ПМТФ, № 3, 1965

ВЛИЯНИЕ АНИЗОТРОПИИ ВЯЗКОСТИ НА ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОЕ ТЕЧЕНИЕ ИОНИЗОВАННОЙ СРЕДЫ В КОМПЛАНАРНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Э. Г. Сахновский

(Ленинград)

В работе исследуется влияние анизотропии коэффициентов вязкости на движение ионизованной среды между параллельными пластинами с магнитным полем, имеющим составляющие только в плоскости течения. Предполагается, что можно пренебречь сжимаемостью среды и зависимостью коэффициентов переноса от температуры, а также считать степень ионизации постоянной.

Показано, что, в отличие от случая, когда ионы не обладают спиральным пробегом и компланарное магнитное поле не оказывает никакого влияния на движение среды, учет ларморовского вращения ионов приводит к значительному усложнению картины течения. В частности, вязкая сила вызывает появление поперечной составляющей скорости.

§ 1. Постановка задачи. Движение несжимаемой среды, являющейся смесью электронного, ионного и нейтрального газов с постоянной степенью ионизации, можно описать следующей системой уравнений, выведенной в работах [1,2]:

$$\rho\left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}\nabla)\,\mathbf{u}\right] = -\nabla p - \operatorname{div}\pi + \mathbf{j}\times\mathbf{B}, \qquad \operatorname{div}\mathbf{u} = 0$$

$$\mathbf{j} + \frac{\omega_e\tau_0}{B}\left(\mathbf{j}\times\mathbf{B} - \frac{Zs}{1+Zs}\nabla p\right) + 2(1-s)^2\frac{\omega_i\tau_{ia}\omega_e\tau_0}{B^2}\Big[\mathbf{B}\times(\mathbf{j}\times\mathbf{B}) +$$

$$+ \frac{Zs}{1+Zs}\nabla p\times\mathbf{B} - \frac{1}{1-s}(s\operatorname{div}\pi - \operatorname{div}\pi_i)\times\mathbf{B}\Big] = \sigma_0(\mathbf{E} + \mathbf{u}\times\mathbf{B}) \quad (1.1)$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \qquad \operatorname{rot}\frac{\mathbf{B}}{\mu_0} = \mathbf{j}, \qquad \operatorname{div}\varepsilon_0\mathbf{E} = \rho_e, \qquad \operatorname{div}\mathbf{B} = 0$$

$$(\tau_0^{-1} = \tau_{ei}^{-1} + \tau_{ea}^{-1})$$

Здесь $\mathbf{u}$ — скорость, p — давление, ρ — плотность, s — степень ионизации среды; π и π_i — тензоры вязких напряжений смеси в целом и ее ионной составляющей, выражения для которых получены в работе [1]; $\mathbf{B}$ — вектор магнитной индукции, $\mathbf{E}$ — вектор напряженности электрического поля, $\mathbf{j}$ — вектор плотности тока, ρ_e — объемный заряд, μ_0 и ε_0 — магнитная и электрическая постоянные, ω_e и ω_i — циклотронные частоты электронов и ионов, $\sigma_0 = \mathrm{const}$ — проводимость среды без магнитного поля, $\tau_{\alpha\beta}^{-1}$ — эффективная частота столкновений частиц α- и β-сорта ($\alpha, \beta = e, i, a$ соответственно электрон, ион, нейтрал), Z — зарядовое число.

Рассмотрим канал, образованный двумя бесконечными пластинами, расположенными в плоскостях $z = \pm a$, в котором движение ионизованной среды вызывается либо перепадом давления в направлении оси x, либо движением верхней пластины в том же направлении (течение Куэтта). Будем предполагать, что электромагнитное поле и скорость зависят только от поперечной координаты и времени ($d/dx = d/dy = 0$). Тогда из гидродинамического уравнения неразрывности и условия непротекания газа через стенки канала получим $u_z \equiv 0$. Из первого уравнения Максвелла и граничного условия отсутствия нормальной составляющей вектора магнитной индукции будем иметь $B_z \equiv 0$. Наконец, из второго уравнения Максвелла [1] имеем $j_z \equiv 0$. Остальные проекции уравнений (1.1) на оси координат запишем в безразмерном виде, для чего, исходя из физики задачи, введем в качестве характерных размеров для

величины $z,\ \mathbf{u},\ t,\ P_x = -\partial p / \partial x,\ B,\ E_x,\ E_y,\ E_z,\ j,\ \partial p / \partial z,\ \rho_e$

$$a,\ U_0,\ a / U_0,\ \rho U_0^2 / a,\ B_0,\ E_0,\ U_0 B_0,\ \sigma_0 E_0,\ \sigma_0 E_0 B_0,\ \varepsilon_0 B_0 U_0 / a$$

Тогда, записав составляющие тензора вязких напряжений при помощи формул работы [1], получим для проекций уравнения движения

$$\frac{\partial u_x}{\partial t} - \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\eta_1 B_y^2 + \eta_2 B_x^2}{B^2}\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{B_x B_y(\eta_1 - \eta_2)}{B^2}\frac{\partial u_y}{\partial z}\right] = P_x$$

$$\frac{\partial u_y}{\partial t} + \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{B_x B_y(\eta_1 - \eta_2)}{B^2}\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\eta_1 B_x^2 + \eta_2 B_y^2}{B^2}\frac{\partial u_y}{\partial z}\right] = 0 \qquad (1.2)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{1}{GM^2}\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\eta_3}{B}\left(B_y\frac{\partial u_x}{\partial z} - B_x\frac{\partial u_y}{\partial z}\right)\right] + j_x B_y - j_y B_x$$

$$\left(B^2 = B_x^2 + B_y^2,\ R = \frac{U_0 a\rho}{\eta^{(0)}},\ M^2 = B_0^2 a^2\frac{\sigma_0}{\eta^{(0)}},\ G = \frac{E_0}{U_0 B_0},\ \eta_k = \frac{\eta^{(K)}}{\eta^{(0)}};\ k = 1, 2, 3\right)$$

Безразмерный перепад давления P_x в общем случае может зависеть только от времени; кроме того, предполагается для простоты, что $\partial p / \partial y \equiv 0$. Формулы для η_k — приведенных коэффициентов вязкости частично ионизованного газа в сильном магнитном поле [1], отнесенных к газодинамическому ($B = 0$) коэффициенту вязкости $\eta^{(0)} = \mathrm{const}$, — имеют вид

$$\eta_1(B) = \eta_2(2B) = \frac{1 + {}^{16}/_9\,\omega_i^2\tau_i^2 B^2\varepsilon_a}{1 + {}^{16}/_9\,\omega_i^2\tau_i^2 B^2}, \qquad \eta_3 = \frac{{}^4/_3\,\omega_i\tau_i B(1 - \varepsilon_a)}{1 + {}^{16}/_9\,\omega_i^2\tau_i^2 B^2} \qquad (1.3)$$

$$\left(\omega_i\tau_i = \frac{ZeB_0}{m_i}\tau_i, \qquad \varepsilon_a = \eta_a / \eta^{(0)}\right)$$

где безразмерный параметр $\omega_i\tau_i$ характеризует анизотропию коэффициентов вязкости (m_i — масса, Ze — заряд иона; τ_i связано со временем между всевозможными столкновениями ионов [2]). Зависимость приведенного коэффициента вязкости «изолированных» нейтралов [1] ε_a от степени ионизации при $Z = 1$ можно представить, согласно оценкам работы [6], приближенной формулой

$$\varepsilon_a \sim \frac{(1 - s)(s + \beta)^2}{[s(1 - s) + \beta(1 + s^2)][s(1 + \beta) + \beta]} \qquad (\beta \sim 10^{-2} \div 10^{-5}) \qquad (1.4)$$

Из (1.3) и (1.4) видим, что как при $s = 0$ (обычная гидродинамика), так и при $\omega_i\tau_i \ll 1$ (отсутствие ларморовского вращения ионов) имеем $\eta_1 = \eta_2 = 1$, $\eta_3 = 0$, и первые два уравнения системы (1.2) принимают вид

$$\frac{\partial u_x}{\partial t} - \frac{1}{R}\frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} = P_x, \qquad \frac{\partial u_y}{\partial t} - \frac{1}{R}\frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} = 0 \qquad (1.5)$$

В силу однородности начального и граничного условий для u_y, как в течении Куэтта ($P_x = 0$), так и в течении при заданном градиенте давления получим $u_y \equiv 0$. Наличие компланарного магнитного поля при $s \neq 0$ приводит при этом только к появлению градиента dp / dz, уравновешивающего

---

[1] В работе [5] считается $j_z = \mathrm{const} \neq 0$, что противоречит предположению о зависимости магнитного поля только от поперечной координаты.

[2] Здесь τ_i соответствует величине $\tau_i\theta$ работы [1].

пондермоторную силу. Учет же анизотропии коэффициентов вязкости дает дополнительный вклад в указанный градиент вследствие возникновения поперечной вязкой силы, а также вызывает движение среды в ортогональном к приложенной внешней силе направлении.

Составляющие плотности тока j_x и j_y определяются из проекций на оси x и y обобщенного закона Ома

$$j_x = \frac{1}{1+2(1-s)^2\omega_i\tau_{ia}\omega_e\tau_0 B^2}\Big\{E_x - \frac{Zs\omega_e\tau_0}{(1+Zs)GN}P_x + 2(1-s)^2\omega_i\tau_{ia}\omega_e\tau_0\Big[B_x^2E_x + B_xB_yE_y + \frac{Zs}{1+Zs}\Big(B_y\frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\omega_e\tau_0}{GN}B_x^2P_x\Big) - \frac{B_y}{(1-s)GM^2}\frac{\partial}{\partial z}\Big(\frac{s\eta_3-\eta_3^i}{B}\Big(B_x\frac{\partial u_y}{\partial z} - B_y\frac{\partial u_x}{\partial z}\Big)\Big)\Big]\Big\}$$

$$j_y = \frac{1}{1+2(1-s)^2\omega_i\tau_{ia}\omega_e\tau_0 B^2}\Big\{E_y + 2(1-s)^2\omega_i\tau_{ia}\omega_e\tau_0\Big[B_xB_yE_x + B_y^2E_y - \frac{Zs}{1+Zs}\Big(B_x\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\omega_e\tau_0}{GN}B_xB_yP_x\Big) + \frac{B_x}{(1-s)GM^2}\frac{\partial}{\partial z}\Big(\frac{s\eta_3-\eta_3^i}{B}\Big(B_x\frac{\partial u_y}{\partial z} - B_y\frac{\partial u_x}{\partial z}\Big)\Big)\Big]\Big\}$$

$$\Big(\omega_e\tau_0 = \frac{eB_0}{m_e}\tau_0,\; N = \frac{B_0^2\sigma_0 a}{\rho U_0}\Big) \qquad (1.6)$$

Третья проекция закона Ома дает выражение для индуцированного поперечного электрического поля

$$E_z = u_yB_x - u_xB_y + \omega_e\tau_0G\Big(j_xB_y - j_yB_x - \frac{Zs}{1+Zs}\frac{\partial p}{\partial z}\Big) - 2(1-s)^2\omega_i\tau_{ia}\omega_e\tau_0\Big\{\frac{Zs}{(1+Zs)N}B_yP_x - \frac{B_y}{(1-s)M^2}\frac{\partial}{\partial z}\times$$

$$\times\Big[\frac{(s\eta_1-\eta_1^i)B_y^2+(s\eta_2-\eta_2^i)B_x^2}{B^2}\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{B_xB_y}{B^2}(s\eta_1-\eta_1^i-s\eta_2+\eta_2^i)\frac{\partial u_y}{\partial z}\Big] + \frac{B_x}{(1-s)M^2}\frac{\partial}{\partial z}\Big[\frac{(s\eta_1-\eta_1^i)B_x^2+(s\eta_2-\eta_2^i)B_y^2}{B^2}\frac{\partial u_y}{\partial z} - \frac{B_xB_y}{B^2}(s\eta_1-\eta_1^i-s\eta_2+\eta_2^i)\frac{\partial u_x}{\partial z}\Big]\Big\} \qquad (1.7)$$

$$(\eta_k^i = \eta_i^{(k)}/\eta^{(0)},\; k=0,1,2,3)$$

Формулы для приведенных коэффициентов вязкости ионной компоненты частично ионизованного газа η_k^i имеют вид [1,6]

$$\eta_1^i(B) = \eta_2^i(2B) = \frac{\eta_0^i}{1+{}^{16}/_9\,\omega_i^2\tau_i^2B^2}, \quad \eta_3^i = \frac{{}^4/_3\,\omega_i\tau_iB\eta_0^i}{1+{}^{16}/_9\,\omega_i^2\tau_i^2B^2}$$

$$\eta_0^i|_{Z=1} \sim \frac{s\beta(1+s)}{s(1-s)+\beta(1+s^2)} \qquad (1.8)$$

Система (1.2), (1.6), (1.7) замыкается уравнениями Максвелла

$$\frac{\partial B_x}{\partial t} = G\frac{\partial E_y}{\partial z}, \quad \frac{\partial B_y}{\partial t} = -G\frac{\partial E_x}{\partial z}, \quad R_mGj_x = -\frac{\partial B_y}{\partial z}, \quad R_mGj_y = \frac{\partial B_x}{\partial z}, \quad \rho_e = \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

$$(R_m = \mu_0\sigma_0aU_0) \qquad (1.9)$$

В заключение данного параграфа заметим, что если в (1.6) имеем $E_x = E_y \equiv 0$, то при $s \neq 1$ возникновение тока j_y (а при $P_x = 0$ — и j_x) является следствием эффекта «скольжения» ионов относительно нейтралов, имеющего место при $\omega_i\tau_{ia} \geqslant 1$. При этом учитывается вклад в ток от вязкой силы, определяемой членами с производными от скоростей. Однако при помощи оценочных формул (1.4) и (1.8) нетрудно показать, что коэффициенты η_3 и $s\eta_3 - \eta_3^i$, стоящие множителями перед вязкими членами в (1.6), малы. Действительно, $\varepsilon a \sim 1$ вплоть до высоких степеней ионизации ($s \sim 0.9$), что объясняется преобладающим влиянием на вязкость нейтральной компоненты смеси [6]. Из (1.3) видим, что в этом промежутке изменения степени ионизации значение η_3 мало. С дальнейшим ростом s величина ε_a резко падает до нуля при $s = 1$, но при $s \sim 1$ вся часть закона Ома, связанная с эффектом «скольжения» ионов, мала. Оценка коэффициента $s\eta_3 - \eta_3^i$ при $Z = 1$, $\beta = 10^{-3}$ показывает, что его максимальное значение при $\omega_i\tau_i B = 0.75$ не превышает величины $\sim 5\cdot 10^{-4}$. Таким образом, в исследуемой задаче можно приближенно рассматривать формулы (1.6) как алгебраические, пренебрегая влиянием перепада скоростей на ток в законе Ома [1].

§ 2. Установившееся течение. В стационарном случае ($\partial / \partial t = 0$) можно проинтегрировать первые два уравнения (1.2)

$$u_x = \int_0^z \left[(C_1 - P_x Rz)\left(\frac{B_x^2}{\eta_2} + \frac{B_y^2}{\eta_1}\right) + C_2\left(\frac{1}{\eta_2} - \frac{1}{\eta_1}\right) B_x B_y \right] \frac{dz}{B^2} + C_3$$
$$u_y = \int_0^z \left[(C_1 - P_x Rz)\left(\frac{1}{\eta_2} - \frac{1}{\eta_1}\right) B_x B_y + C_2\left(\frac{B_x^2}{\eta_1} + \frac{B_y^2}{\eta_2}\right) \right] \frac{dz}{B^2} + C_4 \qquad (2.1)$$

где произвольные постоянные C_1, C_2, C_3 и C_4 следует определять при $P_x \neq 0$ из граничных условий

$$u_x(\pm 1) = u_y(\pm 1) = 0 \qquad (2.2)$$

а в течении Куэтта ($P_x = 0$) — из условий

$$u_x(1) = 1, \qquad u_x(-1) = u_y(\pm 1) = 0 \qquad (2.3)$$

Нетрудно видеть, что здесь электродинамическая задача отделяется от гидродинамической, и зависимости $B_x(z)$ и $B_y(z)$ можно считать заданными. Действительно, из первого уравнения Максвелла (1.9) и граничного условия непрерывности касательных составляющих вектора напряженности электрического поля имеем

$$E_x = E_{0x} = \text{const}, \qquad E_y = E_{0y} = \text{const} \qquad (2.4)$$

где E_{0x} и E_{0y} — безразмерные составляющие внешнего заданного электрического поля. Кроме того, в проекции закона Ома (1.6) входят только производные от скоростей, выражения для которых через B_x и B_y известны из (2.1). Таким образом, заменяя j_x и j_y в (1.6) через производные от B_x и B_y по второму уравнению Максвелла (1.9), а поперечный перепад давлений dp / dz — третьим уравнением системы (1.2) и исключая производные от скоростей, получим для $B_x(z)$ и $B_y(z)$ систему двух нелинейных уравнений первого порядка. Решение ее при соответствующих граничных условиях дает полное решение рассматриваемой задачи. Система принимает очень простой вид для случая полностью ионизованной среды ($s = 1$)

$$\frac{dB_x}{dz} = R_m G E_{0y} = k_1 = \text{const}$$
$$\frac{dB_y}{dz} = -R_m\left(G E_{0x} - \frac{\omega_e \tau_0}{2N} P_x\right) = k_2 = \text{const} \qquad (Z = 1) \qquad (2.5)$$

Отсюда

$$B_x = k_1 z + b_1, \qquad B_y = k_2 z + b_2 \qquad (2.6)$$

---

[1] Из сказанного не следует, что в законе Ома (1.1) всегда можно пренебречь вязким членом

$$\frac{2(1-s)\,\omega_i \tau_{ia} \omega_e \tau_0}{B^2} (s \operatorname{div} \pi - \operatorname{div} \pi_i) \times B$$

Например, коэффициент $s\eta_0 - \eta_0^i$ при $Z = 1$, $\beta = 10^{-3}$ оказывается величиной $\sim s$ вплоть до $s \sim 0.9$. Аналогично, вязкий член не мал, если в закон Ома входят разности $s\eta_1 - \eta_1^i$ или $s\eta_2 - \eta_2^i$.

Здесь составляющие магнитного поля линейны по сечению канала, причем коэффициенты k_1 и k_2 определяются постоянными токами, текущими в канале. Интегрируя второе уравнение Максвелла, получим

$$\begin{aligned} B_x(+1) - B_x(-1) &= R_m G I_y = 2k_1 \\ B_y(+1) - B_y(-1) &= -R_m G I_x = 2k_2 \end{aligned} \tag{2.7}$$

где I_x и I_y — проекции полного тока на оси координат. Из (2.7) следует, что для определения произвольных постоянных b_1 и b_2 достаточно задать магнитное поле на одной из стенок. Например, считая верхнюю стенку изолятором и задавая в ней внешнее однородное поле формулами

$$B_{0x} = \cos\varphi, \qquad B_{0y} = \sin\varphi \tag{2.8}$$

где φ — угол между направлением B_0 и осью x, найдем

$$b_1 = \cos\varphi - k_1, \qquad b_2 = \sin\varphi - k_2 \tag{2.9}$$

В (2.1) подставим η_1 и η_2 по формулам (1.3) при $s = 1$, а $B_x(z)$ и $B_y(z)$ по формулам (2.6); тогда, интегрируя и определяя произвольные постоянные C_1, C_2, C_3 и C_4 при помощи граничных условий (2.2) и (2.3), для составляющих скоростей полностью ионизованной среды получим

1) в течении Куэтта

$$\begin{aligned} u_x(z) &= {}^1/_2\,[A_1(1+z) + A_2(1-z^2) + A_3(1+z^3)] \\ u_y(z) &= {}^1/_2\,[1-z^2]\,(A_4 + A_5 z) \end{aligned} \tag{2.10}$$

2) в течении под влиянием постоянного перепада давления

$$\begin{aligned} u_x(z) &= {}^1/_2 P_x R\,(1-z^2)\,(D_1 + D_2 z + D_3 z^2) \\ u_y(z) &= {}^1/_2 P_x R\,(1-z^2)\,(D_4 + D_5 z + D_6 z^2) \end{aligned} \tag{2.11}$$

Зависимость постоянных A_k и D_k от параметра анизотропии вязкости $\omega_i\tau_i$ дается формулами

$$\begin{aligned}
A_1 &= \Delta^{-1}\{1 + \omega_i^2\tau_i^2[\alpha_3 + ({}^1/_3\beta_1 + \beta_3)] + \omega_i^4\tau_i^4[\alpha_3({}^1/_3\beta_1 + \beta_3) - \gamma_3({}^1/_3\gamma_1 + \gamma_3)]\} \\
A_2 &= -{}^1/_2\,\omega_i^2\tau_i^2\Delta^{-1}\{\alpha_2 + \omega_i^2\tau_i^2[\alpha_2({}^1/_3\beta_1 + \beta_3) - \gamma_2({}^1/_3\gamma_1 + \gamma_3)]\} \\
A_3 &= {}^1/_3\,\omega_i^2\tau_i^2\Delta^{-1}\{\alpha_1 + \omega_i^2\tau_i^2[\alpha_1({}^1/_3\beta_1 + \beta_3) - \gamma_1({}^1/_3\gamma_1 + \gamma_3)]\} \\
A_4 &= {}^1/_2\,\omega_i^2\tau_i^2\Delta^{-1}\{\gamma_2 + \omega_i^2\tau_i^2[\gamma_2({}^1/_3\beta_1 + \beta_3) - \beta_2({}^1/_3\gamma_1 + \gamma_3)]\} \\
A_5 &= {}^1/_3\,\omega_i^2\tau_i^2\Delta^{-1}\{\gamma_1 - \omega_i^2\tau_i^2(\beta_1\gamma_3 - \beta_3\gamma_1)\} \\
D_1 &= 1 + \omega_i^2\tau_i^2({}^1/_2\alpha_1 + \alpha_3) - {}^1/_3\omega_i^4\tau_i^4\Delta^{-1}\{\alpha_2^2 + \gamma_2^2 + \omega_i^2\tau_i^2[\alpha_2^2({}^1/_3\beta_1 + \beta_3) - \\
&\quad - 2\alpha_2\gamma_2({}^1/_3\gamma_1 + \gamma_3) + \gamma_2^2({}^1/_3\alpha_1 + \alpha_3)]\} \\
D_2 &= {}^2/_3\omega_i^2\tau_i^2\Delta^{-1}\{\alpha_2 + \omega_i^2\tau_i^2[\alpha_2\alpha_3 + \alpha_2({}^1/_3\beta_1 + \beta_3) - {}^1/_3\gamma_1\gamma_2] + \\
&\quad + \omega_i^4\tau_i^4[\alpha_2\alpha_3({}^1/_3\beta_1 + \beta_3) + {}^1/_3\gamma_2(\alpha_1\gamma_3 - \alpha_3\gamma_1) - \alpha_2\gamma_3({}^1/_3\gamma_1 + \gamma_3)]\} \\
D_4 &= -\omega_i^2\tau_i^2({}^1/_2\gamma_1 + \gamma_3) + {}^1/_3\omega_i^4\tau_i^4\Delta^{-1}\{\gamma_2(\alpha_2 + \beta_2) + \omega_i^2\tau_i^2[-(\alpha_2\beta_2 + \gamma_2^2)({}^1/_3\gamma_1 + \gamma_3) + \\
&\quad + \beta_2\gamma_2({}^1/_3\alpha_1 + \alpha_3) + \alpha_2\gamma_2({}^1/_3\beta_1 + \beta_3)]\} \\
D_5 &= -{}^2/_3\,\omega_i^2\tau_i^2\Delta^{-1}\{\gamma_2 + \omega_i^2\tau_i^2[\beta_3\gamma_2 + \gamma_2({}^1/_3\alpha_1 + \alpha_3) - {}^1/_3\alpha_2\gamma_1] + \\
&\quad + \omega_i^4\tau_i^4[\beta_3\gamma_2({}^1/_3\alpha_1 + \alpha_3) + {}^1/_3\alpha_2(\beta_1\gamma_3 - \beta_3\gamma_1) - \gamma_2\gamma_3({}^1/_3\gamma_1 + \gamma_3)]\} \\
D_3 &= {}^1/_2\,\omega_i^2\tau_i^2\alpha_1, \qquad D_6 = -{}^1/_2\,\omega_i^2\tau_i^2\gamma_1
\end{aligned} \tag{2.12}$$

$$\Delta = 1 + \omega_i^2\tau_i^2[({}^1/_3\alpha_1 + \alpha_3) + ({}^1/_3\beta_1 + \beta_3)] + \omega_i^4\tau_i^4[({}^1/_3\alpha_1 + \alpha_3)({}^1/_3\beta_1 + \beta_3) - ({}^1/_3\gamma_1 + \gamma_3)^2]$$

Наконец, постоянные α_k, β_k и γ_k имеют вид

$$\begin{aligned}
&\alpha_1 = {}^4/_9(k_1^2 + 4k_2^2), \quad \alpha_2 = {}^8/_9(k_1b_1 + 4k_2b_2), \quad \alpha_3 = {}^4/_9(b_1^2 + 4b_2^2) \\
&\beta_1 = {}^4/_9(4k_1^2 + k_2^2), \quad \beta_2 = {}^8/_9(4k_1b_1 + k_2b_2), \quad \beta_3 = {}^4/_9(4b_1^2 + b_2^2) \\
&\gamma_1 = {}^4/_3\,k_1k_2, \quad \gamma_2 = {}^4/_3(k_1b_2 + k_2b_1), \quad \gamma_3 = {}^4/_3\,b_1b_2
\end{aligned} \tag{2.13}$$

Полагая $\omega_i\tau_i \ll 1$ (отсутствие анизотропии вязкости), из (2.10) и (2.11) получим соответственно

$$u_x = {}^1/_2(1+z), \ u_y \equiv 0; \qquad u_x = {}^1/_2 P_x R(1-z^2), \ u_y \equiv 0$$

т. е. обычные гидродинамические режимы.

Следует также заметить, что если в рассматриваемом случае одна из составляющих вектора магнитной индукции равна нулю, то эффект возникновения поперечного движения среды не имеет места. Действительно, если одновременно k_1, b_1 или k_2, b_2 обращаются в нуль, то $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = 0$, откуда $A_4 = A_5 = D_4 = D_5 = D_6 = 0$ и $u_y \equiv 0$. Например, $k_1 = b_1 = 0$, когда $E_{0y} = 0$ и $\varphi = {}^1/_2\pi$. Однако и в этом случае учет анизотропии вязкости сильно искажает гидродинамические профили скорости.

§ 3. Неустановившееся течение. В точной постановке нестационарная задача сложна для исследования. Однако для случая полностью ионизованной среды она допускает простое точное решение. Действительно, исключая из закона Ома (1.6) при $s = 1$ при помощи уравнений Максвелла (1.9) составляющие плотности тока и электрического поля, получим следующие уравнения индукции:

$$\frac{\partial B_x}{\partial t} = \frac{1}{R_m}\frac{\partial^2 B_x}{\partial z^2}, \qquad \frac{\partial B_y}{\partial t} = \frac{1}{R_m}\frac{\partial^2 B_y}{\partial z^2} \tag{3.1}$$

Если, для простоты, считать, что полные токи через сечение канала равны нулю, то на основании (2.7) граничные и начальные условия можно поставить в виде

$$\begin{gathered} B_x(z,\ 0) = B_x(\pm 1,\ t) = B_{0x} = \cos\varphi, \\ B_y(z,\ 0) = B_y(\pm 1,\ t) = B_{0y} = \sin\varphi \end{gathered} \tag{3.2}$$

откуда сразу получаем, что магнитное поле тождественно равно однородному внешнему. Тогда из уравнений (1.2), полагая $s = 1$, $B = 1$, получим

$$\begin{gathered} R\frac{\partial u_x}{\partial t} - (\eta_1\sin^2\varphi + \eta_2\cos^2\varphi)\frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} + (\eta_1 - \eta_2)\sin\varphi\cos\varphi\frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} = P_x R \\ R\frac{\partial u_y}{\partial t} + (\eta_1 - \eta_2)\sin\varphi\cos\varphi\frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} - (\eta_1\cos^2\varphi + \eta_2\sin^2\varphi)\frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} = 0 \end{gathered} \tag{3.3}$$

где

$$\eta_1 = \frac{1}{1 + {}^{16}/_9\,\omega_i^2\tau_i^2}, \qquad \eta_2 = \frac{1}{1 + {}^4/_9\,\omega_i^2\tau_i^2} \tag{3.4}$$

При произвольном φ систему (3.3) можно решить при помощи преобразования Лапласа. Однако для значений $\varphi = 0$ (магнитное поле параллельно направлению внешней силы, вызывающей движение), $\varphi = {}^1/_2\pi$ (магнитное поле перпендикулярно силе) и $\varphi = {}^1/_4\pi$ эта система имеет простые решения. Действительно, при $\varphi = 0$ или $\varphi = {}^1/_2\pi$ система (3.3) принимает вид (1.5), но с эффективным числом Рейнольдса R^*

$$R^* = \begin{cases} R_1^* = R/\eta_1 & \text{при } \varphi = {}^1/_2\pi \\ R_2^* = R/\eta_2 & \text{при } \varphi = 0 \end{cases} \tag{3.5}$$

Таким образом, решение задачи Куэтта при граничных условиях (2.3) и однородном начальном условии имеет вид

$$u_x(z,\ t) = \frac{1+z}{2} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\lambda_n}\cos\lambda_n z\exp\frac{-\lambda_n^2 t}{R^*}, \qquad u_y \equiv 0$$

$$(\lambda_n = {}^1/_2(2n+1)\pi) \tag{3.6}$$

Из (3.6) видно, что однородное магнитное поле лишь затягивает установление стационарного режима в силу уменьшения вязкости среды при учете эффекта анизотропии вязкости, причем из (3.4) и (3.5) следует, что замагниченная среда ($\omega_i\tau_i \gg 1$) будет иметь очень малую вязкость.

Аналогично, для течения с постоянным перепадом давления P_x при однородных начальном и граничном условиях, получим

$$u_x(z, t) = \frac{P_x R^*}{2}(1 - z^2) - 2P_x R^* \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\lambda_n^3} \cos \lambda_n z \exp \frac{-\lambda_n^2 t}{R^*}$$

$$U_y \equiv 0 \tag{3.7}$$

Здесь уже уменьшение вязкости среды в сильном магнитном поле сказывается и на стационарном режиме, что влечет за собой общее увеличение скорости по сечению канала при не малых $\omega_i \tau_i$.

Наконец, при $\varphi = {}^1/_4\pi$ систему (3.3) также можно привести к виду (1.5) заменой

$$u_x = {}^1/_2\,(v_1 + v_2), \qquad u_y = {}^1/_2\,(v_1 - v_2) \tag{3.8}$$

откуда (3.3) перепишется в виде

$$\frac{\partial v_{1,2}}{\partial t} - \frac{1}{R^*_{2,1}} \frac{\partial^2 v_{1,2}}{\partial z^2} = P_x \tag{3.9}$$

В задаче Куэтта, таким образом, имеем

$$u_x(z, t) = \frac{1+z}{2} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2\lambda_n} \cos \lambda_n z \left(\exp \frac{-\lambda_n^2 t}{R_1^*} + \exp \frac{-\lambda_n^2 t}{R_2^*}\right)$$

$$u_y(z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2\lambda_n} \cos \lambda_n z \left(\exp \frac{-\lambda_n^2 t}{R_1^*} - \exp \frac{-\lambda_n^2 t}{R_2^*}\right) \tag{3.10}$$

в задаче с постоянным перепадом давления

$$u_x(z, t) = \frac{P_x(R_1^* + R_2^*)}{4}(1 - z^2) - P_x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\lambda_n^3} \cos \lambda_n z \times$$
$$\times \left(R_1^* \exp \frac{-\lambda_n^2 t}{R_1^*} + R_2^* \exp \frac{-\lambda_n^2 t}{R_2^*}\right)$$

$$u_y(z, t) = -\frac{P_x(R_1^* - R_2^*)}{4}(1 - z^2) + P_x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\lambda_n^3} \cos \lambda_n z \times$$
$$\times \left(R_1^* \exp \frac{-\lambda_n^2 t}{R_1^*} - R_2^* \exp \frac{-\lambda_n^2 t}{R_2^*}\right) \tag{3.11}$$

В заключение отметим, что если выполнены условия, при которых можно пренебречь индуцированным магнитным полем по сравнению с заданным однородным внешним, то приведенные решения системы (3.3) справедливы в нулевом приближении и при $s \neq 1$, только вместо (3.4) следует пользоваться (1.3). Найдем эти условия, для чего обратимся к размерной записи уравнений задачи (1.1). Полагая $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}^*(z, t)$ (где $B_0 = \text{const}$ — внешнее, а B^* — индуцированное поле), из второго уравнения Максвелла видим, что $B^* \sim \mu_0 a j$. Для определения характерной величины j оценим относительную роль вклада в ток проводимости электрической и неэлектрической сил в законе Ома

$$\frac{(1 + Zs) B \sigma_0 E}{Zs \omega_e \tau_0 \nabla p} \sim (1 + Zs) \frac{e E_0 a}{m_i U_0^2} = (1 + Zs) \frac{\omega_i G}{Z \Omega}$$

$$\left(\sigma_0 = \frac{Zs\rho e^2 \tau_0}{m_e m_i},\ \nabla p \sim \frac{\rho U_0^2}{a},\ E \sim E_0,\ \Omega = \frac{U_0}{a},\ G = \frac{E_0}{U_0 B_0}\right) \tag{3.12}$$

Так как рассматривается медленный процесс ($\rho = \text{const}$), то очевидно, что вклад градиента давления в ток проводимости будет равновелик с вкладом от электрической силы только в очень слабых электрических полях.

Например, при $\Omega = 1$ *сек*$^{-1}$ и $\omega_i / Z \approx 10^8$ *сек*$^{-1}$ ($B_0 = 10^4$ *гс*) должно быть $G \sim 10^{-8}$ (при $U_0 = 1$ *м / сек* будет $E_0 \sim 10^8$ *в/м*).

При не малых **E**, независимо от s, членом с ∇p в законе Ома можно пренебречь (в рассматриваемом случае поле $\mathbf{u} \times \mathbf{B}$ не входит в уравнения для определения тока). Кроме того, сравнивая в законе Ома член $\mathbf{j}$ с током скольжения $\mathbf{B} \times (\mathbf{j} \times \mathbf{B})$, видим, что последний в $2(1-s)^2\omega_i\tau_{ia}\omega_e\tau_0$ раз превышает первый и при $s \neq 1$ и $\omega_i\tau_{ia} \gg O(1)$ $(\omega_e\tau_0 / \omega_i\tau_{ia} \sim \sqrt{m_i / m_e} \gg 1)$ является определяющим (в компланарном магнитном поле холловский ток не имеет проекций на плоскость течения). Таким образом, при не очень слабом электрическом поле $(\omega_i G / Z\Omega \gg 1)$ $s \neq 1$ и $\omega_i\tau_{ia} \gg O(1)$; в силу сделанных оценок, находим

$$j \sim \frac{\sigma_0 E_0}{2(1-s)^2\omega_e\tau_0\omega_i\tau_{ia}}, \qquad B^* \sim \frac{R_m G}{2(1-s)^2\omega_e\tau_0\omega_i\tau_{ia}} B_0 \tag{3.13}$$

Отсюда $B^* \ll B_0$, если

$$\frac{R_m G}{2(1-s)^2\omega_e\tau_0\omega_i\tau_{ia}} \ll 1 \tag{3.14}$$

При $s = 1$ ток скольжения пропадает, и вместо (3.14) имеем $R_m G \ll 1$.

Если же внешнего электрического поля нет, а индуцированное E^* настолько мало, что ток определяется градиентом давления, то

$$2(1-s)^2\omega_i\tau_{ia} j \sim \frac{Zs}{1+Zs}\frac{\rho U_0^2}{aB_0}, \qquad B^* \sim \frac{Zs}{2(1+Zs)(1-s)^2\omega_i\tau_{ia}\Pi} B_0 \tag{3.15}$$

$$(\Pi = B_0^2/\mu_0\rho U_0^2)$$

Заметим, что член $\nabla p \times \mathbf{B}$ при рассматриваемой геометрии течения определяется током и исключается из закона Ома при помощи уравнения движения.

Из (3.15) имеем $B^* \ll B_0$ при $s \neq 1$, если

$$\frac{Zs}{2(1+Zs)(1-s)^2\omega_i\tau_{ia}\Pi} \ll 1 \tag{3.16}$$

Кроме того, из (3.12) следует, что нужно также потребовать, чтобы

$$E^* \ll \frac{m_i U_0^2}{(1+Zs)ea} \tag{3.17}$$

Так как здесь в нестационарном случае E_x^* и $E_y^* \sim U_0 B^*$, то из (3.17) и (3.15) получим дополнительное к (3.16) условие, обеспечивающее малость E^*

$$\frac{s\tau_{ia}^{-1}}{2(1-s)^2\Pi\Omega} \ll 1 \tag{3.18}$$

Поступила 31 I 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Сахновский Э. Г. Одножидкостные уравнения динамики частично ионизованного газа в сильном магнитном поле. ПММ, 1964, т. 28, вып. 3.
2. Сахновский Э. Г. Неустановившееся плоскопараллельное течение частично ионизованного газа в сильном магнитном поле. ПММ, 1964, т. 28, вып. 4.
3. Губанов А. И., Лунькин Ю. П. Куэттовское течение в магнитной плазмодинамике Ж. техн. физ., 1960, т. 30, № 9.
4. Баранов В. Б. Влияние магнитного поля на распределение температуры в течении Куэтта в анизотропной магнитной гидродинамике. ПМТФ, 1962, № 6.
5. Зимин Э. П. Течение электропроводной жидкости в магнитогидродинамическом канале. ПМТФ, 1963, № 6.
6. Алиевский М. Я. Жданов В. М., Полянский В. А. Тензор вязких напряжений и тепловой поток в двухтемпературном частично ионизованном газе. ПМТФ, 1964, № 3.