff},L}}{3\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{\mathrm{Le}^*}(\sqrt{\mathrm{Le}^*}\,K_a + 1)} \sqrt{\mathrm{Pe}_L^*} \tag{3.14}$$

$$\left(\mathrm{Pe}_L^* = \frac{uL}{a_{\mathrm{eff}}}\right).$$

Из выражений (3.13), (3.14) следует, что на начальном участке тепломассоотдача не зависит от расхода раствора.

Сравним интенсивность тепломассоотдачи в рассматриваемой задаче и в задаче неизотермической абсорбции на начальном участке свободно стекающей пленки на гладкой пластине. Средние значения чисел Нуссельта и Шервуда в последнем случае получены в работе [3], и их можно записать в виде

$$\overline{\mathrm{Nu}^0} = \sqrt{\frac{6}{\pi}}\,\frac{\sqrt{\mathrm{Le}}\,K_a}{\sqrt{\mathrm{Le}}\,K_a + 1}\left(\frac{\mathrm{Ra}_\vartheta}{3}\right)^{1/6}\mathrm{Pe}_Q^{1/2}; \tag{3.15}$$

$$\overline{\mathrm{Sh}^0} = \sqrt{\frac{6}{\pi}}\,\frac{1}{\sqrt{\mathrm{Le}}\,(\sqrt{\mathrm{Le}}\,K_a + 1)}\left(\frac{\mathrm{Ra}_\vartheta}{3}\right)^{1/6}\mathrm{Pe}_Q^{1/2}, \tag{3.16}$$

где $\mathrm{Pe}_Q = Q/a_L$; Q — расход жидкости в пленке на единицу ее ширины; $\mathrm{Ra}_\vartheta = \dfrac{g_\vartheta L^3}{\nu a_L}$ — число Рэлея.

Представляя число Льюиса как $\mathrm{Le}^* = \mathrm{Le} D_{\mathrm{eff},L}\, a_{L,\mathrm{eff}}$ (под функцией $f_{\alpha,\beta}$ понимается отношение $f_{\alpha,\beta} = f_\alpha/f_\beta$) и используя выражения (3.13)–(3.16), найдем отношение средних чисел Нуссельта и Шервуда для зернистой среды и гладкой пластины:

$$\eta = \frac{\overline{\mathrm{Nu}}}{\overline{\mathrm{Nu}^0}} = \frac{\overline{\mathrm{Sh}}}{\overline{\mathrm{Sh}^0}} = 0{,}33\,\frac{\sqrt{\mathrm{Le}}\,K_a + 1}{\sqrt{\mathrm{Le}^*}\,K_a + 1}\,D_{\mathrm{eff},L}^{1/2}\mathrm{Da}^{1/2}\mathrm{Ra}_\vartheta^{1/3}\Psi^{1/2}\mathrm{Pe}_Q^{-1/2}. \tag{3.17}$$

Выражения (3.15), (3.16) получены для ламинарного течения пленки. Согласно [7], данному режиму соответствует диапазон чисел Рейнольдса

$$\mathrm{Re} \le 0{,}47(\mathrm{Fi})^{1/10}$$

($\mathrm{Fi} = \dfrac{\sigma^3}{g\nu^4\rho^3}$ — число Капицы).

Для раствора бромистого лития, концентрация и температура которого соответствуют параметрам рабочего вещества в абсорбере АБХМ (табл. 2), из (3.17) получим $\mathrm{Re} \le 3{,}8$ или $\mathrm{Pe}_Q = \mathrm{Re}\,\mathrm{Pr} \le 54$. Так как при $\mathrm{Pe}_Q = 54$ достигаются максимальные значения $\overline{\mathrm{Nu}}^0$ и $\overline{\mathrm{Sh}}^0$, расчеты относительной интенсивности η, приведенные в табл. 3, выполнены при данном значении числа Пекле.

Таблица 2

T_0, К	T_e, К	C_0	C_e	$a_L\cdot10^7$, м^2/с	c_p, $\frac{\text{Дж}}{\text{кг·К}}$	r_a, $\frac{\text{кДж}}{\text{кг}}$	ρ_L, $\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$
308	311,2	0,47	0,49	1,38	2128	2641	1544

$\nu_L\cdot10^6$, м^2/с	$\mu\cdot10^3$, Па·с	λ_L, $\frac{\text{Вт}}{\text{м·К}}$	$D_L\cdot10^9$, м^2/с	Pr	Le	$\sigma\cdot10^2$, Н/м	K_a
1,936	3,0	0,455	2,355	14	0,017	8,52	7,3

Из табл. 1 и 3 видно, что при $d_p \ge 1$ мм, т. е. когда режим течения существенно отклоняется от закона Дарси ($\Psi \simeq 0{,}58$), начинается преобладание интенсивности тепломассопереноса в зернистой среде и при $d_p = 3$ мм (режим 6) отношение η достигает почти четырехкратного значения. Таким образом, введение зернистого слоя позволяет добиться значительной интенсификации тепло- и массообменных процессов на на-

Таблица 3

Номер режима	Le^*	d_p, мм	$\mathrm{Da}^{1/2}\mathrm{Ra}^{1/3}$	$D_{\mathrm{eff},L}$	$\eta = \frac{\bar{\mathrm{Nu}}}{\mathrm{Nu}^0} - \frac{\mathrm{Sh}}{\mathrm{Sh}^0}$
1	0,75	0,5	1,57	213	0,26
2	0,94	1,0	3,14	1128	0,87
3	0,97	1,5	4,72	2515	1,57
4	0,98	2,0	6,30	4213	2,26
5	0,9885	2,5	7,87	6158	2,95
6	0,992	3,0	9,45	8318	3,63

чальном участке пленки. Однако полученные асимптотические решения (3.8), (3.9) не позволяют оценить ни длину начального участка, ни тепло- и массообмен на основном участке. Поэтому, чтобы получить ответы на эти вопросы, необходимо обратить выражения (3.4), (3.5). Так как (3.4) и (3.5) представляют собой отношения двух обобщенных полиномов, можно воспользоваться теоремой разложения. Кроме очевидного нулевого корня $s_0 = 0$, знаменатель имеет счетное число простых корней s_n, даваемое уравнением $\varphi(s) = 0$:

$$\sqrt{\mathrm{Le}^*}\, K_a \,\mathrm{sh}\sqrt{s}\,\mathrm{sh}\sqrt{\frac{s}{\mathrm{Le}^*}} + \mathrm{ch}\sqrt{\frac{s}{\mathrm{Le}^*}}\,\mathrm{ch}\sqrt{s} = 0. \tag{3.18}$$

Воспользовавшись соотношениями

$$\mathrm{ch}\, z = \cos iz, \qquad \mathrm{sh}\, z = \frac{\sin iz}{i}, \tag{3.19}$$

из (3.18) получаем

$$\cos i\sqrt{s}\, \cos i\sqrt{\frac{s}{\mathrm{Le}^*}} - \sqrt{\mathrm{Le}^*}\, K_a \sin i\sqrt{s}\sin i\sqrt{\frac{s}{\mathrm{Le}^*}} = 0. \tag{3.20}$$

Вводя новую переменную $\mu = i\sqrt{s/\mathrm{Le}^*}$, из (3.20) находим характеристическое уравнение

$$\cos\mu \cos\sqrt{\mathrm{Le}^*}\mu - \sqrt{\mathrm{Le}^*}\, K_a \sin\mu \sin\sqrt{\mathrm{Le}^*}\mu = 0$$

или

$$\mathrm{tg}\,\mu\, \mathrm{tg}\sqrt{\mathrm{Le}^*}\,\mu = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{Le}^*}\, K_a}. \tag{3.21}$$

Согласно теореме разложения, решение в пространстве оригиналов дается выражениями

$$\overline{C} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Phi_1(s_n)}{[s\varphi(s)]'_{s_n}} e^{s_n x}, \qquad \overline{T} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Phi_2(s_n)}{[s\varphi(s)]'_{s_n}} e^{s_n x}. \tag{3.22}$$

Вычислим знаменатель в (3.22):

$$[s\varphi(s)]'_{s_n} = \left[\sqrt{\mathrm{Le}^*}\, K_a \,\mathrm{sh}\sqrt{s}\,\mathrm{sh}\sqrt{\frac{s}{\mathrm{Le}^*}} + \mathrm{ch}\sqrt{s}\,\mathrm{ch}\sqrt{\frac{s}{\mathrm{Le}^*}}\right]_{s_n} +$$

$$+\frac{1}{2}\sqrt{\mathrm{Le}^*}\, K_a \sqrt{s_n}\,\mathrm{ch}\sqrt{s_n}\,\mathrm{sh}\sqrt{\frac{s_n}{\mathrm{Le}^*}} + \frac{1}{2}\sqrt{\mathrm{Le}^*}\, K_a\sqrt{\frac{s_n}{\mathrm{Le}^*}}\,\mathrm{sh}\sqrt{s_n}\,\mathrm{ch}\sqrt{\frac{s_n}{\mathrm{Le}^*}} +$$

$$+\frac{1}{2}\sqrt{s_n}\,\mathrm{ch}\sqrt{s_n}\,\mathrm{sh}\sqrt{\frac{s_n}{\mathrm{Le}^*}}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{s_n}{\mathrm{Le}^*}}\,\mathrm{ch}\sqrt{s_n}\,\mathrm{sh}\sqrt{\frac{s_n}{\mathrm{Le}^*}}. \qquad (3.23)$$

Выражение в квадратных скобках в правой части (3.23) равно нулю в силу (3.18). Принимая во внимание соотношения

$$\mathrm{sh}\sqrt{s_n}=\frac{1}{i}\sin\sqrt{\mathrm{Le}^*}\,\mu_n,\qquad \mathrm{sh}\sqrt{\frac{s_n}{\mathrm{Le}^*}}=\frac{1}{i}\sin\mu_n,$$

$$\mathrm{ch}\sqrt{s_n}=\cos\sqrt{\mathrm{Le}^*}\,\mu,\qquad \mathrm{ch}\sqrt{\frac{s_n}{\mathrm{Le}^*}}=\cos\mu_n,$$

которые являются следствиями зависимости $\mu_n = i\sqrt{s_n/\mathrm{Le}^*}$ и формул (3.19), из (3.23) окончательно имеем

$$\lim_{s\to s_n}[s\varphi(s)]'=-\frac{\mu_n}{2}\Big\{(1+\mathrm{Le}^*K_a)\cos\sqrt{\mathrm{Le}^*}\,\mu_n\sin\mu_n+$$
$$+\sqrt{\mathrm{Le}^*}\,(K_a+1)\sin\sqrt{\mathrm{Le}^*}\,\mu_n\cos\mu_n\Big\}.$$

Таким образом, общее решение задачи с изотермической поверхностью дается следующими выражениями для распределения концентрации и температуры в пленке:

$$\overline{C}=(1-\overline{T}_w)-$$
$$-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\cos\sqrt{\mathrm{Le}^*}\mu_n-T_w)\cos\mu_n\,\overline{y}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{Le}^*\mu_n^2\overline{x}}}{\mu_n\Big[(1+\mathrm{Le}^*K_a)\cos\sqrt{\mathrm{Le}^*}\mu_n\sin\mu_n+\sqrt{\mathrm{Le}^*}(K_a+1)\sin\sqrt{\mathrm{Le}^*}\mu_n\cos\mu_n\Big]}; \qquad (3.24)$$

$$T=T_w-$$
$$-2\sum_{n=1}^{\infty}\Bigg\{\frac{T_w\cos\mu_n\cos\sqrt{\mathrm{Le}^*}\mu_n(1-\overline{y})\,\mathrm{e}^{-\mathrm{Le}^*\mu_n^2\overline{x}}}{\mu_n\Big[(1+\mathrm{Le}^*K_a)\cos\sqrt{\mathrm{Le}^*}\mu_n\sin\mu_n+\sqrt{\mathrm{Le}^*}(K_a+1)\sin\sqrt{\mathrm{Le}^*}\mu_n\cos\mu_n\Big]}-$$
$$-\frac{\overline{T}_w\sqrt{\mathrm{Le}^*}\,K_a\sin\mu_n\sin\sqrt{\mathrm{Le}^*}\mu_n(1-\overline{y})\mathrm{e}^{-\mathrm{Le}^*\mu_n^2\overline{x}}}{\mu_n\Big[(1+\mathrm{Le}^*K_a)\cos\sqrt{\mathrm{Le}^*}\mu_n\sin\mu_n+\sqrt{\mathrm{Le}^*}(K_a+1)\sin\sqrt{\mathrm{Le}^*}\mu_n\cos\mu_n\Big]}-$$
$$-\frac{\sqrt{\mathrm{Le}^*}\,K_a\sin\mu_n\sin\sqrt{\mathrm{Le}^*}\,\mu_n\,\overline{y}\mathrm{e}^{-\mathrm{Le}^*\mu_n^2x}}{\mu_n\Big[(1+\mathrm{Le}^*K_a)\cos\sqrt{\mathrm{Le}^*}\mu_n\sin\mu_n+\sqrt{\mathrm{Le}^*}(K_a+1)\sin\sqrt{\mathrm{Le}^*}\mu_n\cos\mu_n\Big]}\Bigg\}. \qquad (3.25)$$

4. Анализ решения. Так как последовательность корней $\{\mu_i\}$ характеристического уравнения (3.21) монотонно возрастающая, т. е. справедливо неравенство

$$\mu_1<\mu_2\ldots<\mu_n<\ldots,$$

каждый последующий член рядов (3.24), (3.25) с увеличением x будет пренебрежимо малым по сравнению с предыдущим. Поэтому, начиная с определенного значения x_p^0, в (3.24) и (3.25) можно ограничиться первым членом рядов, т. е.

$$\overline{C_p}=\overline{C_\infty}-F_1(\mu_1,\overline{y})\,\mathrm{e}^{-\mathrm{Le}^*\mu_1^2x_p}; \qquad (4.1)$$

$$T_p^- = T_\infty^- + F_2(\mu_1, y)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{Le}^*\mu_1^2\bar{x}_p}. \qquad (4.2)$$

Здесь $C_\infty^- = 1 - T_w^-$; $T_\infty^- = T_w^-$ в соответствии с условиями (3.10);

$$F_1(\mu_1, y) =$$

$$= 2\frac{(\cos\sqrt{\mathrm{Le}^*}\mu_1 - T_w)\cos\mu_1 y}{\mu_1\Big[(1+\mathrm{Le}^*K_a)\cos\sqrt{\mathrm{Le}^*}\mu_1\sin\mu_1 + \sqrt{\mathrm{Le}^*}(K_a+1)\sin\sqrt{\mathrm{Le}^*}\mu_1\cos\mu_1\Big]};$$

$$F_2(\mu_1, y) =$$

$$= 2\left\{\frac{-T_w\cos\mu_1\cos\sqrt{\mathrm{Le}^*}\mu_1(1-y)}{\mu_1\Big[(1+\mathrm{Le}^*K_a)\cos\sqrt{\mathrm{Le}^*}\mu_1\sin\mu_1 + \sqrt{\mathrm{Le}^*}(K_a+1)\sin\sqrt{\mathrm{Le}^*}\mu_1\cos\mu_1\Big]} + \right.$$

$$+ \frac{T_w\sqrt{\mathrm{Le}^*}\,K_a\sin\mu_1\sin\sqrt{\mathrm{Le}^*}\mu_1(1-y)}{\mu_1\Big[(1+\mathrm{Le}^*K_a)\cos\sqrt{\mathrm{Le}^*}\mu_1\sin\mu_1 + \sqrt{\mathrm{Le}^*}(K_a+1)\sin\sqrt{\mathrm{Le}^*}\mu_1\cos\mu_1\Big]} +$$

$$\left. + \frac{\sqrt{\mathrm{Le}^*}\,K_a\sin\mu_1\sin\sqrt{\mathrm{Le}^*}\mu_1 y}{\mu_1\Big[(1+\mathrm{Le}^*K_a)\cos\sqrt{\mathrm{Le}^*}\mu_1\sin\mu_1 + \sqrt{\mathrm{Le}^*}(K_a+1)\sin\sqrt{\mathrm{Le}^*}\mu_1\cos\mu_1\Big]}\right\}.$$

Логарифмируя выражения (4.1), (4.2), получим

$$\ln(\overline{C}_\infty - C_p) = \ln F_1(\mu_1, \bar{y}) - \mathrm{Le}^*\mu_1^2\,\bar{x}_p; \qquad (4.3)$$

$$\ln(T_p - T_\infty) = \ln F_2(\mu_1, y) - \mathrm{Le}^*\mu_1^2\,x_p. \qquad (4.4)$$

Таким образом, зависимость между логарифмами избыточной концентрации $\Delta C_p = \overline{C}_\infty - \overline{C}_p$ и температуры $\Delta \overline{T}_p = \overline{T}_p - \overline{T}_\infty$ и продольной координатой является линейной. Этот факт позволяет провести полную аналогию между тепло- и массообменом на данном участке пленки и стадией регулярного режима в задачах нестационарной теплопроводности.

Теория регулярного режима Кондратьева исходит из соотношения

$$-\frac{\partial\ln\Delta T}{\partial t} = m, \qquad (4.5)$$

где $m = \mathrm{const}$; $\Delta T = T_c - T$ — избыточная температура; T_c — постоянная температура окружающей среды. Дифференцируя соотношения (4.3), (4.4) по $\bar{x}_p$, имеем

$$-\frac{\partial\ln\Delta T_p}{\partial\bar{x}_p} = \mathrm{Le}^*\mu_1^2; \qquad (4.6)$$

$$-\frac{\partial\ln\Delta\overline{C}_p}{\partial x_p} = \mathrm{Le}^*\mu_1^2. \qquad (4.7)$$

Выражения (4.6), (4.7) полностью подобны (4.5), в них роль времени играет продольная координата $\bar{x}$. Участок пленки, тепло- и массообмен на котором протекает в режиме (4.6), (4.7), назовем регулярным. Запишем соотношения (4.6), (4.7) в виде

$$-\frac{\partial\Delta\overline{T}_p}{\partial x_p} = m\Delta T_p, \quad -\frac{\partial\Delta\overline{C}_p}{\partial\bar{x}_p} = m\Delta C_p \qquad (m = \mathrm{Le}^*\mu_1^2). \qquad (4.8)$$

Выражения (4.8) подобны граничным условиям третьего рода, следовательно, сомножитель m играет роль безразмерных коэффициентов тепломассоотдачи. Специфика рассматриваемой задачи, а именно близость значений Le* к единице (см. табл. 3), позволяет в явном виде выразить значения корней в функции определяющих критериев Le*, K_a. Так как Le* $\simeq 1$, представим Le* в виде Le* $= 1 - (1 - \mathrm{Le}^*) = 1 - \delta$ ($\delta = (1 - \mathrm{Le}^*)$ — малое число). В этом случае характеристическое уравнение (3.21) запишем как

$$\operatorname{tg}\mu \operatorname{tg}\Big(1 - \frac{\delta}{2}\Big)\mu = \frac{1}{K_a(1 - \frac{\delta}{2})}. \tag{4.9}$$

При $\delta \to 0$ уравнение (4.7) вырождается в уравнение $\operatorname{tg}^2 \mu^{(0)} = 1/K_a$, корни которого даются формулой

$$\mu^{(0)} = \operatorname{Arctg}\Big(\pm \frac{1}{\sqrt{K_a}}\Big). \tag{4.10}$$

При малых δ естественно ожидать, что корни уравнения (4.7) будут близки к корням (4.10). Поэтому искомое решение представим в виде разложения по параметру δ:

$$\mu = \mu^{(0)} + \delta\,\tilde{\mu}_1^{(0)} + \delta^2\,\tilde{\mu}_2^{(0)} + \cdots \tag{4.11}$$

Подставляя (4.11) в левую часть (4.9) и разлагая тангенсы в ряд Тейлора в окрестности точки $\mu^{(0)}$, находим

$$\operatorname{tg}\mu = \operatorname{tg}(\mu^{(0)} + \delta\tilde{\mu}_1^{(0)} + \cdots) = \operatorname{tg}\mu^{(0)} + \frac{1}{\cos^2\mu^{(0)}}\,\delta\tilde{\mu}_1^{(0)} + o(\delta^2),$$

$$\operatorname{tg}\Big[\Big(1 - \frac{\delta}{2}\Big)\mu\Big] = \operatorname{tg}\Big(\mu^{(0)} + \delta\tilde{\mu}_1^{(0)} - \frac{\delta}{2}\mu_0^{(0)} + \cdots\Big) =$$

$$= \operatorname{tg}\mu^{(0)} + \frac{1}{\cos^2\mu^{(0)}}\,\delta\Big(\tilde{\mu}_1^{(0)} - \frac{\mu^{(0)}}{2}\Big) + o(\delta^2),$$

$$\operatorname{tg}\mu \operatorname{tg}\Big(1 - \frac{\delta}{2}\Big)\mu = \operatorname{tg}^2\mu^{(0)} + \delta\,\frac{\operatorname{tg}\mu^{(0)}}{\cos^2\mu^{(0)}}\Big(2\tilde{\mu}_1^{(0)} - \frac{\mu^{(0)}}{2}\Big) + o(\delta^2).$$

Разлагая правую часть (4.9) по степеням δ и ограничиваясь линейными членами разложения, получим

$$\operatorname{tg}^2\mu^{(0)} + \frac{\operatorname{tg}\mu^{(0)}}{\cos^2\mu^{(0)}}\Big(2\tilde{\mu}_1^{(0)} - \frac{\mu^{(0)}}{2}\Big)\delta + o(\delta^2) = \frac{1}{K_a}\Big[1 + \frac{\delta}{2} + o(\delta^2)\Big].$$

В нулевом и первом приближении имеем

$$\operatorname{tg}^2\mu^{(0)} = \frac{1}{K_a}, \qquad \frac{\operatorname{tg}\mu^{(0)}}{\cos^2\mu^{(0)}}\Big(2\tilde{\mu}_1^{(0)} - \frac{\mu^{(0)}}{2}\Big) = \frac{1}{2K_a}$$

или, выражая $\tilde{\mu}_1^{(0)}$,

$$\tilde{\mu}_1^{(0)} = \frac{1}{4}\Big(\mu^{(0)} + \frac{\cos^2\mu^{(0)}}{K_a \operatorname{tg}\mu^{(0)}}\Big). \tag{4.12}$$

Воспользовавшись очевидным тригонометрическим тождеством $\cos^2\mu = \dfrac{1}{1 + \operatorname{tg}^2\mu}$, из (4.12) окончательно находим

$$\tilde{\mu}_1^{(0)} = \frac{1}{4}\Big[\mu_0^{(0)} \pm \frac{1}{\sqrt{K_a}\,(1 + K_a)}\Big],$$

причем знак перед вторым слагаемым определяется знаком в формуле (4.10).

Таким образом, корни уравнения (3.21) даются приближением

$$\mu = \mu^{(0)} + \frac{(1-\mathrm{Le}^*)}{4}\left[\mu^{(0)} \pm \frac{1}{\sqrt{K_a}(1+K_a)}\right]. \tag{4.13}$$

Используя полученные ранее распределения концентрации и температуры (4.1), (4.2) в пленке, найдем значения локальных чисел Шервуда и Нуссельта на регулярном участке:

$$\mathrm{Nu}_p = \frac{\alpha_p x_p}{\lambda_L} = \frac{q_p x_p}{\lambda_L(T_e - \bar{T}_0)} = 2\lambda_{\mathrm{eff},L}\,\mathrm{Le}^* K_a f(\mu_1) x_p\, \mathrm{e}^{-\mathrm{Le}^*\mu_1^2 \bar{x}_p}; \tag{4.14}$$

$$\mathrm{Sh}_p = \frac{\beta_p x_p}{D_L} = \frac{j_p x_p}{\rho D_L(T_e - T_0)} = 2D_{\mathrm{eff},L}\,\mathrm{Pe}_Q^* \bar{x}_p f(\mu_1)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{Le}^*\mu_1^2 \bar{x}_p}. \tag{4.15}$$

Здесь

$$f(\mu_1) = \frac{\sin\mu_1(\cos\sqrt{\mathrm{Le}^*}\mu_1 - \bar{T}_w)}{\left[(1+\mathrm{Le}^* K_a)\cos\sqrt{\mathrm{Le}^*}\mu_1 \sin\mu_1 + \sqrt{\mathrm{Le}^*}(K_a+1)\sin\sqrt{\mathrm{Le}^*}\mu_1\cos\mu_1\right]}.$$

Таким образом, полученные решения позволяют полностью рассчитать теплообмен на регулярном участке. Однако для практического применения полученных результатов необходимо знать координату $\bar{x}_p^0$ начала регулярного участка пленки.

Как уже уточнялось выше, на регулярном участке можно ограничиться первым членом рядов (3.24), (3.25). Значит, необходимо оценить остатки рядов (3.24), (3.25) при $y = 1$, т. е. на поверхности пленки. Используя характеристическое уравнение (3.21), преобразуем функции $F_1(\mu_n, 1)$, $F_2(\mu_n, 1)$ следующим образом:

$$F_1(\mu_n,1) =$$

$$2\frac{(\cos\sqrt{\mathrm{Le}^*}\mu_n - \bar{T}_w)\cos\mu_n}{\mu_n\left[(1+\mathrm{Le}^* K_a)\cos\sqrt{\mathrm{Le}^*}\mu_n \sin\mu_n + \sqrt{\mathrm{Le}^*}(K_a+1)\sin\sqrt{\mathrm{Le}^*}\mu_n\cos\mu_n\right]} =$$

$$= \frac{2}{\mu_n}\frac{\left(1 - \dfrac{\bar{T}_w}{\cos\sqrt{\mathrm{Le}^*}\mu_n}\right)\mathrm{ctg}\,\mu_n}{1 + \mathrm{Le}^* K_a + \dfrac{1+K_a}{K_a}\mathrm{ctg}^2\mu_n}. \tag{4.16}$$

Так как значение Le^* близко к единице, надо ожидать, что преобразованное выражение функции $F_2(\mu_n, 1)$ должно совпасть с функцией $F_1(\mu_n, 1)$. Покажем, что это действительно так:

$$F_2(\mu_n,1) =$$

$$= \frac{2}{\mu_n}\frac{\sqrt{\mathrm{Le}^*}K_a\sin\mu_n\sin\sqrt{\mathrm{Le}^*}\mu_n - \bar{T}_w\cos\mu_n}{\left[(1+\mathrm{Le}^* K_a)\cos\sqrt{\mathrm{Le}^*}\mu_n \sin\mu_n + \sqrt{\mathrm{Le}^*}(K_a+1)\sin\sqrt{\mathrm{Le}^*}\mu_n\cos\mu_n\right]} =$$

$$= \frac{2}{\mu_n}\frac{\sqrt{\mathrm{Le}^*}K_a\,\mathrm{tg}^2\sqrt{\mathrm{Le}^*}\mu_n - \dfrac{\bar{T}_w}{\cos\sqrt{\mathrm{Le}^*}\mu_n}\mathrm{ctg}\mu_n}{1 + \mathrm{Le}^* K_a + \dfrac{1+K_a}{K_a}\mathrm{ctg}^2\mu_n}. \tag{4.17}$$

Из выражения (4.13) видно, что при значениях Le*, близких к единице, уже члены нулевого порядка являются хорошим приближением решения характеристического уравнения (3.21). Принимая это во внимание, из (4.17) получим

$$F_2(\mu_n, 1) = \frac{2}{\mu_n} \frac{1 - \dfrac{T_w}{\cos\sqrt{\mathrm{Le}^*}\,\mu_n}\mathrm{ctg}\mu_n}{1 + \mathrm{Le}^* K_a + \dfrac{1+K_a}{K_a}\mathrm{ctg}^2\mu_n},$$

что тождественно совпадает с выражением (4.16) для функции $F_1(\mu_n, 1)$.

Таким образом, при $\mathrm{Le}^* \simeq 1$ наблюдается полное подобие концентрационных и температурных полей в пленке. Выражение (4.16) допускает дальнейшее упрощение. С этой целью воспользуемся соотношениями, вытекающими из характеристического уравнения и условия $\mathrm{Le}^* \simeq 1$:

$$\mathrm{ctg}\,\mu_n \simeq \pm\sqrt{K_a}, \quad \mathrm{ctg}^2\mu_n \simeq K_a, \quad \cos\sqrt{\mathrm{Le}^*}\,\mu_n \simeq \pm\sqrt{\frac{K_a}{1+K_a}}. \qquad (4.18)$$

Учитывая (4.18), окончательно имеем

$$F(\mu_n, 1) = F_1(\mu_n, 1) = F_2(\mu_n, 1) = \frac{1}{\mu_n}\frac{\pm\Big(1 \mp \sqrt{\dfrac{1+K_a}{K_a}}\,T_w\Big)\sqrt{K_a}}{1+K_a}. \qquad (4.19)$$

Используя (4.19) и характеристическое уравнение $\mathrm{tg}^2\mu_n = \frac{1}{K_a}$, легко показать, что ряд (3.24) можно записать в форме

$$\Delta\overline{C} = \overline{C_\infty} - \overline{C} = a_1(x) + a_2(x) - a_3(x) - a_4(x) + a_5(x) + a_6(x) - \ldots, \qquad (4.20)$$

где $a_n = |F(\mu_n, 1)|\,\mathrm{e}^{-\mathrm{Le}^*\mu_n^2\overline{x}} > 0$. Очевидно, что коэффициенты a_n монотонно стремятся к нулю (так что $a_n > a_{n+1}$). На регулярном участке можно пренебречь всеми членами ряда (4.20), кроме первого. Оценим погрешность такого приближения. На регулярном участке соотношение (4.20) имеет вид

$$\Delta\overline{C_p} - a_1(x) = b_1(x) - b_2(x) + b_3(x) - \ldots$$

$(b_n(\overline{x}) = a_{n+1}(\overline{x}) - a_{n+2}(\overline{x}))$. Легко показать, что члены $b_n(\overline{x})$ для любого x положительны и образуют монотонно убывающую последовательность, стремящуюся к нулю. Ряд в правой части удовлетворяет всем условиям признака Лейбница, поэтому можно сразу же записать оценку

$$\Delta\overline{C_p} - a_1(x) < b_1(x).$$

На регулярном участке должно выполняться неравенство

$$\Delta\overline{C_p} - a_1(x) < \delta$$

($\delta > 0$ — наперед заданная сколь угодно малая величина).

Следовательно, координата начала регулярного участка является решением уравнения

$$b_1(\overline{x}_p^0) = a_2(\overline{x}_p^0) - a_3(\overline{x}_p^0) = |F(\mu_2, 1)|\,\mathrm{e}^{-\mathrm{Le}^*\mu_2^2\overline{x}_p^0} - |F(\mu_3, 1)|\,\mathrm{e}^{-\mathrm{Le}^*\mu_3^2\overline{x}_p^0} = \delta. \qquad (4.21)$$

Так как уравнение (4.21) трансцендентное, для его решения необходимо использовать численные методы. Однако специфика рассматриваемой задачи, а именно разномасштабность функций в левой части уравнения (4.21), позволяет найти приближенное аналитическое значение корня.

Используя соотношения (4.18), (4.19), можно убедиться, что $\mu_2|F(\mu_2,1)| = \mu_3|F(\mu_3,1)| = \gamma$. Поэтому уравнение (4.21) примет вид

$$\frac{e^{-\mathrm{Le}^*\mu_2^2\bar{x}_p^0}}{\mu_2} - \frac{e^{-\mathrm{Le}^*\mu_3^2\bar{x}_p^0}}{\mu_3} = \frac{\delta}{\gamma}. \tag{4.22}$$

В дальнейшем для упрощения записи корень уравнения будем обозначать буквой z. Для решения (4.22) используем метод Ньютона — Рафсона — Канторовича. Заметим, что значение корня уравнения определяется в основном первым членом в левой части. Поэтому, пренебрегая вторым членом, легко найдем нулевое приближение корня:

$$z_0 = \frac{1}{\mathrm{Le}^*\mu_2^2}\ln\frac{\delta\mu_2}{\gamma}.$$

Рассмотрим функцию

$$G(z) = \frac{e^{-\mathrm{Le}^*\mu_2^2 z}}{\mu_2} - \frac{e^{-\mathrm{Le}^*\mu_3^2 z}}{\mu_3} - \frac{\delta}{\gamma}.$$

Разлагая $G(z)$ в ряд Тейлора в окрестности z_0 и сохраняя только линейные члены, получим

$$G(z) = G(z_0) + \frac{dG(z_0)}{dz}(z - z_0). \tag{4.23}$$

Считая, что z является искомым корнем, из (4.23) имеем

$$z = z_0 - \frac{G(z_0)}{dG(z_0)/dz}$$

или, вычисляя значения функций $G(z)$, $\frac{dG(z)}{dz}$ в точке z_0, окончательно найдем координату начала регулярного участка:

$$\bar{x}_p^0 = \frac{1}{\mathrm{Le}^*\mu_2^2}\ln\frac{\gamma}{\delta\mu_2} - \frac{1}{\mathrm{Le}^*\mu_3}\frac{\left(\frac{\delta\mu_2}{\gamma}\right)^{n^2}}{\mu_2^2\frac{\delta}{\gamma} - \mu_3\left(\frac{\delta\mu_2}{\gamma}\right)^{n^2}} \qquad (n = \mu_3/\mu_2).$$

5. Адиабатическая поверхность. В данном случае физико-математическая формулировка задачи в безразмерной форме (2.14)–(2.17) остается в силе, лишь граничное условие (2.18) меняется на (2.19). Применимым остается и метод решения — преобразование Лапласа. Аналогично случаю изотермической поверхности выпишем общее решение в пространстве изображений:

$$\tilde{\tilde{C}} = \frac{1}{s}\,\frac{\mathrm{sh}\sqrt{s}\,\mathrm{ch}\sqrt{\frac{s}{\mathrm{Le}^*}}\,\bar{y}}{\mathrm{sh}\sqrt{s}\,\mathrm{ch}\sqrt{\frac{s}{\mathrm{Le}^*}} + \sqrt{\mathrm{Le}^*}\,K_a\,\mathrm{sh}\sqrt{\frac{s}{\mathrm{Le}^*}}\,\mathrm{ch}\sqrt{s}} = \frac{1}{s}\,\frac{\Phi_1(s)}{\varphi(s)}; \tag{5.1}$$

$$\tilde{\tilde{T}} = \frac{1}{s}\,\frac{\sqrt{\mathrm{Le}^*}\,K_a\,\mathrm{sh}\sqrt{s}\,\mathrm{ch}\sqrt{\frac{s}{\mathrm{Le}^*}}\,y}{\mathrm{sh}\sqrt{s}\,\mathrm{ch}\sqrt{\frac{s}{\mathrm{Le}^*}} + \sqrt{\mathrm{Le}^*}\,K_a\,\mathrm{sh}\sqrt{\frac{s}{\mathrm{Le}^*}}\,\mathrm{ch}\sqrt{s}} = \frac{1}{s}\,\frac{\Phi_2(s)}{\varphi(s)}. \tag{5.2}$$

Прежде чем приступить к обращению выражений (5.1), (5.2), найдем асимптотики на начальном участке пленки и на бесконечности.

Так как на начальном участке тепловые и диффузионные слои тонкие и решение не «чувствует» граничные условия на стенке, асимптотики выражений (5.1), (5.2) должны совпасть с соответствующими решениями (3.8), (3.9) для изотермической поверхности.

Что это действительно так, легко убедиться, используя схему обращения решения в пространстве изображений, предложенную в п. 3.

Естественно, что средние по длине пластины значения чисел Шервуда и Нуссельта совпадают со значениями (3.13), (3.14). Аналогично находим и асимптотические значения температуры и концентрации на бесконечности:

$$C_\infty = \frac{1}{1+K_a}, \qquad \overline{T}_\infty = \frac{K_a}{1+K_a}.$$

Перейдем теперь к обращению решения (5.1), (5.2). В данном случае выражения (5.1), (5.2) не удовлетворяют условиям теоремы разложения. Однако, записав их в виде

$$\tilde{\tilde{C}} = \frac{\Phi_1(s)/\sqrt{s}}{s\varphi(s)/\sqrt{s}} = \frac{\Psi_1(s)}{s\varphi_0(s)}, \qquad \tilde{\tilde{T}} = \frac{\Phi_2(s)/\sqrt{s}}{s\varphi(s)/\sqrt{s}} = \frac{\Psi_2(s)}{s\varphi_0(s)}, \tag{5.3}$$

легко убедиться, что они будут представлять собой отношения целых трансцендентных функций. Следовательно, к ним уже может быть применена теорема разложения. Из (5.3) видно, что полюсы функций $\tilde{\tilde{C}}\,(s)$ и $\tilde{\tilde{T}}\,(s)$ совпадают. Кроме очевидного нулевого значения корня, имеется счетное множество простых корней, определяемых из уравнения

$$\operatorname{sh}\sqrt{s}\,\operatorname{ch}\sqrt{\frac{s}{\mathrm{Le}^*}} + \sqrt{\mathrm{Le}^*}\,K_a\operatorname{sh}\sqrt{\frac{s}{\mathrm{Le}^*}}\,\operatorname{ch}\sqrt{s} = 0. \tag{5.4}$$

Отметим, что нулевой корень однократный, так как $\lim\limits_{s\to 0}\varphi_0(s) \neq 0$. Используя соотношения (3.19) и вводя новую переменную $\mu = i\sqrt{s/\mathrm{Le}^*}$, из (5.4) получим характеристическое уравнение

$$\operatorname{tg}\sqrt{\mathrm{Le}^*}\,\mu_n + \sqrt{\mathrm{Le}^*}\,K_a\operatorname{tg}\mu_n = 0. \tag{5.5}$$

Так как $\sqrt{\mathrm{Le}^*}$ — в общем случае число иррациональное, дополнительные корни не появляются, и, следовательно, нулевой корень и корни уравнения (5.5) будут единственными полюсами функций (5.3). Из операционного исчисления известно, что если $\Phi(s)$ и $\varphi(s)$ — обобщенные полиномы относительно s, где $\Phi(s) = s^k\Phi_1(s)$, $\varphi(s) = s^k\varphi_1(s)$ $(|k| < 1)$, то

$$\lim_{s\to s_n}\frac{\Phi(s)}{\varphi'(s)} = \lim_{s\to s_n}\frac{\Phi_1(s)}{\varphi_1'(s)}, \tag{5.6}$$

где s_n — корни уравнения $\varphi_1(s) = 0$.

Используя (5.6) и формулы обращения (3.22), получим

$$C = \frac{1}{1+K_a} - 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\sqrt{\mathrm{Le}^*}\,\mu_n\cos\mu_n y}{\mu_n B(\mu_n)}\,e^{-\mathrm{Le}^*\mu_n^2 x}; \tag{5.7}$$

$$\overline{T} = \frac{K_a}{1+K_a} - 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{\mathrm{Le}^*}\,K_a\sin\mu_n\cos\sqrt{\mathrm{Le}^*}\,\mu_n y}{\mu_n B(\mu_n)}\,e^{-\mathrm{Le}^*\mu_n^2 x}. \tag{5.8}$$

Здесь $B(\mu_n) = (1+\mathrm{Le}^*K_a)\sin\mu_n\sin\sqrt{\mathrm{Le}^*}\mu_n - \sqrt{\mathrm{Le}^*}(1+K_a)\cos\mu_n\cos\sqrt{\mathrm{Le}^*}\mu_n$.

6. Анализ решения. Характеристическое уравнение (5.5) трансцендентное и в общем случае произвольных значений Le^* допускает решение только численными методами. Однако, ограничиваясь значениями Le^*, близкими к единице, можно, как и для изотермической поверхности, построить асимптотическое решение уравнения (5.5). Отметим, что при $\mathrm{Le}^* = 1$ корни легко находятся:

$$\mu^{(0)} = \mathrm{Arctg}\, 0.$$

Поэтому решения уравнения (5.5) будем искать в форме разложения (4.11) по малому параметру $\delta = 1 - \mathrm{Le}^*$. Опуская выкладки, аналогичные приведенным в п. 4, получим

$$\mu_{2n} = \mu_n^{(0)}\left[1 + \frac{1 - \mathrm{Le}^*}{2(1+K_a)}\right]. \tag{6.1}$$

Следует отметить, что выражение (6.1) дает только корни, лежащие в интервалах

$$\pi(n - 1/2)\,/\sqrt{\mathrm{Le}^*} < \mu_{2n} < (1/2 + n)\pi, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Корни μ_{2n+1} из интервалов

$$(1/2 + n)\pi < \mu_{2n+1} < (n + 1/2)\pi\,/\sqrt{\mathrm{Le}^*}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

уже не являются близкими к корням невозмущенного уравнения $\mathrm{tg}\mu = 0$, поэтому воспользуемся иным подходом для их определения. Заметим, что длина интервала $(\pi(1/2+n),\ (n+1/2)\pi\,/\sqrt{\mathrm{Le}^*})$ $l = (1/2+n)\pi(\delta/2)$ и при умеренных n есть величина малая. Поэтому можно воспользоваться асимптотическим разложением функций $\mathrm{tg}\,\mu$ и $\mathrm{tg}\sqrt{\mathrm{Le}^*}\mu$ вблизи своих асимптот $y = \pi(1/2 + n)$ и $y = \pi(1/2+n)\,/\sqrt{\mathrm{Le}^*}$:

$$\begin{aligned} \mathrm{tg}\sqrt{\mathrm{Le}^*}\mu &\simeq \frac{1}{(1/2+n)\pi - \sqrt{\mathrm{Le}^*}\mu} \quad &&\text{при} \quad \mu \to (1/2+n)\pi\,/\sqrt{\mathrm{Le}^*} - 0, \\ \mathrm{tg}\,\mu &\simeq \frac{1}{(1/2+n)\pi - \mu} \quad &&\text{при} \quad \mu \to (1/2+n)\pi + 0. \end{aligned} \tag{6.2}$$

Подставляя разложения (6.2) в характеристическое уравнение (5.5), найдем

$$\mu_{2n+1} = \frac{(2n+1)\pi}{2}\,\frac{1+\sqrt{\mathrm{Le}^*}K_a}{1+\mathrm{Le}^* K_a}, \quad n = 0, 1, \ldots \tag{6.3}$$

Так как последовательность корней (6.1), (6.3) монотонно возрастающая, то, как и в изотермическом случае, существует участок пленки, на котором реализуется регулярный режим тепломассопереноса. Следовательно, можно записать ($\Delta C_p = C_p - \overline{C}_\infty$, $\Delta T_p = T_\infty - T_p$)

$$\ln \Delta \overline{C}_p = \ln F_1(\mu_1, y) - \mathrm{Le}^* \mu_1^2 x_p; \tag{6.4}$$

$$\ln \Delta \overline{T}_p = \ln F_2(\mu_1, \overline{y}) - \mathrm{Le}^* \mu_1^2 \overline{x}_p, \tag{6.5}$$

где

$$F_1(\mu_1, \overline{y}) = 2\,\frac{\sin\sqrt{\mathrm{Le}^*}\mu_1 \cos\mu_1 y}{\mu_1 B(\mu_1)};$$

$$F_2(\mu_1, \overline{y}) = 2\,\frac{\sqrt{\mathrm{Le}^*}K_a \sin\mu_1 \cos\sqrt{\mathrm{Le}^*}\mu_1\overline{y}}{\mu_1 B(\mu_1)}.$$

Дифференцируя (6.4), (6.5) по $\overline{x}_p$ и используя (6.3), окончательно получим

$$-\frac{\partial\Delta T_p}{\partial\overline{x}_p} = m\Delta\overline{T}_p, \qquad -\frac{\partial\Delta\overline{C}_p}{\partial\overline{x}_p} = m\Delta\overline{C}_p,$$

$$m = \frac{\pi^2}{4}\left(\frac{\sqrt{\mathrm{Le}^*} + \mathrm{Le}^*K_a}{1 + \mathrm{Le}^*K_a}\right)^2 \simeq \frac{\pi^2}{4}\,\frac{1 + K_a}{1 + \mathrm{Le}^*K_a}\,\mathrm{Le}^*.$$

Выражения для локальных чисел Нуссельта и Шервуда на регулярном участке пленки практически совпадают с выражениями (4.14), (4.15), за исключением множителя

$$f(\mu_1) = \frac{\sin\mu_1 \sin\sqrt{\mathrm{Le}^*}\mu_1}{B(\mu_1)}.$$

Для определения координаты x_p^0 начала регулярного участка приведем функции $F_1(\mu_n, 1)$, $F_2(\mu_n, 1)$ к виду

$$|F_1(\mu_n, 1)| = |F_2(\mu_n, 1)| = 2\,\frac{K_a|\mathrm{tg}\,\mu_n|}{\mu_n[K_a(1 + \mathrm{Le}^*K_a)\,\mathrm{tg}^2\mu_n + (1 + K_a)]}. \tag{6.6}$$

Подставляя разложение функции $\mathrm{tg}\sqrt{\mathrm{Le}^*}\mu$ в ряд Тейлора в окрестности «четных» корней μ_{2n} в характеристическое уравнение (5.5), имеем

$$\mathrm{tg}^2\mu_{2n} - \frac{2p}{\delta\mu_{2n}}\,\mathrm{tg}\,\mu_{2n} + 1 = 0, \tag{6.7}$$

где $\delta = 1 - \mathrm{Le}^*$; $p = 1 + \frac{1+\mathrm{Le}^*}{2}K_a$.

Уравнение (6.7) позволяет выразить значение $\mathrm{tg}\,\mu_{2n}$ через значение соответствующего корня μ_{2n}:

$$\mathrm{tg}\,\mu_{2n} \simeq \frac{\delta\mu_{2n}}{2p}. \tag{6.8}$$

Используя выражения (6.1), (6.8), из (6.6) находим

$$|F_1(\mu_{2n}, 1)| = |F_2(\mu_{2n}, 1)| = \frac{1}{An^2 + B}.$$

Здесь

$$A = \frac{\pi^2}{4}\,\frac{(1 + \mathrm{Le}^*K_a)\delta}{p}; \qquad B = \frac{(1 + K_a)p}{K_a\delta}.$$

Определим вид функций $F_1|(\mu, 1)|$, $F_2|(\mu, 1)|$ для значений корней с нечетными индексами, т. е. для $\mu = \mu_{2n+1}$. Подставляя выражения (6.2), (6.3) в (6.6), получим

$$|F_1(\mu_{2n+1}, 1)| = |F_2(\mu_{2n+1}, 1)| = \frac{1}{(2n+1)^2C + D},$$

где

$$C = \frac{\pi^2\delta(1 + K_a)(1 + \sqrt{\mathrm{Le}^*}K_a)}{16(1 + \mathrm{Le}^*K_a)^2}, \qquad D = \frac{(1 + \mathrm{Le}^*K_a)(1 + \sqrt{\mathrm{Le}^*}K_a)}{\delta K_a}.$$

Используя выражения (6.2) и (6.8), легко показать, что ряд (5.7), а следовательно, и ряд (5.8) являются знакочередующимися и удовлетворяют всем условиям признака Лейбница. Значит, координата начала регулярного участка $\bar{x}_p^0$ определяется из неравенства

$$\frac{1}{A+B}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{Le}^*\mu_2^2\bar{x}_p^0} \le \varepsilon,$$

разрешая которое относительно $\bar{x}_p^0$ и подставляя вместо μ_2 его значение (6.1), имеем

$$\bar{x}_p^0 \ge -\frac{\ln\left[(A+B)\varepsilon\right]}{\pi^2\mathrm{Le}^*\left[1+\frac{2(1-\mathrm{Le}^*)}{(1+K_a)}\right]}.$$

В заключение отметим, что полученные в данной работе результаты доказывают, что существует диапазон размеров шаров засыпки, для которого интенсивность тепло- и массообмена существенно возрастает (в 2–4 раза) по сравнению с пленочной абсорбцией на гладкой пластине. Найдены общие аналитические решения как для изотермической, так и адиабатической поверхности, из которых следуют известные решения задач неизотермической пленочной абсорбции, полученные в приближении пограничного слоя. Доказано, что для шаров зернистого слоя с размерами больше 1,5 мм наблюдается полная аналогия процессов тепломассопереноса, связанная с близостью эффективного числа Льюиса к единице. Показано, что, начиная с определенного расстояния от начального сечения пленки, реализуется регулярный режим тепло- и массообмена, для которого характерны линейная зависимость логарифмов избыточной температуры и концентрации от продольной координаты. В обоих случаях задания граничных условий получены явные аналитические выражения для координат начала регулярного участка.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Вольных Ю. А.** Повышение эффективности абсорбционных бромистолитиевых холодильных машин на основе совершенствования систем газоудаления: Автореф. дис. ... канд. техн. наук. Л., 1990.
2. **Накоряков В. Е., Григорьева Н. И.** О совместном тепломассопереносе при абсорбции на каплях и пленках // Инж.-физ. журн. 1977. Т. 32. № 3. С. 399–405.
3. **Накоряков В. Е., Григорьева Н. И.** Расчет тепломассообмена при неизотермической абсорбции на начальном участке стекающей пленки // Теорет. основы хим. технологии. 1980. Т. 17, № 4. С. 483–488.
4. **Ergun S.** Fluid flow through packed columns // Chem. Eng. Progr. 1952. V. 48. P. 89–94.
5. **Аэров М. Э., Тодес О. М.** Гидравлические и тепловые основы работы аппаратов со стационарным и кипящим зернистым слоем. Л.: Химия, 1968.
6. **Cheng P.** Heat transfer in geothermal systems // Advances in Heat Transfer. 1978. V. 14. P. 1–100.
7. **Алексеенко С. В., Накоряков В. Е., Покусаев Б. Г.** Волновое течение пленок жидкости. Новосибирск: ВО «Наука», Сибирская издательская фирма, 1992.

Поступила в редакцию 20/VI 1994 г.