УДК 532.5

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОБ ИСТЕЧЕНИИ НЕОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ЗАКРУЧЕННОЙ ЗАТОПЛЕННОЙ СТРУИ

Р. И. Мулляджанов, Н. И. Яворский

Институт теплофизики им. С. С. Кутателадзе, 630090 Новосибирск
Новосибирский государственный университет, 630090 Новосибирск
E-mails: rustammul@gmail.com, nick@itp.nsc.ru

Рассматривается задача о неосесимметричной закрученной струе несжимаемой вязкой жидкости, вытекающей в пространство, затопленное той же жидкостью. В предположении, что вектор момента количества движения, соответствующий закрутке струи, не коллинеарен вектору импульса струи, исследуется ее дальнее поле. Показано, что главные члены асимптотического разложения полного решения для поля скорости определяются точными интегралами сохранения импульса, массы и момента количества движения. Найдено аналитическое решение задачи, описывающее неосесимметричную закрученную струю.

Ключевые слова: уравнения Навье — Стокса, затопленная закрученная струя.

Рассмотрим стационарное течение вязкой несжимаемой жидкости, вызванное наличием некоторого источника движения, имеющего ограниченные геометрические размеры. Как известно, вдали от источника такое течение является автомодельным и описывается точным решением уравнений Навье — Стокса, соответствующим затопленной струе, течение которой обусловлено наличием точечного источника импульса [1]. Это решение соответствует классу конических течений, в случае когда скорость обратно пропорциональна расстоянию от источника движения и однозначно определяется величиной интенсивности источника импульса (вектором силы, приложенной к определенной точке пространства). Поскольку в данном случае задан один вектор, решение задачи является симметричным. Точное решение этой задачи найдено в [1–3] (решение Слезкина — Ландау — Сквайра). В общем случае источник движения является не только импульсом, но и источником массы и момента количества движения, при этом вектор момента количества движения необязательно коллинеарен вектору импульса. Этот случай исследуется в настоящей работе.

Стационарные уравнения Навье — Стокса можно записать в виде

$$\frac{\partial \Pi_{ij}}{\partial x_j} = 0, \qquad \Pi_{ij} = \rho u_i u_j + p\delta_{ij} - \nu\Big(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\Big); \tag{1}$$

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0, \tag{2}$$

где Π_{ij} — компоненты тензора полного потока импульса; u_i — компоненты вектора скорости; p — давление; ρ, ν — постоянные плотность и вязкость жидкости; δ_{ij} — символ Кронекера.

Работа выполнена в рамках Федеральной целевой программы "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России" на 2009–2013 гг. (государственный контракт № 8609).

Уравнения (1), (2) удовлетворяют законам сохранения импульса и массы соответственно. Закон сохранения момента количества движения можно записать в виде

$$\frac{\partial K_{ij}}{\partial x_j} = 0, \qquad K_{ij} = \varepsilon_{ikm} x_k \Pi_{mj}, \tag{3}$$

где K_{ij} — компоненты тензора потока момента импульса; ε_{ikm} — компоненты тензора Леви-Чивиты.

Дифференциальным уравнениям (1)–(3) соответствуют интегральные законы сохранения

$$\oint\limits_S \Pi_{ij} n_j \, dS = P_i, \qquad \oint\limits_S u_j n_j \, dS = Q, \qquad \oint\limits_S K_{ij} n_j \, dS = L_i, \tag{4}$$

где $\boldsymbol{P}$ — интенсивность источника импульса (приложенная к жидкости сила); Q — расход жидкости; $\boldsymbol{L}$ — вектор момента импульса; S — произвольная поверхность, охватывающая начало координат, из которого истекает струя; $\boldsymbol{n}$ — единичный внешний вектор нормали к поверхности. В общем случае векторы $\boldsymbol{P}$ и $\boldsymbol{L}$ направлены произвольно. Предположим, что поверхность интегрирования представляет собой сферу, центр которой совпадает с началом координат. Из соотношений (4) и выражений для плотности потока импульса (1), массы (2) и момента количества движения (3) следует, что на бесконечности закон сохранения импульса выполняется, если скорость обратно пропорциональна радиусу сферы r, а законы сохранения массы и момента количества движения выполняются, если скорость пропорциональна r^{-2}. Решение, в котором скорость пропорциональна r^{-1}, является указанным выше решением Слезкина — Ландау — Сквайра. Это решение соответствует нулевому расходу и нулевому источнику момента количества движения. Для описания течения с ненулевым расходом и ненулевым моментом количества движения необходимо учитывать следующие слагаемые асимптотического разложения параметров дальнего поля затопленной струи, пропорциональные r^{-2}. Однако член, пропорциональный r^{-2}, определяется двумя независимыми интегралами сохранения, что может привести к противоречию. Решение, соответствующее осесимметричной закрученной затопленной струе с нулевым расходом, найдено в [4]. Осесимметричное решение для затопленной струи с ненулевым расходом, но нулевым моментом количества движения представлено в [5], однако это решение содержит логарифмическую особенность поля скорости на оси симметрии, что является следствием указанного выше противоречия. Это противоречие было устранено в работе [6], в которой установлено, что поле радиальной скорости должно также содержать слагаемое, пропорциональное $r^{-2}\ln r$. Появление этого слагаемого обусловлено наличием соответствующего нулевому расходу нетривиального решения задачи для члена r^{-2}, которое обнаружено в [5]. В [7] представлены аналогичные результаты. Решение для неосесимметричных затопленных струй, для которых вектор $\boldsymbol{L}$ коллинеарен вектору $\boldsymbol{P}$, получено в работе [8]. В настоящей работе представлены результаты решения задачи для общего случая неколлинеарных векторов $\boldsymbol{P}$ и $\boldsymbol{L}$.

Рассмотрим течение, вызванное наличием источника движения и характеризуемое источником импульса $\boldsymbol{P}$, направленным вдоль оси z, ненулевым источником массы с интенсивностью Q и источником момента количества движения $\boldsymbol{L}$, имеющим в декартовой системе координат три ненулевые компоненты L_x, L_y, L_z.

В соответствии с результатами работы [6] будем искать скорость и давление в сферической системе координат (r, θ, φ) (угол θ отсчитывается от оси z), представив их в виде выражений, в которых учтены неосесимметричные слагаемые, содержащие азимутальный угол φ:

$$u_r = -\frac{\nu}{r_0}\Big(y'(t)\,\frac{r_0}{r} + v'(t)\Big(\frac{r_0}{r}\Big)^2 \ln\frac{r}{r_0} + w'(t)\Big(\frac{r_0}{r}\Big)^2 + f(t)\Big(\frac{r_0}{r}\Big)^2 \cos(\varphi - \varphi_0) + \dots\Big); \tag{5}$$

$$u_\theta = -\frac{\nu}{r_0\sqrt{1-t^2}}\Big(y(t)\,\frac{r_0}{r} + v(t)\Big(\frac{r_0}{r}\Big)^2 + w(t)\Big(\frac{r_0}{r}\Big)^2 + F(t)\Big(\frac{r_0}{r}\Big)^2\cos(\varphi-\varphi_0) + \ldots\Big),$$

$$u_\varphi = \frac{\nu}{r_0\sqrt{1-t^2}}\Big(\gamma(t)\Big(\frac{r_0}{r}\Big)^2 + F'(t)\Big(\frac{r_0}{r}\Big)^2\sin(\varphi-\varphi_0) + \ldots\Big), \tag{6}$$

$$p = \frac{\rho\nu^2}{r_0^2}\Big(g(t)\Big(\frac{r_0}{r}\Big)^2 + h(t)\Big(\frac{r_0}{r}\Big)^3\ln\frac{r}{r_0} + q(t)\Big(\frac{r_0}{r}\Big)^3 + s(t)\Big(\frac{r_0}{r}\Big)^3\cos(\varphi-\varphi_0) + \ldots\Big), \qquad t=\cos\theta.$$

Здесь функции $y(t)$ и $g(t)$ соответствуют решению Слезкина — Ландау — Сквайра:

$$y(t) = 2\,\frac{1-t^2}{A-t}, \qquad g(t) = 4\,\frac{At-1}{(A-t)^2}. \tag{7}$$

Выражение для $v(t)$ получено в [5], для $\gamma(t)$ — в [4]:

$$v(t) = b_0 v_0(t), \quad v_0(t) = (1-t^2)\,\frac{1-At}{A(A-t)^2}, \quad \gamma(t) = d_0\,\frac{1-t^2}{(A-t)^2}. \tag{8}$$

Параметр $A > 1$ однозначно связан с интенсивностью источника импульса P_z [1], константа b_0 — с величиной расхода Q, а d_0 — с осевой компонентой интенсивности источника момента количества движения L_z [6]:

$$P_z = 16\pi\rho\nu^2 A\Big(1 + \frac{4}{3(A^2-1)} - \frac{A}{2}\ln\frac{A+1}{A-1}\Big); \tag{9}$$

$$Q = \frac{2\pi r_0\nu}{3(A^2-1)}\,b_0\Big(7 - 3A^2 - a\Big(A^2+\frac{1}{3}\Big) + 4A(A^2-1)\ln\frac{A+1}{A-1}\Big),$$

$$a = -\frac{(5A^2-3)[4-6A^2+3A(A^2-1)\ln((A+1)/(A-1))]}{A[10A-6A^3+3(A^2-1)^2\ln((A+1)/(A-1))]}; \tag{10}$$

$$L_z = 4\pi r_0\rho\nu^2 d_0\Big(\frac{4}{3(A^2-1)} - 2 + A\ln\frac{A+1}{A-1}\Big). \tag{11}$$

Величина r_0 является характерным размером источника движения (например, радиусом отверстия, из которого вытекает струя). Будем полагать $r_0 \ll r$, что соответствует области дальнего поля струи, в котором справедливы разложения (5), (6).

Функция $w(t)$ определяется уравнением

$$((1-t^2)(A-t)^2 w''(t))' + 6(A^2-1)w'(t) = (A-t)^2 f_0(t), \tag{12}$$

где $f_0(t)$ — функция, которая появляется вследствие наличия нелинейных членов уравнения Навье — Стокса, состоящих из членов асимптотического решения для поля скорости, пропорциональных r^{-1} и $r^{-2}\ln r$:

$$f_0(t) = b_0\Big(a - 2\,\frac{3A^2-1}{A(A-t)} + 3\,\frac{A^2-1}{(A-t)^2} - 8A\,\frac{A^2-1}{(A-t)^3} + 6\,\frac{(A^2-1)^2}{(A-t)^4}\Big). \tag{13}$$

Решение для $w(t)$ может быть найдено в виде квадратуры [6], обозначенной ниже $w_0(t)$, к которой необходимо прибавить нетривиальное решение полученного Ю. Б. Румером однородного уравнения, содержащего произвольную постоянную c_0:

$$w(t) = w_0(t) + c_0 v_0(t). \tag{14}$$

Приведенное выше решение (5)–(13) обеспечивает наличие всех трех ненулевых компонент вектора момента количества движения.

В случае осесимметричного течения жидкости вектор момента количества движения содержит только одну компоненту L_z, которая определяет константу d_0. Решение $v_0(t)$ соответствует течению с ненулевым расходом, поэтому этот член разложения удовлетворяет закону сохранения массы. В осесимметричном случае это решение не оказывает влияния и на закон сохранения момента количества движения. Таким образом, постоянная c_0 в (14) не определяется перечисленными выше интегралами сохранения. Согласно работе [6, 8] в задаче должны присутствовать и другие члены разложения более высокого порядка по r^{-1}, обратно пропорциональные радиусу сферы в нецелых степенях, являющихся функциями числа Рейнольдса, определяемого по величине потока импульса струи: $\mathrm{Re} = \sqrt{P_z/(\rho\nu^2)}$. В этом случае, если соответствующий член разложения представляет собой определенный интеграл сохранения, показатель степени не зависит от числа Рейнольдса. Такими членами разложения являются члены, пропорциональные r^{-1} и r^{-2}. Константа c_0 зависит от скрытого интеграла сохранения, возникающего вследствие дополнительной симметрии задачи, поскольку в осесимметричном случае $L_x = L_y = 0$.

Рассмотрим более подробно неосесимметричное течение затопленной струи. Следует отметить, что главный член асимптотического разложения поля скорости в бесконечно удаленной точке пропорционален r^{-1}, определяется законом сохранения импульса, задается значением и направлением одного вектора $\boldsymbol{P}$ и поэтому является осесимметричным. Отличие рассматриваемого решения от решения в случае осевой симметрии может проявиться только в следующих членах разложения (см. (6), (7)). В этих разложениях добавлен лишь член с косинусом азимутального угла. Этого достаточно для описания течения, поскольку оно полностью определяется двумя векторами $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{L}$ и скаляром Q. Данное предположение подтверждается тем, что в случае более высоких гармоник по φ для членов, пропорциональных r^{-2}, существует только тривиальное решение. Более высокие гармоники возникают в следующих порядках разложения общего решения по r^{-1}. Постоянный угол φ_0 характеризует ориентацию векторов $\boldsymbol{P}$ и $\boldsymbol{L}$.

Получим уравнения, определяющие в асимптотическом разложении неосесимметричные слагаемые, пропорциональные r^{-2}. Эти слагаемые описываются безразмерными функциями $f(t)$, $F(t)$, $s(t)$. Подставим выражения для поля скорости и давления (6), (7) в стационарные уравнения Навье — Стокса (1). В главном порядке по обратным степеням радиуса сферы получаем следующую систему линейных обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$(1-t^2)f'' - 2tf' - yf' - 3y'f - \frac{f+2yF}{1-t^2} - y''F + 3s = 0,$$

$$(1-t^2)(F'' + s' - 2f') - 2tF' + 2F - yF' - 2y'F - \frac{F+2tyF}{1-t^2} = 0,$$

$$(1-t^2)^2F''' - (1-t^2)(4tF'' + y'F' + yF'') + 2tyF' - F' - \frac{2tF}{1-t^2} - 2f + s = 0.$$

Эта система уравнений имеет аналитическое решение

$$\begin{gathered} f(t) = \lambda_0\sqrt{1-t^2}\,\Big(\frac{1}{A-t} + \frac{A^2-1}{(A-t)^2} - \frac{2(A^2-1)}{(A-t)^3}\Big), \qquad F(t) = \lambda_0\,\frac{\sqrt{1-t^2}}{A(A-t)}\,, \\ s(t) = 2\lambda_0\sqrt{1-t^2}\Big(\frac{1}{A-t} + \frac{A}{(A-t)^2} - \frac{2(A^2-1)}{(A-t)^3}\Big), \end{gathered} \tag{15}$$

где λ_0 — константа, характеризующая неосесимметричность струи.

Найдем все компоненты вектора потока момента количества движения $\boldsymbol{L}$ в декартовой системе координат. Значение компоненты L_z определяется выражением (10), значения L_x и L_y — выражениями

$$L_x = -r^3 \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_{-1}^{1} \big(\Pi_{r\theta} \sin\varphi + t\Pi_{r\varphi} \cos\varphi\big)\, dt\, d\varphi,$$

$$L_y = r^3 \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_{-1}^{1} \big(\Pi_{r\theta} \cos\varphi - t\Pi_{r\varphi} \sin\varphi\big)\, dt\, d\varphi.$$

Подставляя в эти соотношения значения компонент тензора потока импульса в сферической системе координат и используя выражения (4), (6), (7), (15), получим

$$L_x = -\Lambda \sin\varphi_0, \qquad L_y = \Lambda \cos\varphi_0, \tag{16}$$

где

$$\Lambda = 8\pi\rho\nu^2\lambda_0 \Big(1 + \frac{4}{3(A^2-1)} - \frac{A}{2} \ln \frac{A+1}{A-1}\Big).$$

Введем единичный вектор $\boldsymbol{\tau} = (-\sin\varphi_0, \cos\varphi_0, 0)$, лежащий в плоскости, ортогональной вектору $\boldsymbol{P}$. В этом случае выражение для величины полного потока момента количества движения имеет вид

$$\boldsymbol{L} = \Lambda\boldsymbol{\tau} + L_z \boldsymbol{e}_z.$$

В силу (10), (16) параметры φ_0, λ_0, d_0 полностью определяют величину и направление вектора $\boldsymbol{L}$. Заметим, что постоянная c_0, зависящая от скрытого интеграла сохранения, в выражении для вектора $\boldsymbol{L}$ отсутствует. Следовательно, скрытый закон сохранения не связан ни с законом сохранения момента количества движения, ни с законом сохранения массы, что противоречит утверждению, приведенному в [6].

Таким образом, получено решение задачи об истечении неавтомодельной затопленной струи в общей постановке, когда векторы полного потока импульса и полного потока момента количества движения заданы произвольно. Решение представляет собой корректную асимптотику точного решения уравнений Навье — Стокса, справедливую в окрестности бесконечно удаленной точки. Решение получено в явном аналитическом виде, параметры решения определяются значениями точных интегралов сохранения импульса, массы и момента количества движения. Показано, что главный член асимптотического разложения описывает течение осесимметричной затопленной струи, отличия от случая осевой симметрии проявляются в следующих членах асимптотического разложения, пропорциональных r^{-2}, которые определяются величиной и направлением вектора полного потока момента количества движения. Учитывая результаты работы [8], можно предположить, что решение задачи будет содержать и другие члены разложения более высокого порядка, пропорциональные $r^{-\alpha(\mathrm{Re})}$, при этом показатели степени при определенных значениях чисел Рейнольдса могут являться комплекснозначными.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Ландау Л. Д.** Об одном новом точном решении уравнений Навье — Стокса // Докл. АН СССР. 1944. Т. 43, № 7. С. 299–301.
2. **Слезкин Н. А.** Об одном случае интегрируемости полных дифференциальных уравнений движения вязкой жидкости // Учен. зап. Моск. гос. ун-та. 1934. Вып. 2. С. 89–90.

3. **Squire H. B.** The round laminar jet // Quart. J. Mech. Appl. Math. 1951. V. 4. P. 321–329.
4. **Цуккер М. С.** Закрученная струя, распространяющаяся в пространстве, затопленном той же жидкостью // Прикл. математика и механика. 1955. Т. 19, вып. 4. С. 500–503.
5. **Румер Ю. Б.** Задача о затопленной струе // Прикл. математика и механика. 1952. Т. 16, вып. 2. С. 255–256.
6. **Гольдштик М. А., Яворский Н. И.** О затопленных струях // Прикл. математика и механика. 1986. Т. 50, вып. 4. С. 573–583.
7. **Kurdyumov V. N.** Far-field description of the flow produced by a source of both momentum and mass // J. Fluid Mech. 2005. V. 532. P. 191–198.
8. **Яворский Н. И.** Неосесимметричные затопленные струи // Прикл. математика и механика. 1988. Т. 52, вып. 5. С. 760–772.

Поступила в редакцию 24/IX 2012 г.