УДК 519.63

НЕЛИНЕЙНЫЕ РЕЖИМЫ КОЛЕБАНИЙ УПРУГОЙ ПАНЕЛИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ НАГРУЗКИ

А. Л. Тукмаков

Институт механики и машиностроения Казанского научного центра РАН, 420111 Казань

Рассмотрено нелинейное поведение непологой тонкой упругой цилиндрической панели с условиями шарнирного опирания продольных кромок, возникающее при динамической потере устойчивости под действием равномерно распределенной периодической во времени нагрузки. Определены области регулярной и хаотической динамики для панелей с изгибом по симметричной и несимметричной форме. Показано, что в зависимости от частоты внешней нагрузки потеря устойчивости по несимметричной форме, связанная с достижением амплитудой нагрузки критического значения, может привести к двум различным динамическим режимам.

В зависимости от значений управляющих параметров движение нелинейной детерминированной системы может носить регулярный или хаотический характер [1, 2]. Под регулярным понимается периодический или квазипериодический режим. Если же система обладает высокой чувствительностью к начальным условиям, то при определенных значениях управляющих параметров может осуществиться переход к хаотическому режиму движения, при котором происходит интенсивная перекачка энергии в низкочастотную область. Движение упругой панели, при котором прогибы превышают толщину панели или сравнимы с ней, описывается геометрически нелинейной системой уравнений, поэтому в такой системе также могут реализовываться хаотические режимы [3–5].

Для описания движения упругой панели применяется система динамических геометрически нелинейных уравнений теории оболочек в перемещениях, подчиняющихся гипотезе Кирхгофа — Лява [6, 7]:

$$\begin{gathered}\frac{1}{T^2}\,\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}-(1+\varepsilon)\,\frac{\partial^2 V}{\partial\alpha^2}+\frac{\partial W}{\partial\alpha}-\varepsilon\,\frac{\partial^3 W}{\partial\alpha^3}+F_1(V,W)=Z_\tau,\\ \frac{1}{T^2}\,\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}+\gamma\,\frac{\partial W}{\partial t}+\varepsilon\,\frac{\partial^4 W}{\partial\alpha^4}+\varepsilon\,\frac{\partial^3 V}{\partial\alpha^3}-\frac{\partial V}{\partial\alpha}+F_2(V,W)=Z_n.\end{gathered}\tag{1}$$

Здесь Z_τ, Z_n — касательная и нормальная составляющие динамической нагрузки; F_1, F_2 — слагаемые, включающие нелинейные члены:

$$F_1=-\frac{\partial W}{\partial\alpha}+\Big(\frac{\partial V}{\partial\alpha}-W\Big)\Big(\frac{\partial^2 V}{\partial\alpha^2}-\frac{\partial W}{\partial\alpha}\Big)+\Big(\frac{\partial W}{\partial\alpha}+V\Big)\Big(\frac{\partial^2 W}{\partial\alpha^2}+\frac{\partial W}{\partial\alpha}\Big)+\varepsilon\Big(\Big(\frac{\partial W}{\partial\alpha}+V\Big)\Big(\frac{\partial^2 W}{\partial\alpha^2}-\frac{\partial^3 V}{\partial\alpha^3}\Big)+$$
$$+\frac{\partial^3 W}{\partial\alpha^3}+\Big(\frac{\partial V}{\partial\alpha}-W\Big)\Big(\frac{\partial^3 W}{\partial\alpha^3}+\frac{\partial^2 V}{\partial\alpha^2}\Big)\Big)+\varepsilon\Big(\Big(\frac{\partial^2 W}{\partial\alpha^2}+V\Big)\Big(\frac{\partial^2 W}{\partial\alpha^2}-\frac{\partial^3 V}{\partial\alpha^3}\Big)+$$
$$+\Big(1+\frac{\partial V}{\partial\alpha}-W\Big)\Big(\frac{\partial^3 W}{\partial\alpha^3}+\frac{\partial^2 V}{\partial\alpha^2}\Big)\Big)\Big(\Big(\frac{\partial W}{\partial\alpha}+V\Big)\Big(\frac{\partial W}{\partial\alpha}-\frac{\partial^2 V}{\partial\alpha^2}\Big)+\Big(1+\frac{\partial V}{\partial\alpha}-W\Big)\Big(\frac{\partial^2 W}{\partial\alpha^2}+\frac{\partial V}{\partial\alpha}\Big)\Big),$$

Работа выполнена в рамках проекта № 244 Федеральной целевой программы «Интеграция» при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 99-01-00234).

$$F_2 = -\varepsilon\,\frac{\partial^3 V}{\partial\alpha^3} + \frac{\partial V}{\partial\alpha} + \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial V}{\partial\alpha} - W\Big)^2 + \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial W}{\partial\alpha} + V\Big)^2 + \varepsilon\Big(\Big(\frac{\partial^2 W}{\partial\alpha^2} + \frac{\partial V}{\partial\alpha}\Big)\Big(\frac{\partial^3 V}{\partial\alpha^3} - \frac{\partial^2 W}{\partial\alpha^2}\Big) +$$

$$+\Big(\frac{\partial W}{\partial\alpha} + V\Big)\Big(\frac{\partial^4 V}{\partial\alpha^4} - \frac{\partial^3 W}{\partial\alpha^3}\Big) - \Big(\frac{\partial^2 V}{\partial\alpha^2} - \frac{\partial W}{\partial\alpha}\Big)\Big(\frac{\partial^3 W}{\partial\alpha^3} + \frac{\partial^2 V}{\partial\alpha^2}\Big) - \Big(\frac{\partial V}{\partial\alpha} - W\Big)\Big(\frac{\partial^4 W}{\partial\alpha^4} + \frac{\partial^3 V}{\partial\alpha^3}\Big)\Big) +$$

$$+\Big(\frac{\partial V}{\partial\alpha} - W + \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial V}{\partial\alpha} - W\Big)^2 + \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial W}{\partial\alpha} + V\Big)^2\Big)\Big(\Big(\frac{\partial W}{\partial\alpha} + V\Big)\Big(\frac{\partial W}{\partial\alpha} - \frac{\partial^2 V}{\partial\alpha^2}\Big) +$$

$$+\Big(1 + \frac{\partial V}{\partial\alpha} - W\Big)\Big(\frac{\partial^2 W}{\partial\alpha^2} + \frac{\partial V}{\partial\alpha}\Big)\Big);$$

W, V — прогиб и касательное перемещение фиксированных (лагранжевых) точек срединной поверхности, отнесенные к радиусу R недеформированной панели; $\varepsilon = \delta^2/12$; $\delta = h/R$; $T^2 = E/(\rho(1-\mu^2))$; h, ρ — толщина и плотность материала панели; E — модуль упругости; μ — коэффициент Пуассона. В уравнение для прогиба введен член $\gamma(\partial W/\partial t)$, описывающий конструктивное демпфирование. Величину прогиба считаем положительной в направлении к центру кривизны, касательное перемещение положительно в направлении часовой стрелки. Граничные условия на продольных кромках панели для условий шарнирного опирания задаются в виде

$$W = 0, \quad V = 0, \quad \frac{\partial^2 W}{\partial\alpha^2} = 0 \quad \text{при} \quad \alpha = \alpha_1, \quad \alpha = \alpha_2. \qquad (2)$$

Предполагается, что в начальный момент времени точки панели неподвижны:

$$W = 0, \quad V = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial t} = 0 \quad \text{при} \quad t = 0, \quad \alpha_1 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_2. \qquad (3)$$

Нормальная составляющая Z_n динамической нагрузки периодически изменяется во времени, а касательная составляющая Z_τ равна нулю:

$$Z_n = AD\sin(\omega t), \qquad Z_\tau = 0. \qquad (4)$$

Здесь A — амплитуда внешней нагрузки; $D = Eh^3/(12(1-\mu^2))$ — изгибная жесткость панели; ω — частота внешней нагрузки. Нагрузка полагается жесткой, не зависящей от формы срединной поверхности.

Система (1) с условиями (2)–(4) решалась методом конечных разностей с использованием неявных разностных схем второго порядка точности [7–9]. При анализе решения системы строился спектр мощности сигнала

$$|\bar{X}_k|^2 = \Big|\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{n} X_j \exp\Big(-i\,\frac{2\pi kj}{n}\Big)\Big|^2,$$

где $|\bar{X}_k|^2$ — дискретная составляющая спектра мощности, зависящая от частоты; X_j — величина прогиба средней точки панели в момент времени $t_j = j\Delta t$; Δt — шаг по времени.

В соответствии с теоремой Винера — Хинчина (с точностью до числового множителя) автокорреляционная функция ψ_k в момент времени $t_k = k\Delta t$ определялась как фурье-преобразование спектра мощности [1, 2]:

$$\psi_k = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{n} |\bar{X}_j|^2 \exp\Big(-i\,\frac{2\pi kj}{n}\Big).$$

Для исследования эволюции сигнала и степени его хаотичности определялись динамическая и статическая характеристики аттрактора: информация Шеннона и нижняя граница хаусдорфовой размерности D_2 [1, 2]. В фазовом пространстве $(W,\ dW/dt,\ d^2W/dt^2)$

вводилось множество состояний, для этого занятая аттрактором область покрывалась сеткой с ячейкой длины l. Под состоянием системы понималась принадлежность точки аттрактора фиксированной ячейке сетки. В качестве динамической характеристики рассматривалось среднее значение приращения информации Шеннона [2]

$$\Delta\bar{I} = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\Delta I_n,$$

где $\Delta I_n = I_{n+1} - I_n$; $I_n = \sum\limits_{i=1}^{J_1} P_i \log_2 P_i$; $I_{n+1} = \sum\limits_{i=1}^{J_2} P_i \log_2 P_i$.

На основе анализа сигнала для каждого момента времени t_j определялись состояние системы n и множества состояний M_1, M_2, в которые может перейти система в последующие моменты времени t_{j+1}, t_{j+2}. Множества M_1, M_2 содержат J_1 и J_2 различных состояний. В выражениях для информации I_n, I_{n+1} через P_i обозначены вероятности перехода системы из состояния n в некоторые состояния множеств M_1 и M_2 соответственно. Если среднее значение приращения информации Шеннона положительно, то среднее число состояний, в которые может перейти система в данный момент времени, больше единицы и динамический процесс хаотический. Если эта величина равна нулю, то переход из любого состояния в последующее может осуществиться единственным способом и динамика является регулярной [2]. Значения J_1, J_2, P_i определялись из анализа аттрактора в пространстве состояний фазовой системы.

В качестве статической характеристики аттрактора использовалась нижняя граница хаусдорфовой размерности, полученная с помощью корреляционного интеграла [2]:

$$D_2 = \lim_{l\to 0}(\ln C(l)/\ln l), \qquad C(l) = \lim_{l\to 0}(1/N^2)\sum_{i,j}\theta(l - |\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_j|\,).$$

Здесь l — длина ребра кубической ячейки, на которые разбивается область, занятая аттрактором; N — число точек аттрактора; θ — функция Хевисайда; $\boldsymbol{x}_i$, $\boldsymbol{x}_j$ — радиус-векторы точек аттрактора в фазовом пространстве. Величина D_2 определялась как тангенс угла наклона к оси $\log_2 l$ линейного участка (вне области насыщения и области, где статистическая информация недостаточна) зависимости $\log_2 C(l)$ от $\log_2 l$.

В соответствии с изложенной методикой исследовалась зависимость динамического поведения панели от амплитудного значения внешней нагрузки при заданной частоте. Расчеты проводились для панелей с параметрами $\delta = 0{,}01$, $\rho = 4500$ кг/м^3, $T = 5000$ м/с, $\gamma = 0{,}0001$.

Нелинейные колебания симметричной формы. Приведем результаты расчетов для панели с параметром кривизны $K = 4L^2/(Rh) = 4$ ($2L$ — длина пролета панели), при котором изгиб происходит по симметричной форме [10]. Внешняя нагрузка изменяется по гармоническому закону (4) с частотой, равной нижней собственной частоте колебаний упругой панели. На рис. 1 показана зависимость прогиба W в средней точке панели от времени t при наименьшей амплитуде внешней нагрузки $A = 150$, допускающей колебания с охватом обоих положений равновесия. В фазовом пространстве формируется аттрактор с нижней границей хаусдорфовой размерности $D_2 = 2{,}15$. Колебания происходят относительно двух устойчивых положений равновесия. Среднее значение приращения информации Шеннона положительно ($\Delta\bar{I} = 0{,}7236$), спектр мощности содержит непрерывную низкочастотную составляющую, автокорреляционная функция на интересующем нас интервале своего определения убывает. Для данных параметров панели и нагрузки, как следует из рассмотренных критериев [1, 2], колебания носят хаотический характер.

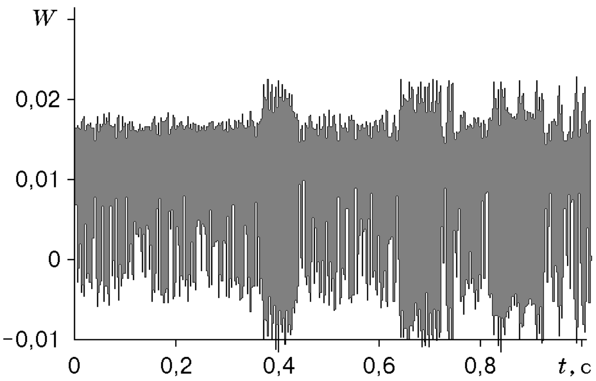

Рис. 1

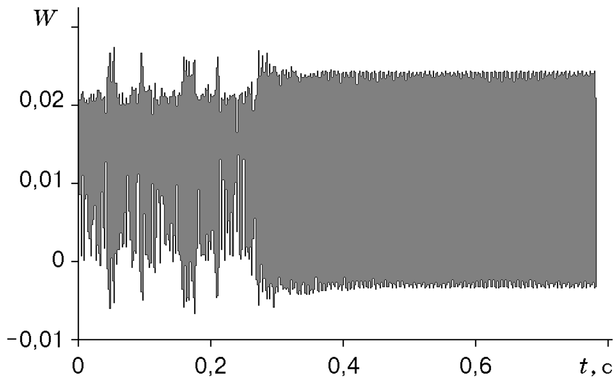

Рис. 2

Сохранив прежние параметры панели и условия закрепления, увеличим амплитуду внешней нагрузки при той же частоте до значения $A = 200$. На рис. 2 показана зависимость прогиба W в средней точке панели от времени t. Наблюдается начальный участок колебаний с хаотическими всплесками амплитуды прогиба. Начиная с момента времени $t = 0{,}4$ с происходит процесс установления квазипериодического режима. Это следует из уменьшения мощности непрерывной низкочастотной составляющей относительно мощности внешней нагрузки и характера автокорреляционной функции, совершающей колебания около медленно меняющегося среднего значения. При $t > 0{,}4$ с аттрактор приближается к предельному циклу и его размерность снижается до $D_2 = 1{,}21$, среднее значение приращения информации Шеннона $\Delta\bar{I} = 0$. Анализ сечения Пуанкаре аттрактора плоскостью $W = 0{,}5$ в трехмерном фазовом пространстве показывает, что в этой плоскости аттрактор испытывает сжатие. При выбранных параметрах задачи из анализа результатов следует, что при достаточно большом значении амплитуды нагрузки в системе происходит переход от хаотического режима к квазипериодическому. Если же амплитуда колебаний панели мала и не превышает толщины панели, то в системе реализуются квазипериодические колебания. Таким образом, если в качестве управляющего параметра рассматривается амплитуда внешней нагрузки, то область хаотической динамики располагается между двумя областями с регулярной динамикой.

Нелинейные колебания несимметричной формы. Колебания упругой панели несимметричной формы реализуются при значениях параметра кривизны $K = 4L^2/(Rh) > 9{,}04$ [10]. В качестве примера приведем результаты расчетов при $K = 19{,}6$, $\delta = 0{,}01$, $\rho = 4500$ кг/м^3,

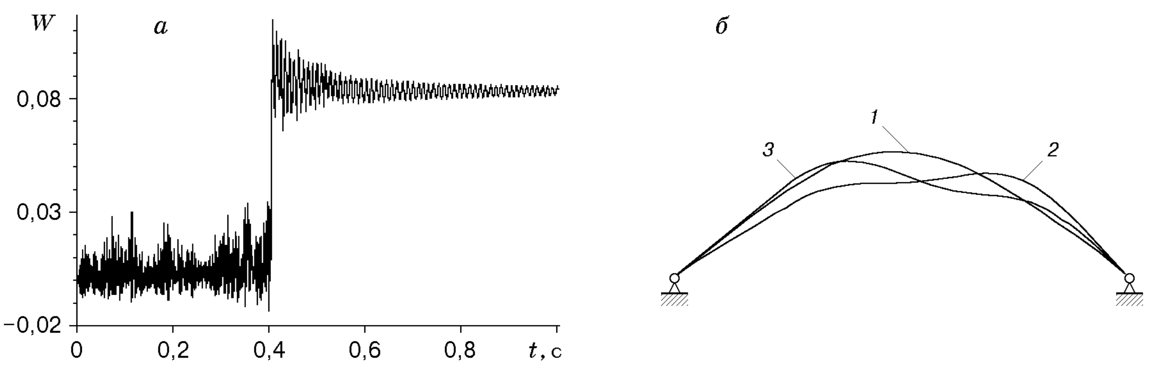

Рис. 3

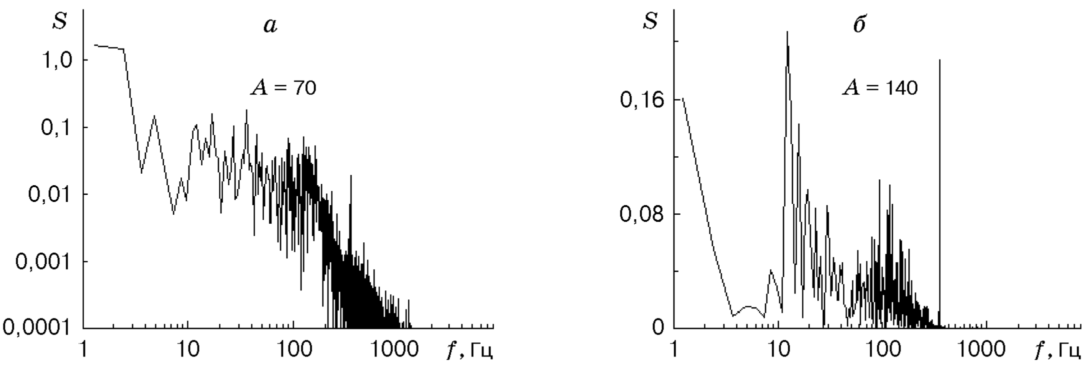

Рис. 4

$T = 5000$ м/с, $\gamma = 0{,}0001$. В этом случае нижняя собственная частота недеформированной панели $f_1 = 500$ Гц. На рис. 3 представлены зависимость прогиба W в средней точке панели от времени (*а*) и форма панели в отдельные моменты времени (*б*) (кривые *1–3* — $t = 0{,}01$; 0,02; 0,03 с) при частоте внешней нагрузки, совпадающей с нижней резонансной, и минимальной амплитуде $A = 60$, при которой происходит «хлопок». Характерной особенностью данного режима является то, что обратного «выхлопа» панели не происходит. Это связано с тем, что резонансные частоты панели в двух положениях равновесия существенно различны. Так, для данных параметров панели нижняя собственная частота колебаний в исходном положении $f_1 = 500$ Гц, а в прощелкнутом положении $f_1 = 100$ Гц. Поскольку потеря устойчивости происходит на резонансной частоте, то амплитуда колебаний нагрузки не слишком велика. В прощелкнутом положении резонансная частота не совпадает с частотой нагрузки, в результате чего устанавливаются регулярные квазипериодические колебания вблизи нижнего устойчивого положения (рис. 3,*б*).

При постепенном увеличении амплитуды нагрузки на частоте, смещенной от резонансной, после «хлопка» происходят нерегулярные колебания с охватом обоих положений равновесия. На рис. 4,*а* представлена зависимость мощности колебаний S в средней точке панели от частоты колебаний f при частоте внешней нагрузки $f_{\text{н}} = 350$ Гц и минимальной амплитуде $A = 70$, при которой происходит потеря устойчивости. Амплитуда критической нагрузки в этом случае выше, и подводимой мощности достаточно для возникновения колебаний с предельно возможной амплитудой прогиба. Спектр мощности колебаний содержит непрерывную составляющую в низкочастотной области, что позволяет классифицировать динамический режим как хаотический. При увеличении амплитуды нагрузки ($A = 140$) уменьшается низкочастотная составляющая спектра мощности относительно частоты внешней силы (рис. 4,*б*). Тем не менее ее присутствие в спектре мощности не позволяет отнести динамический режим к квазипериодическому типу.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Берже П., Помо И., Видаль К.** Порядок в хаосе. О детерминистском подходе к турбулентности. М.: Мир, 1991.
2. **Шустер Г.** Детерминированный хаос. М.: Мир, 1988.
3. **Holmes P., Moon F.** Strange attractors and chaos in nonlinear mechanics // Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech. 1983. V. 50. P. 1021–1032.
4. **Lenci S., Tarantino A. M.** Bifurcation and chaos in a bilinear constrained column // Europ. J. Mech. 1995. V. 14, N 5. P. 789–806.

5. **Крысько М. А., Петров В. В., Миткевич С. А.** Сложные колебания и жесткая потеря устойчивости геометрически нелинейных пластин при продольных нагрузках // Тр. XVIII Междунар. конф. по теории оболочек и пластин. Саратов: Изд-во Сарат. гос. техн. ун-та, 1997. Т. 1. С. 160–174.
6. **Муштари Х. М., Галимов К. З.** Нелинейная теория упругих оболочек. Казань: Таткнигоиздат, 1957.
7. **Вольмир А. С.** Оболочки в потоке жидкости и газа. Задачи аэроупругости. М.: Наука, 1976.
8. **Ильгамов М. А., Тукмаков А. Л.** Численное моделирование нелинейного взаимодействия упругой оболочки с потоком газа // Изв. вузов. Авиац. техника. 1995. № 3. С. 1–7.
9. **Ильгамов М. А., Тукмаков А. Л.** Численное моделирование нелинейного взаимодействия упругой панели с потоком газа // Изв. РАН. Механика твердого тела. 1996. № 5. С. 134–141.
10. **Корнишин М. С., Исанбаева Ф. С.** Гибкие пластины и панели. М.: Наука, 1968.

Поступила в редакцию 14/V 1998 г.,
в окончательном варианте — 23/XI 1998 г.