

УДК 532.526.011.55.011.6

МНОГОКОМПОНЕНТНАЯ ДИФФУЗИЯ И ТЕПЛООБМЕН ПРИ ОБТЕКАНИИ ТЕЛА ХИМИЧЕСКИ РАВНОВЕСНЫМ ИОНИЗОВАННЫМ ГАЗОМ

О. Н. Суслов

(Москва)

В данной работе исследуется течение многокомпонентной частично ионизованной смеси газов в химически равновесном пограничном слое около непроницаемой поверхности. В качестве примера рассмотрено обтекание сферы частично ионизованным воздухом. Химический состав в каждой точке пограничного слоя находился по текущим значениям давления, температуры и концентраций химических элементов методом Ньютона параллельно с интегрированием основной системы неавтономных дифференциальных уравнений методом прогонки. Обсуждается также другой, более экономичный в смысле затраты машинного времени метод нахождения состава. Найдено, что безразмерный тепловой поток к стенке в передней критической точке сферы при постоянных концентрациях химических элементов может быть на 26% больше, чем при переменных.

Эта работа является продолжением работы [1], в которой основная система уравнений Навье — Стокса и Прандтля для случая химически равновесных течений ионизованных смесей без внешних электромагнитных полей приведена при помощи исключения электрического поля, возникающего за счет разделения заряженных компонент с разными диффузионными свойствами, к виду, аналогичному соответствующей системе для химически реагирующей смеси нейтральных компонент. В [1] было показано, что, когда число химических элементов в ионизованной смеси больше двух, химический состав в каждой точке потока зависит не только от давления и температуры, но и от концентраций химических элементов как новых независимых переменных. Это обстоятельство приводит к появлению дополнительных членов в уравнении энергии, пропорциональных градиентам концентраций химических элементов.

В данной работе система уравнений для частично ионизованного химически равновесного пограничного слоя численно интегрируется методом прогонки [2]. Сравниваются профили концентраций компонент в пограничном слое при постоянных и переменных концентрациях химических элементов для случая обтекания сферы частично ионизованным воздухом. Отмечается, что в отличие от случая диссоциированного воздуха, когда на стенке концентрация химического элемента кислорода может быть больше, чем на внешней границе пограничного слоя, в случае частично ионизованного воздуха на поверхности тела образуется избыточная концентрация химического элемента азота. Это объясняется тем, что при рассмотренных условиях на внешней границе пограничного слоя ионизируется больший процент атомов азота, чем кислорода.

Для критической точки тела получены аппроксимационные формулы для безразмерного теплового потока в зависимости от перепада энтальпий и параметра l/σ_{ef} поперек пограничного слоя (Здесь σ_{ef} — эффективное число Прандтля, $l = \mu\rho/\mu_w\rho_w$, μ — вязкость смеси, ρ — плотность смеси, индекс w означает поверхность тела.)

Получено, что при ионизации безразмерный тепловой поток в замороженном пограничном слое может быть в 1,4 раза больше, чем в равновесном. Отношение тепловых потоков на боковой поверхности и в критической точке сферы вплоть до угла 80° с точностью до 5—10% оказалось равным отношению этих величин, вычисленных в работе [3] для диссоциированного воздуха на основе гипотезы локального подобия и других упрощающих предположений, что объясняется взаимной компенсацией некоторых членов, входящих в это отношение. При углах более 85° отклонение от работы [3] в отношении тепловых потоков составляет 25—30%.

1. Система уравнений многокомпонентного химически равновесного частично ионизованного пограничного слоя при отсутствии внешних электромагнитных полей и переноса энергии излучением [1], которая за-

писана в переменных А. А. Дородницына в форме Лиза (ξ, η) для неизвестных f, θ, z_i^* ($i = 1, \dots, N_e - 2$)

$$\begin{aligned}\xi &= \int_0^x \mu_e \rho_e u_e r^{2\nu} dx, \quad \eta = u_e r^\nu \left(\frac{l_e}{2\xi} \right)^{1/2} \int_0^\eta \rho dy, \quad l = \frac{\mu \rho}{\mu_w \rho_w} \\ u &= u_e f_{\eta'}, \quad \rho v = r^{-\nu} \left[(2\xi l_e)^{-1/2} \varphi \xi_{x'} + \left(\frac{2\xi}{l_e} \right)^{1/2} \eta_{x'} f_{\eta'} \right] \\ \varphi &= f [1 - (\ln l_e) \xi'] + 2\xi f_{\xi'}, \quad \theta = \frac{T - T_w}{T_e - T_w}, \quad z_i^* = \frac{c_i^* - c_{iw}^*}{c_{ie}^* - c_{iw}^*}\end{aligned}$$

приводится к виду, удобному для численного интегрирования по схеме, принятой в работе [2].

Здесь μ, ρ, u, v, r — соответственно вязкость смеси, плотность, проекции среднemasовой скорости на касательную и нормаль к поверхности, расстояние до оси симметрии тела; $\nu = 0$ или 1 соответственно при обтекании плоского контура или осесимметричного тела; T — температура, c_i^* — концентрация i -го химического элемента, N_e — число химических элементов, индекс e относится к величинам на внешней границе пограничного слоя, w — к величинам на теле, штрих здесь и всюду в дальнейшем означает производную по переменной, стоящей внизу.

Эта система дифференциальных уравнений (количества движения смеси, притока тепла, N_e уравнений диффузии химических элементов) и соотношения Стефана — Максвелла для частично ионизованного газа замыкается алгебраическими условиями химического равновесия и условиями отсутствия тока и квазинейтральности. Граничные условия на непроницаемой поверхности следующие: условие прилипания для составляющих скорости, условия сохранения химических элементов при заданной температуре тела. На внешней границе пограничного слоя граничные условия (u_e, T_e) находятся из решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений вдоль струйки тока при данном распределении давления, взятом из известных численных решений невязкой задачи. (В п. 3 для сферы распределение давления аппроксимировалось по данным [4].) Концентрации химических элементов c_{je}^* ($j = 1, \dots, N_e - 2$) вдоль внешней границы пограничного слоя постоянны и равны своим значениям $c_{j\infty}^*$ в набегающем потоке.

Параллельно с интегрированием основной системы дифференциальных уравнений в каждой точке необходимо для определения химического состава решать (при заданных текущих значениях давления p , температуры T и концентраций химических элементов c_i^* ($i = 1, \dots, N_e - 2$)) следующую систему алгебраических уравнений:

$$\sum_{i=1}^N \left(A_{ij} - \frac{m_i}{m_j} c_j^* \right) K_{pi} p^{v_i} \prod_{k=1}^{N_e} \exp(A_{ik} v_k) = 0 \quad (j = 1, \dots, N_e - 1)$$

$$\sum_{i=1}^N K_{i,i} p^{v_i} \prod_{k=1}^{N_e} \exp(A_{ik} v_k) = 1, \quad v_i = \sum_{j=1}^{N_e} A_{ij} - 1, \quad v_i = \ln x_i \quad (1.1)$$

$$v_j = \sum_{k=1}^{N_e} A_{ik} v_k + \ln K_{pi} + v_i \ln p \quad (i = 1, \dots, N) \quad (1.2)$$

Здесь m_i, x_i — соответственно молекулярный вес и молярная концентрация i -й компоненты, A_{ik} — стехиометрический коэффициент в реакции образования компоненты с химическим символом E_i из компонент,

принятых за элементы

$$E_i = \sum_{k=1}^{N_e} A_{ik} E_k - Q_i^*(T) \quad (i > N_e) \quad (1.3)$$

$$E_i \equiv E_i, \quad A_{ik} \equiv 1, \quad K_{pi} \equiv 1, \quad Q_i^*(T) \equiv 0 \quad (i \leq N_e)$$

Q_i^* , K_{pi} — соответственно молярная теплота и константа равновесия этой реакции.

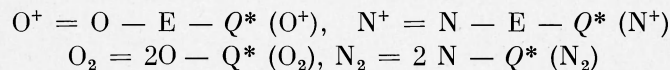
Система (1.1), (1.2) удобна для решения методом Ньютона, так как позволяет из (1.1) найти сначала все v_j для $j \leq N_e$, а затем из (1.2) — остальные v_j ($j > N_e$), причем при решении системы уравнений для поправок Δv_j ($j \leq N_e$) приходится определять обратную матрицу порядка N_e . (Напомним, что обычно число элементов в конкретной задаче гораздо меньше числа компонент).

Если продифференцировать соотношения (1.1) по η , а затем разрешить полученную систему относительно $(v_i)_\eta'$, то получится система уравнений вида

$$(v_i)_\eta' = \sum_{j=1}^{N_e-2} E_{ij} (c_j^*)'_\eta + E_{iN_e-2} T'_\eta \quad (i = 1, \dots, N_e) \quad (1.4)$$

где E_{ij} есть известные функции p , T , v_j . Тогда при заданных $(c_j^*)'_\eta$, c_j^* , T , T'_η , p для определения v_i ($i \leq N_e$) имеем задачу Коши, а остальные v_i ($i > N_e$) в каждой точке определяются из (1.2), причем предполагается, что в одной какой-то точке состав найден (например, методом Ньютона). Таким образом, систему (1.4), (1.2) достаточно присоединить к основной системе дифференциальных уравнений, решаемой методом прогонки. По сравнению с методом Ньютона такой способ может дать выигрыш в машинном времени, так как в методе Ньютона для достижения необходимой точности в каждой точке надо проводить несколько итераций.

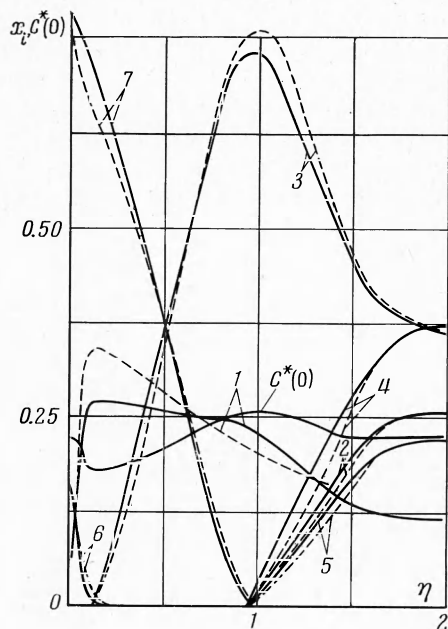
2. В качестве примера решалась описанная выше основная краевая задача в частном случае обтекания сферы частично ионизованным воздухом при отсутствии подачи массы через поверхность. Диапазон изменения температуры на внешней границе пограничного слоя в критической точке был от 10 000 до 16 000° К при давлениях торможения от 10^{-2} до 100 атм. Температура стенки принималась 2 000 и 3 000° К. За элементы принимались О, Е (электроны), N, причем учитывалась следующая система реакций:



Теплоемкости компонент были аппроксимированы полиномами от T по данным работы [5], после чего константы равновесия и теплоты реакций выражались через коэффициенты этих полиномов и константы равновесия и теплоты реакций при некоторой фиксированной температуре. Сечения столкновений для пар нейтральная частица — нейтральная частица, нейтральная частица — заряженная частица как степенные функции температуры аппроксимировались по данным работ [6,7], а сечения перезарядки — по данным работы [8]. Сечения столкновений для пар заряженная частица — заряженная частица брались кулоновскими. Коэффициенты вязкости и теплопроводности отдельных компонент и смесей, а также бинарные коэффициенты диффузии рассчитывались по формулам работы [9].

На фиг. 1 представлены профили молярных концентраций (1 — $x(\text{O})$, 2 — $x(\text{E})$, 3 — $x(\text{N})$, 4 — $10 x(\text{O}^+)$, 5 — $x(\text{N}^+)$, 6 — $x(\text{O}_2)$, 7 — $x(\text{N}_2)$)

и концентрации химического элемента O $c^*(O)$ поперек пограничного слоя в критической точке сферы при температуре торможения $14\,000^\circ\text{K}$, температуре стенки 3000°K и давлении торможения 1 атм , причем пунктиром отмечены профили соответствующих концентраций в предположении, что $c^*(O) = \text{const} = 0.231$ поперек пограничного слоя. Как следует из фиг. 1, $c^*(O)$ в пограничном слое имеет максимум 0.255 и минимум 0.17 , причем на стенке концентрация химического элемента кислорода принимает значение $0.221 < 0.231$. Это объясняется тем, что при рассмотренных



Фиг. 1

основной краевой задачи тепловой поток к стенке $(J_q)_w$ находился по формуле

$$\begin{aligned} (-J_q)_w &= [(\nu + 1) \mu_w \rho_w \beta^*]^{1/2} \left[\frac{c_p}{\sigma} (T_e - T_w) \theta_n' + \sum_{i=1}^N Q_i X_i \right]_w = \\ &= [(\nu + 1) \mu_w \rho_w \beta^*]^{1/2} (T_e - T_w) \left[\frac{\theta_n' \lambda_{ef}}{\mu} \right]_w, \quad \beta^* = \frac{u_e (\ln \xi)_x'}{2(\nu + 1)} \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$J_i = \mu_w \rho_w u_e r^\nu \left[\frac{l_e}{2\xi} \right]^{1/2} X_i, \quad \sigma = \frac{\mu c_p}{\lambda_e}, \quad Q_i^* = m_i Q_i, \quad \lambda_{ef} = \lambda + \lambda_r$$

Здесь λ , λ_{ef} , λ_r , c_p , J_i — соответственно теплопроводность, эффективная теплопроводность [1], теплопроводность за счет химических реакций [1], теплоемкость смеси, диффузионный поток i -й компоненты.

Результаты расчетов теплового потока в критической точке сферы, приведенные в таблице, были аппроксимированы в виде

$$c_h = (0.772 - 2.9\chi^{-0.49} \frac{h_w}{h_e}) \chi^{0.235}, \quad 2000^\circ\text{K} \leq T_w \leq 3000^\circ\text{K} \quad (2.2)$$

$$c_h = \frac{\sigma_w (-J_q)_w}{(\beta^* \mu_w \rho_w)^{0.5} (h_e - h_w)}, \quad \chi = \left(\frac{l}{\sigma_{ef}} \right)_e (\sigma_{ef})_w, \quad \sigma_{ef} = \frac{\mu c_p^{ef}}{\lambda_{ef}}, \quad c_p^{ef} = c_{pr} + c_p$$

T_e	T_w	2000		3000	
	p	χ	c_h	χ	c_h
10 000	10^{-2}	0.0815	0.326	0.188	0.34
	1	0.291	0.394	0.584	0.384
12 000	10^{-2}	0.045	0.223	0.102	0.218
	1	0.142	0.366	0.283	0.372
	10	0.309	0.409	0.465	0.402
	100	0.502	0.417	0.62	0.436
14 000	10^{-2}	0.07	0.186	0.156	0.21
	1	0.0745	0.294	0.1475	0.31
	10	0.195	0.381	0.284	0.388
	100	0.377	0.4025	0.464	0.415
16 000	10^{-2}	0.0783	0.188	0.173	0.1995
	1	0.0573	0.249	0.106	0.257
	10	0.125	0.339	0.182	0.33

где h означает полную энтальпию, а c_p — теплоемкость, обусловленную протеканием реакций (определена в [1]).

Для проверки влияния эффекта разделения химических элементов на величину безразмерного теплового потока c_h были проведены расчеты при постоянной величине c^* (О), равной 0.231. При температуре стенки 2000°K и давлении 1 атм величина c_h при постоянной c^* (О) оказалась на 5—10% больше истинной, а при температуре стенки 3000°K и давлении 10^{-2} атм превышение составило 7, 26, 15, 14% соответственно для температур торможения 10 000, 12 000, 14 000, 16 000°K. Проводилось также сравнение величин c_h для равновесного (данная работа) и замороженного [13] пограничных слоев. В отличие от диссоциированного пограничного слоя около идеально каталитической стенки, где различие в тепловых потоках в замороженном и равновесном случаях незначительно, при ионизации c_h для замороженного пограничного слоя может превышать c_h для равновесного пограничного слоя более чем на 40%. Так, при $T_w = 3000^\circ\text{K}$, $p = 10^{-2}$ атм отношение безразмерных тепловых потоков, вычисленных в данной работе и в работе [13], составило 0.865, 0.596, 0.544, 0.545 соответственно для $T_e = 10\,000$, 12 000, 14 000, 16 000°K. Такое различие объясняется тем, что в равновесном пограничном слое у поверхности тела образуется слой атомов и молекул, который препятствует проникновению к стенке и рекомбинации на ней заряженных частиц, в то время как в замороженном пограничном слое потоки заряженных частиц на стенку могут быть значительными.

Результаты расчетов конвективного теплового потока в критической точке, полученные в этой работе при достаточно низких температурах стенки, согласуются с точностью 5—10% с результатами работы [7], относящимися к равновесному пограничному слою. Это можно объяснить уменьшением влияния разделения химических элементов на величину c_h с уменьшением температуры стенки ($T_w \leq 2\,000^\circ\text{K}$).

Отклонение в величине конвективного теплового потока, найденного в данной работе, от экспериментальных данных [14] также составляет 5—10%.

Перейдем к результатам расчета обтекания боковой поверхности сферы.

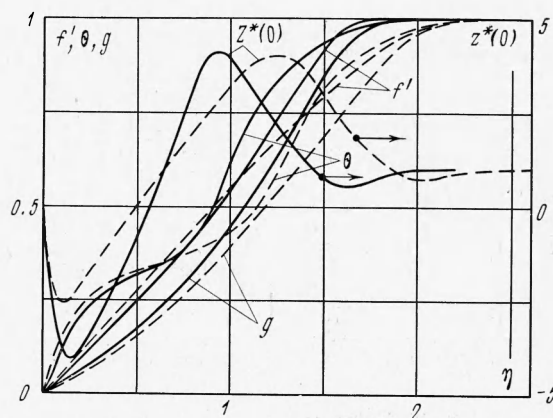
3. На фиг. 2 представлены профили

$$J_n' = \frac{u}{u_e}, \quad \theta = \frac{T - T_w}{T_e - T_w}, \quad g = \frac{H - H_w}{H_e - H_w}, \quad H = \sum_{k=1}^{N_e} c_k^* h_k - \sum_{k=1}^N c_k Q_k + \frac{u^2}{2} \quad (3.1)$$

и безразмерной концентрации химического элемента кислорода O

$$z^*(O) = [c^*(O) - c_w^*(O)] / [c_e^*(O) - c_w(O)]$$

при обтекании сферы, соответствующие температуре торможения



Фиг. 2

14 000° К, давлению торможения 1 атм и температуре стенки 3 000° К, причем пунктиром обозначены профили при

$$\zeta = x / R = 1.475$$

а сплошной линией — при $\zeta = 0$.

Отношение тепловых потоков к стенке в данной точке тела и в критической точке (индекс s) может быть представлено в виде (индекс w опускаем)

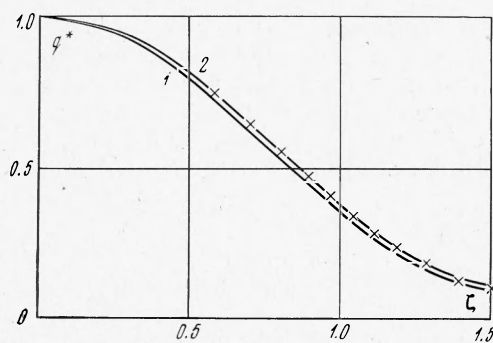
$$q^* = \frac{J_q(x)}{J_q(0)} = \left(\frac{\beta_s^* \mu_{ws}^2 \rho_{ws}^2}{\beta_s^* \mu_{ws}^2 \rho_{ws}^2} \right)^{0.5} \frac{\sigma_s^*}{\sigma^*} \frac{g_{\eta'}'}{(g_{\eta'}')_s},$$

$$\sigma^* = \frac{\mu (c_p^{**})_{ef}}{h_{ef}} \quad (3.2)$$

где величина $(c_p^{**})_{ef}$ определена в [1].

На фиг. 3 приводится распределение q^* вдоль поверхности сферы, причем кривая 1 соответствует условиям $(T_s)_e = 14\,000^\circ \text{ К}$, $p = 1 \text{ атм}$, $T_w = 3\,000^\circ \text{ К}$, крестики

соответствуют температуре поверхности 2000° К , а кривая 2 получена в результате расчета по формуле работы [3], в которой распределение теплового потока вдоль поверхности для случая обтекания тел диссоциированным воздухом на основании гипотезы локального подобия было найдено в предположении, что числа Льюиса одинаковы для всех компонент и равны единице. Результаты расчетов неавтомодельной задачи, выполненных в работе, показывают, что отношения σ_s^* / σ^* и $g_{\eta'}' / (g_{\eta'}')_s$, входящие в формулу (3.2) и вычисленные из полной системы уравнений, компенсируют друг друга таким образом, что их произведение с точностью до 5—10% равно отношению $g_{\eta'}' / (g_{\eta'}')_s$, найденному и аппрок-



Фиг. 3

симированному в работе [3] при вышеуказанных упрощениях. При $\zeta > 1.45$ гипотеза локального подобия перестает быть верной и отклонение в результатах данной работы и работы [3] превышает 20%.

Автор благодарит Г. А. Тирского за обсуждение работы.

Поступила 31 VII 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Су слов О. Н., Ти р с к и й Г. А., Ш е и н и к о в В. В. Описание химически равновесных течений многокомпонентных ионизованных смесей в рамках уравнений Навье — Стокса и Прандтля. ПМТФ, 1971, № 1.
2. П е т у х о в И. В. Численный расчет двумерных течений в пограничном слое. В сб. «Численные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений и квадратурные формулы», М., «Наука», 1964, стр. 304—325.
3. К е м п, Р о у з, Д е т р а. Ламинарный теплообмен тупых тел с потоком диссоциированного воздуха. В сб. «Газодинамика и теплообмен при наличии химических реакций», М., Изд-во иностр. лит., 1962.
4. Б е л о ц е р к о в с к и й О. М. Расчет обтекания осесимметричных тел с отошедшей ударной волной. М., ВЦ АН СССР, 1961.
5. Термодинамические свойства индивидуальных веществ, т. 2. М., Изд-во АН СССР, 1962.
6. П э н Ц з а й - ч э н, П и н д р о х. Уточненный расчет свойств воздуха при высоких температурах. Вопр. ракетн. техн., 1962, № 12.
7. Ф э й, К е м п. Теория теплоотдачи в точке торможения в частично ионизованном двухатомном газе. Механика. Сб. перев. и обз. ин. лит., 1964, № 1.
8. Ф э й, К е м п, К е т е к, Ф а й н б е р г. Теплообмен в ионизованном газе. Вопр. ракетн. техн., 1966, № 4.
9. Г и р ш ф е л ь д е р Дж., К е р т и с с Ч., Б е р д Р. Молекулярная теория газов и жидкости. М., Изд-во иностр. лит., 1961.
10. А н ф и м о в Н. А. О некоторых эффектах, связанных с многокомпонентным характером газовых смесей. Изв. АН СССР, Механика и машиностроение, 1963, № 5.
11. Т и р с к и й Г. А. Определение эффективных коэффициентов диффузии в ламинарном многокомпонентном пограничном слое. Докл. АН СССР, 1964, т. 155, № 6.
12. Г р о м о в В. Г. Химически неравновесный ламинарный пограничный слой в диссоциированном воздухе. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 2.
13. Су слов О. Н. Расчет конвективного теплового потока в окрестности критической точки при обтекании тела частично ионизованным газом. Изв. АН СССР, МЖГ, 1969, № 4.
14. Р о у з П. Х., С т а н к е в и ч Дж. О. Измерения теплоотдачи в частично ионизованном воздухе. Ракетная техника и космонавтика, 1955, № 9.