УДК 539.377

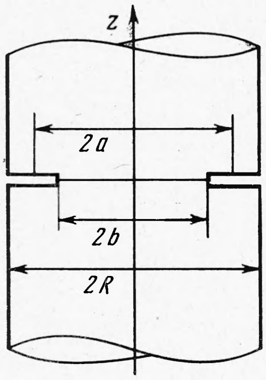
ОСЕСИММЕТРИЧНАЯ ЗАДАЧА ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ ЦИЛИНДРА С РАЗРЕЗОМ

Б. А. Кудрявцев

(Москва)

Рассматривается осесимметричное термоупругое состояние изотропного кругового цилиндра бесконечной длины с внешней кольцевой проточкой. Предпологается, что на части поверхности разреза действуют равномерно распределенные источники тепла, а боковая поверхность цилиндра теплоизолирована. Получена формула для определения нормальных напряжений в плоскости разреза.

1. Рассмотрим цилиндрическую систему координат r, φ, z, ось z которой совпадает с продольной осью бесконечного сплошного цилиндра с внешним кольцевым разрезом ($b \leqslant r \leqslant R$) в плоскости $z = 0$ (фиг. 1). Пусть на части поверхности разреза ($a \leqslant r \leqslant R$, $a > b$) действуют равномерно распределенные источники тепла с интенсивностью W_0. Предполагается, что боковая поверхность цилиндра теплоизолирована, свободна от касательных напряжений и закреплена так, что точки ее не имеют радиальных перемещений.



Фиг. 1

Учитывая условия симметрии относительно плоскости $z = 0$, рассмотрим действие источников тепла, распределенных равномерно по кольцевой области $a \leqslant r \leqslant R$, $z = 0$. В данном случае функция температуры, удовлетворяющая условию

$$\left.\frac{\partial T}{\partial r}\right|_{r=R} = 0 \qquad (1.1)$$

является решением уравнения

$$\Delta T = -\frac{W_0}{\lambda}\delta(z)\,\eta(r-a), \qquad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \qquad (1.2)$$

где λ — коэффициент теплопроводности, $\delta(z)$ — δ — функция

$$\eta(r-\alpha) = 1 \quad (r > a), \qquad \eta(r-a) = 0 \quad (r < a)$$

Используя интегральное представление

$$\delta(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \cos\lambda z d\lambda$$

и разложение по функциям Бесселя

$$\eta(r-a) = -2\frac{a}{R}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_1(\lambda_n a/R)\,J_0(\lambda_n r/R)}{\lambda_n J_0^2(\lambda_n)} \qquad (1.3)$$

найдем решение уравнения (1.2) в виде

$$T(r, z) = \frac{W}{\lambda} \alpha R \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_1(\lambda_n \alpha) J_0(\lambda_n \rho)}{\lambda_n^2 J_0^2(\lambda_n)} e^{-\lambda_n \xi} \tag{1.4}$$

Здесь $\alpha = a / R$, $\rho = r / R$, $\xi = z / R$, λ_n ($n = 1, 2, 3, \ldots$) — положительные корни уравнения $J_0'(\lambda_n) = 0$, расположенные в порядке возрастания величины.

Напряжения $\sigma_{ij}^{(1)}$ и перемещения $u_i^{(1)}$ в полубесконечном цилиндре $0 \leqslant z < \infty$, $0 \leqslant r \leqslant R$, обусловленные данным температурным полем (1.4), могут быть найдены с помощью термоупругого потенциала Φ, удовлетворяющего уравнению [1]

$$\Delta\Phi = mT, \qquad m = \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha_T \tag{1.5}$$

где α_T — коэффициент линейного расширения материала. С учетом (1.4) запишем решение уравнения (1.5) в виде

$$\Phi(r, z) = \frac{mW_0R^3}{2\lambda} \alpha \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_1(\lambda_n \alpha) J_0(\lambda_n \rho)}{\lambda_n^4 J_0^2(\lambda_n)} l^{-\lambda_n \xi} (1 + \lambda_n \xi) \tag{1.6}$$

Компоненты напряжений и смещения, соответствующие термоупругому потенциалу (1.6), будут удовлетворять следующим условиям на боковой поверхности $r = R$ и торце $z = 0$ цилиндра

$$\sigma_{rz}^{(1)}(R, z) = 0, \qquad u_r^{(1)}(R, z) = 0 \quad \text{при } 0 \leqslant z < \infty \tag{1.7}$$

$$\sigma_{rz}^{(1)}(r, 0) = 0, \qquad \sigma_{zz}^{(1)}(r, 0) = -GmT(r, 0) \quad \text{при } 0 \leqslant r \leqslant R \tag{1.8}$$

Для того чтобы берега кольцевого разреза $b \leqslant r \leqslant R$, $z = 0$ были свободны от нагрузки, необходимо на напряженно-деформированное состояние $\sigma_{ij}^{(1)}$, $u_i^{(1)}$ наложить состояние с компонентами $\sigma_{ij}^{(2)}$, $u_i^{(2)}$, которые удовлетворяют условиям

$$\sigma_{zz}^{(2)}(r, 0) = -\sigma_{zz}^{(1)}(r, 0), \quad b \leqslant r < R, \quad u_z^{(2)}(r, 0) = 0, \quad 0 \leqslant r < b \tag{1.9}$$

$$\sigma_{rz}^{(2)}(r, 0) = 0, \qquad 0 \leqslant r \leqslant R \tag{1.10}$$

$$\sigma_{rz}^{(2)}(R, z) = 0, \qquad u_r^{(2)}(R, z) = 0, \qquad 0 \leqslant z < \infty \tag{1.11}$$

Так как касательные напряжения $\sigma_{rz}^{(2)}$ равны нулю в плоскости $z = 0$, то перемещения и напряжения могут быть выражены через одну гармоническую осесимметричную функцию $\varphi(r, z)$ [2]

$$u_r^{(2)} = z \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial z} + (1 - 2\nu) \frac{\partial \varphi}{\partial r}, \qquad \sigma_{rz}^{(2)} = 2Gz \frac{\partial^3 \varphi}{\partial r \partial z^2} \tag{1.12}$$

Здесь G — модуль сдвига материала цилиндра.

Выбрав гармоническую функцию $\varphi(r, z)$ в виде

$$\varphi(r, z) = \frac{R^2}{2(1-\nu)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} B_n J_0(\lambda_0 \rho) e^{-\lambda_n \xi} \tag{1.13}$$

найдем, что условия (1.10) и (1.11) тождественно выполняются. Удовлетворяя условиям (1.9), получаем парные рядовые уравнения

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} B_n J_n(\lambda_n \rho) = 0, \quad 0 \leqslant \rho < \beta \tag{1.14}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n J_0(\lambda_n \rho) = (1-\nu)\, m \frac{W_0 a}{\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_1(\lambda_n \alpha) J_0(\lambda_n \rho)}{\lambda_n^2 J_0^2(\lambda_n)}, \quad \beta < \rho < 1 \tag{1.15}$$

где

$$\beta = b/R$$

2. Решение парных уравнений вида (1.14), (1.15) получено в работах [4, 5]. К аналогичным уравнениям сводится также задача о вдавливании штампа в торец полубесконечного цилиндра [3].

Используя соотношение

$$B_n = (1-\nu) \frac{mW_0 a}{\lambda} \frac{J_1(\lambda_n \alpha)}{\lambda_n^2 J_0^2(\lambda_n)} + B_n^* \tag{2.1}$$

представим уравнения (1.14), (1.15) в виде

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} B_n^* J_n(\lambda_n \rho) = -(1-\nu) \frac{mW_0 a}{\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_1(\lambda_n \alpha)}{\lambda_n^3 J_0^2(\lambda_n)} J_0(\lambda_n \rho) \tag{2.2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n^* J_0(\lambda_n \rho) = 0, \quad \beta < \rho \leqslant 1 \tag{2.3}$$

Следуя работе [5], полагаем

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n^* J_0(\lambda_n \rho) = -\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \int_{\rho}^{\beta} \frac{tg(t)\, dt}{\sqrt{t^2 - \rho^2}}, \quad 0 \leqslant \rho < \beta \tag{2.4}$$

По формуле, определяющей коэффициенты разложения Дини, находим

$$B_n^* = \frac{2}{J_0^2(\lambda_n)} \int_0^{\beta} g(t) \cos \lambda_n t\, dt \tag{2.5}$$

Подставляя выражение для B_n^* в уравнение (2.2) и учитывая [5]

$$2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\lambda_n \rho) \cos \lambda_n t}{\lambda_n J_0^2(\lambda_n)} = -L(t, \rho) + \begin{cases} 0, & \rho < t \\ (\rho^2 - t^2)^{-1/2}, & \rho > t \end{cases} \tag{2.6}$$

$$L(t, \rho) = 2\sqrt{1-t^2} + \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{K_1(\xi)}{\xi I_1(\xi)} \operatorname{ch} t\xi\, [2I_1(\xi) - \xi I_0(\rho\xi)]\, d\xi$$

получаем после соответствующих преобразований [5] интегральное уравнение Фредгольма второго рода для определения функции $g(t)$

$$g(t) = \int_0^{\beta} g(u) K(u, t)\, du - (1-\nu)\, m \frac{W_0 a}{\lambda} \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_1(\lambda_n \alpha) \cos \lambda_n t}{\lambda_n^3 J_0^2(\lambda_n)} \tag{2.7}$$

$$K(u, t) = \frac{2}{\pi} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{\rho L(u, \rho)}{\sqrt{t^2 - \rho^2}}\, d\rho =$$

$$= \frac{4}{\pi} + \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\infty} \frac{K_1(\xi)}{\xi I_1(\xi)} [2I_1(\xi) - \xi \operatorname{ch}(t\xi) \operatorname{ch}(u\xi)]\, d\xi$$

Здесь $I_1(\xi)$, $K_1(\xi)$ — модифицированные функции Бесселя соответственно первого и второго рода.

Для вычисления суммы, стоящей в правой части уравнения (2.7), умножим равенство (1.3) на $\rho\,(t^2-\rho^2)^{-1/2}$ и проинтегрируем по ρ в пределах от 0 до t.

Получим

$$2\alpha\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_1(\lambda_n\alpha)\sin\lambda_n t}{\lambda_n^2 J_0^2(\lambda_n)}=\begin{cases}\sqrt{t^2-\alpha^2} & (t>\alpha)\\ t & (t<\alpha)\end{cases}$$

Интегрируя по t последнее выражение, найдем

$$2\alpha\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_1(\lambda_n\alpha)\cos\lambda_n t}{\lambda_n^3 J_0^2(\lambda_n)}=A(\alpha)-\frac{t^2}{2} \tag{2.8}$$

$$A(\alpha)=2\alpha\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_1(\lambda_n\alpha)}{\lambda_n^3 J_0^2(\lambda_n)}$$

Следовательно, уравнение (2.7) принимает вид

$$g(t)=\int_0^{\beta}g(u)K(u,t)\,du-(1-\nu)\frac{W_0R}{\pi\lambda}\left[A(\alpha)-\frac{t^2}{2}\right] \tag{2.9}$$

Ядро $K(u,t)$ уравнения (2.9) может быть представлено в форме

$$K(u,t)=\sum_{m=0}^{\infty}b_{2m}(u)\,t^{2m}$$

$$b_0(u)=\frac{4}{\pi}+\frac{4}{\pi^2}\left[T^*-\sum_{s=1}^{\infty}\frac{T_{2s}u^{2s}}{(2s)!}\right] \tag{2.10}$$

$$b_{2m}(u)=-\frac{4}{\pi^2}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{T_{2m+2s-2}u^{2s-2}}{(2m)!\,(2s-2)!}\qquad(m=1,2,\ldots)$$

$$T^*=\sum_{s=1}^{\infty}\frac{T_{2s}}{2^{2s}s!\,(s+1)!},\qquad T_n=\int_0^{\infty}\frac{K_1(\xi)}{I_1(\xi)}\,\xi^n d\xi$$

Численные значения коэффициентов T_n приведены в [4].

С учетом разложения (2.10) решение интегрального уравнения (2.9) можно искать в виде

$$g(t)=\sum_{m=0}^{\infty}Q_{2m}t^{2m} \tag{2.11}$$

где коэффициенты Q_{2m} определяются из бесконечной системы

$$Q_{2m}=\sum_{k=0}^{\infty}Q_{2k}c_{2k,\,2m}-(1-\nu)\,m\,\frac{W_0R}{\pi\lambda}\left[A(\alpha)\,\delta_m^{\circ}-\frac{1}{2}\,\delta_m^{1}\right]\qquad(m=0,1,2,\ldots)$$

$$c_{2k,\,0}=\frac{4}{\pi}\left(1+\frac{T^*}{\pi}\right)\frac{\beta^{2k+1}}{2k+1}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{T_{2s}\beta^{2s+2k+1}}{(2s)!\,(2s+2k+1)}\qquad(k=0,1,2,\ldots)$$

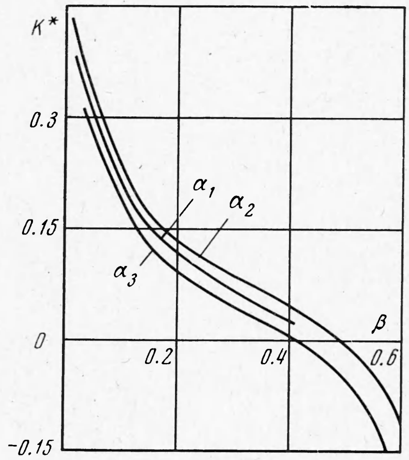
$$c_{2k,\,2m} = -\frac{4}{\pi^2}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{T_{2m+2s-2}\,\beta^{2k+2s-1}}{(2m)!\,(2s-2)\,(2k+2s-1)} \qquad (k=0,1,2,\ldots;\ m=1,2,\ldots) \tag{2.12}$$

$$\delta_m{}^j = \begin{cases} 1, & m = j \\ 0, & m \neq j \end{cases}$$

Используя формулы (1.12), (2.1) и (2.4), находим нормальные напряжения в плоскости $z = 0$ (2.13)

$$\sigma_{zz}^{(2)}(r, 0) = GmT(\rho, 0) + $$

$$+\frac{G}{1-\nu}\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\int\limits_{\rho}^{\beta}\frac{tg(t)\,dt}{\sqrt{t^2-\rho^2}}, \qquad 0 \leqslant \rho < \beta$$



Фиг. 2

С помощью выражений (1.8) (2.11), (2.13) определяем коэффициент интенсивности напряжений для кольцевого разреза

$$K = \sqrt{2\pi}\lim_{\rho\to\beta}\left[\sqrt{R(\beta-\rho)}\ \sigma_{zz}\ (\rho,\ 0)\right] =$$

$$= -\frac{G}{1-\nu}\left(\frac{\pi R}{2\beta}\right)^{1/2}\sum_{m=0}^{\infty}Q_{2m}\beta^{2m} \tag{2.14}$$

$$K^* = \frac{K\lambda\sqrt{\pi}}{GmW_0R^{3/2}}$$

где

$$\sigma_{zz}(\rho, 0) = \sigma_{zz}^{(1)}(\rho, 0) + \sigma_{zz}^{(2)}(\rho, 0)$$

На фиг. 2 представлена зависимость величины K^* от β при различных значениях α ($\alpha_1 = 0.4$, $\alpha_2 = 0.6$, $\alpha_3 = 0.8$). Данные результаты показывают, что при определенных соотношениях величин α и β возможно возникновение сжимающих ($K < 0$) нормальных напряжений на продолжении кольцевого разреза.

Поступила 12 X 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Новацкий В. Вопросы термоупругости. М., Изд-во АН СССР, 1962.
2. Снеддон И. Н., Берри Д. С. Классическая теория упругости. М., Физматгиз, 1961.
3. Бородачев Н. М. О вдавливании штампа в торец полубесконечного упругого цилиндра. Прикл. механ., 1967, т. 3, вып. 9.
4. Sneddon I. N., Tait R. J. The effect of a penny-shaped crack on the distribution of stress in a long circular cylinder. Internat. J. Engng Sci., 1963, vol. 1, No. 3.
5. Srivastav R. P. Dual series relations. II. Dual relations involving Dini series, Proc. Roy. Soc. Edinburgh, Ser. A., 1962—1963, vol. 66, pt 3.