УДК 539.3: 517.958

КЛАССЫ СИММЕТРИИ ТЕНЗОРОВ АНИЗОТРОПИИ КВАЗИУПРУГИХ МАТЕРИАЛОВ И ОБОБЩЕНИЕ ПОДХОДА КЕЛЬВИНА

Н. И. Остросаблин

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск, Россия
E-mail: abd@hydro.nsc.ru

Для всех классов кристаллографических симметрий получены в явном виде матрицы (тензоры) анизотропии квазиупругих (упругих по Коши) материалов. Тензоры анизотропии четвертого ранга таких материалов не обладают главной симметрией, в этом случае матрица анизотропии не является симметричной. В результате введения в пространстве симметричных тензоров напряжений и деформаций различных базисов линейная связь напряжений и деформаций записывается в инвариантной форме, аналогичной форме, в которой записывается обобщенный закон Гука для случая анизотропных гиперупругих материалов, и содержит шесть положительных собственных модулей Кельвина. Показано, что, вводя в пространстве деформаций модифицированные деформации, полученные поворотом, можно перейти к симметричной матрице анизотропии, имеющей место в случае гиперупругости. Для случая трансверсальной изотропии приведены примеры определения собственных модулей Кельвина и собственных базисов и матрицы поворота в пространстве деформаций. Показано, что возможно существование квазиупругих сред с кососимметричной матрицей анизотропии без симметричной части. Предложены некоторые способы экспериментальной проверки модели квазиупругости.

Ключевые слова: линейно-упругие материалы, квазиупругость, упругость по Коши, анизотропия, классы симметрии, собственные модули и состояния.

DOI: 10.15372/PMTF20170312

Существует несколько определений упругих сред. Согласно одному из них в упругом теле симметричный тензор напряжений $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ связан с симметричным тензором деформаций $\varepsilon_{kl} = \varepsilon_{lk}$ взаимно однозначной функцией [1–3]. При малых деформациях $\varepsilon_{kl} = (\partial_k u_l + \partial_l u_k)/2$ связь напряжений и деформаций определяется взаимно обратными линейными соотношениями

$$\sigma_{ij} = A_{ijkl}\varepsilon_{kl}, \qquad \varepsilon_{ij} = a_{ijkl}\sigma_{kl}. \tag{1}$$

Здесь и далее используется декартова прямоугольная система координат x_i, $i = 1, 2, 3$; повторяющиеся индексы означают суммирование по допустимым значениям индексов; ∂_k — производные по координате x_k; u_l — компоненты вектора смещения.

Работа выполнена в рамках Программы фундаментальных исследований СО РАН (код проекта III.23.3.1) и при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 16-01-00679).

Свойства упругости материалов характеризуются тензором четвертого ранга модулей упругости

$$A_{ijkl} = A_{jikl} = A_{ijlk} \tag{2}$$

и тензором коэффициентов податливости

$$a_{ijkl} = a_{jikl} = a_{ijlk}. \tag{3}$$

Компоненты тензоров (2), (3) связаны соотношениями

$$A_{ijkl}a_{klrs} = \delta_{ijrs} = \frac{1}{2}(\delta_{ir}\delta_{js} + \delta_{is}\delta_{jr}), \qquad a_{ijkl}A_{klrs} = \delta_{ijrs}, \tag{4}$$

где $\delta_{ij} = 1$ при $i = j$, $\delta_{ij} = 0$ при $i \neq j$. В (1)–(3) предполагается, что

$$A_{ijkl} \neq A_{klij}, \qquad a_{ijkl} \neq a_{klij}, \tag{5}$$

т. е. эти тензоры не обладают главной симметрией. В силу свойств симметрии (2), (3) в общем случае имеется 36 независимых компонент A_{ijkl} и a_{ijkl}, а не 21, как при наличии главной симметрии $A_{ijkl} = A_{klij}$, $a_{ijkl} = a_{klij}$. Определяющие соотношения вида (1)–(3), (5) соответствуют квазиупругим (упругим по Коши) материалам, для которых работа напряжений может зависеть от пути деформирования [4], в отличие от гиперупругих материалов [1–3]. Соотношения (1) с тензорами вида (2), (3), (5) исследованы недостаточно и используются редко, несмотря на то что такие тензоры входят в уравнения наследственной упругости или вязкоупругости [5, 6] и фотоупругости [7].

При ортогональном преобразовании системы координат

$$x_i = \alpha_{ij}\hat{x}_j, \qquad \hat{x}_j = \alpha_{ij}x_i, \qquad \alpha_{ip}\alpha_{iq} = \delta_{pq} \tag{6}$$

компоненты $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ тензора напряжений и A_{ijkl} преобразуются по формулам

$$\begin{gathered} \sigma_{ij} = \alpha_{ip}\alpha_{jq}\hat{\sigma}_{pq}, \qquad \hat{\sigma}_{pq} = \alpha_{ip}\alpha_{jq}\sigma_{ij}; \\ A_{ijkl} = \alpha_{ip}\alpha_{jq}\hat{A}_{pqrs}\alpha_{kr}\alpha_{ls} = \alpha_{ijpq}\hat{A}_{pqrs}\alpha_{klrs}, \\ \hat{A}_{pqrs} = \alpha_{ip}\alpha_{jq}A_{ijkl}\alpha_{kr}\alpha_{ls} = \alpha_{ijpq}A_{ijkl}\alpha_{klrs}, \qquad \alpha_{ijpq} = \frac{1}{2}(\alpha_{ip}\alpha_{jq} + \alpha_{iq}\alpha_{jp}). \end{gathered} \tag{7}$$

Для компонент $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$ тензора деформаций и a_{ijkl} формулы преобразования аналогичны (7).

Для симметричных по двум индексам тензоров будем использовать формулы перехода от двух индексов к одному

$$\begin{gathered} \sigma_{11} = \sigma_1, \qquad \sigma_{22} = \sigma_2, \qquad \sigma_{33} = \sigma_3, \\ \sqrt{2}\sigma_{23} = \sqrt{2}\sigma_{32} = \sigma_4, \quad \sqrt{2}\sigma_{13} = \sqrt{2}\sigma_{31} = \sigma_5, \quad \sqrt{2}\sigma_{12} = \sqrt{2}\sigma_{21} = \sigma_6. \end{gathered} \tag{8}$$

Такие же формулы перехода (8) имеют место для симметричных тензоров ε_{ij}, δ_{ij}, A_{ijkl}, a_{ijkl}, α_{ijpq}. С учетом (8) соотношения (1), (7) принимают вид

$$\sigma_i = A_{ij}\varepsilon_j, \quad \varepsilon_i = a_{ij}\sigma_j, \quad i = \overline{1,6}, \ j = \overline{1,6}; \tag{9}$$

$$A = \tilde{\alpha}\hat{A}\tilde{\alpha}', \qquad \hat{A} = \tilde{\alpha}'A\tilde{\alpha}, \qquad A\tilde{\alpha} = \tilde{\alpha}\hat{A}. \tag{10}$$

Штрих означает транспонирование матрицы. В силу (2)–(5) матрицы A_{ij}, a_{ij} несимметричные, взаимно обратные, т. е. их определители не равны нулю. Шестимерная ортогональная матрица $\tilde{\alpha}_{ip}$ соответствует тензору α_{ijpq} (7) и выражается через компоненты трехмерной ортогональной матрицы α_{ip} (6) по формуле [8, 9]

$$\tilde{\alpha}_{ip} = \begin{bmatrix} \alpha_{11}^2 & \alpha_{12}^2 & \alpha_{13}^2 & \sqrt{2}\alpha_{12}\alpha_{13} & \sqrt{2}\alpha_{11}\alpha_{13} & \sqrt{2}\alpha_{11}\alpha_{12} \\ \alpha_{21}^2 & \alpha_{22}^2 & \alpha_{23}^2 & \sqrt{2}\alpha_{22}\alpha_{23} & \sqrt{2}\alpha_{21}\alpha_{23} & \sqrt{2}\alpha_{21}\alpha_{22} \\ \alpha_{31}^2 & \alpha_{32}^2 & \alpha_{33}^2 & \sqrt{2}\alpha_{32}\alpha_{33} & \sqrt{2}\alpha_{31}\alpha_{33} & \sqrt{2}\alpha_{31}\alpha_{32} \\ \sqrt{2}\alpha_{21}\alpha_{31} & \sqrt{2}\alpha_{22}\alpha_{32} & \sqrt{2}\alpha_{23}\alpha_{33} & \alpha_{22}\alpha_{33} + \alpha_{23}\alpha_{32} & \alpha_{21}\alpha_{33} + \alpha_{23}\alpha_{31} & \alpha_{21}\alpha_{32} + \alpha_{22}\alpha_{31} \\ \sqrt{2}\alpha_{11}\alpha_{31} & \sqrt{2}\alpha_{12}\alpha_{32} & \sqrt{2}\alpha_{13}\alpha_{33} & \alpha_{12}\alpha_{33} + \alpha_{13}\alpha_{32} & \alpha_{11}\alpha_{33} + \alpha_{13}\alpha_{31} & \alpha_{11}\alpha_{32} + \alpha_{12}\alpha_{31} \\ \sqrt{2}\alpha_{11}\alpha_{21} & \sqrt{2}\alpha_{12}\alpha_{22} & \sqrt{2}\alpha_{13}\alpha_{23} & \alpha_{12}\alpha_{23} + \alpha_{13}\alpha_{22} & \alpha_{11}\alpha_{23} + \alpha_{13}\alpha_{21} & \alpha_{11}\alpha_{22} + \alpha_{12}\alpha_{21} \end{bmatrix}. \tag{11}$$

Если при некоторых преобразованиях (6), (7) свойства упругости, т. е. матрицы A_{ij}, и a_{ij}, не изменяются, то такие преобразования называются преобразованиями симметрии данного материала [10, 11]. При этом третье соотношение (10) принимает вид

$$\tilde{\alpha}A = A\tilde{\alpha} \tag{12}$$

и означает, что матрицы A и $\tilde{\alpha}$ перестановочны. Любую квадратную матрицу A можно представить в виде суммы симметричной матрицы $C = C'$ и кососимметричной матрицы $B = -B'$. Пусть

$$A = C + B, \qquad C' = C, \qquad B' = -B. \tag{13}$$

Тогда с учетом (13) из (12) получаем

$$\begin{gathered} \tilde{\alpha}(C+B) = (C+B)\tilde{\alpha}, \qquad (C'+B')\tilde{\alpha}' = \tilde{\alpha}'(C'+B'), \\ (C-B)\tilde{\alpha}' = \tilde{\alpha}'(C-B), \qquad \tilde{\alpha}(C-B) = (C-B)\tilde{\alpha}. \end{gathered} \tag{14}$$

Из первого и последнего соотношений (14) следует, что

$$\tilde{\alpha}C = C\tilde{\alpha}, \quad \tilde{\alpha}_{ip}C_{pj} = C_{iq}\tilde{\alpha}_{qj}, \qquad \tilde{\alpha}B = B\tilde{\alpha}, \quad \tilde{\alpha}_{ip}B_{pj} = B_{iq}\tilde{\alpha}_{qj}, \tag{15}$$

т. е. при преобразованиях симметрии $\tilde{\alpha}_{ip}$ не должна изменяться ни симметричная часть C, ни кососимметричная часть B.

Все преобразования симметрии сводятся к двум основным преобразованиям: повороту вокруг некоторой оси на угол $\varphi = 2\pi/n$, $n = 2, 3, 4, 6$ и зеркальному отражению в некоторой плоскости [10]. В случае кристаллов может быть семь сингоний [10]. Для тензоров четвертого ранга A_{ijkl} порождающие преобразования и группы симметрии приведены в [11]. Кристаллографические симметрии для тензоров вида (5) абстрактно рассматриваются в [12]. Ниже, используя соотношения (15) и принимая обозначения [11], получим матрицы (13) в явном виде для всех 12 групп кристаллографических симметрий.

Сначала рассмотрим трансверсальную изотропию или гексагональную сингонию [10]. Обозначим эту группу симметрии $5.\{1, 1, \infty\}$. Первое число означает порядковый номер симметрии в таблице [11], числа в фигурных скобках показывают, какой порядок симметрии имеют оси координат x_1, x_2, x_3. Знак “∞” означает возможность поворота вокруг оси x_3 на произвольный угол.

Матрица α_{ij} (6) поворота вокруг оси $x_3 = \hat{x}_3$ имеет вид

$$\alpha_{ij} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & -s & 0 \\ s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad c^2 + s^2 = 1,$$

при этом шестимерная ортогональная матрица $\tilde{\alpha}_{ip}$ (11) имеет вид

$$\tilde{\alpha}_{ip} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & 0 & 0 & 0 & -\sqrt{2}cs \\ s^2 & c^2 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2}cs \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -s & c & 0 \\ \sqrt{2}cs & -\sqrt{2}cs & 0 & 0 & 0 & c^2 - s^2 \end{bmatrix}. \tag{16}$$

С учетом (16) при выполнении соотношений (15) для любого угла поворота вокруг оси x_3 получаем матрицу (13):

$$A_{ij} = C_{ij} + B_{ij} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & C_{31} - B_{31} & 0 & 0 & -B_{61} \\ C_{21} & C_{11} & C_{31} - B_{31} & 0 & 0 & B_{61} \\ C_{31} + B_{31} & C_{31} + B_{31} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & -B_{54} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B_{54} & C_{44} & 0 \\ B_{61} & -B_{61} & 0 & 0 & 0 & C_{11} - C_{21} \end{bmatrix}. \tag{17}$$

В (17) имеется восемь независимых постоянных: пять постоянных симметричной части и три постоянные кососимметричной части.

Матрица вида (17) без выделения кососимметричной части приводится в [13]. Трансверсальная изотропия абстрактно рассматривается в [12, 14]. В работах [15, 16] при решении конкретных задач в двумерном случае используется матрица вида

$$A_{ij} = \begin{bmatrix} \lambda+2\mu & \lambda & \sqrt{2}\beta \\ \lambda & \lambda+2\mu & -\sqrt{2}\beta \\ -\sqrt{2}\beta & \sqrt{2}\beta & 2\mu \end{bmatrix}, \tag{18}$$

где λ, μ, β — некоторые постоянные. В [17] при исследовании продольных плоских волн приводится матрица вида (упругий, но не гиперупругий материал)

$$A_{ij} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & -\alpha_1 & -\alpha_3 & 0 & 0 & \sqrt{2}\alpha_2 \\ -\alpha_1 & \alpha_1 & -\alpha_3 & 0 & 0 & -\sqrt{2}\alpha_2 \\ -\alpha_3 & -\alpha_3 & \alpha_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\alpha_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\alpha_3 & 0 \\ -\sqrt{2}\alpha_2 & \sqrt{2}\alpha_2 & 0 & 0 & 0 & 2\alpha_1 \end{bmatrix}, \tag{19}$$

где α_1, α_2, α_3 — некоторые постоянные. Матрицы (18), (19) соответствуют трансверсальной изотропии и являются частными случаями общей матрицы (17).

Если соотношения (15) выполняются только для тождественного преобразования (6) с $\alpha_{ij} = \delta_{ij}$, то группа симметрии $1.\{1,1,1\}$ соответствует триклинной сингонии [10], а матрица (13) имеет общий вид

$$A_{ij} = C_{ij} + B_{ij} =$$

$$= \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21}-B_{21} & C_{31}-B_{31} & C_{41}-B_{41} & C_{51}-B_{51} & C_{61}-B_{61} \\ C_{21}+B_{21} & C_{22} & C_{32}-B_{32} & C_{42}-B_{42} & C_{52}-B_{52} & C_{62}-B_{62} \\ C_{31}+B_{31} & C_{32}+B_{32} & C_{33} & C_{43}-B_{43} & C_{53}-B_{53} & C_{63}-B_{63} \\ C_{41}+B_{41} & C_{42}+B_{42} & C_{43}+B_{43} & C_{44} & C_{54}-B_{54} & C_{64}-B_{64} \\ C_{51}+B_{51} & C_{52}+B_{52} & C_{53}+B_{53} & C_{54}+B_{54} & C_{55} & C_{65}-B_{65} \\ C_{61}+B_{61} & C_{62}+B_{62} & C_{63}+B_{63} & C_{64}+B_{64} & C_{65}+B_{65} & C_{66} \end{bmatrix} \tag{20}$$

и содержит 36 независимых постоянных: 21 постоянную симметричной части и 15 постоянных кососимметричной части.

Рассмотрим вращение вокруг оси $x_2 = \hat{x}_2$ на произвольный угол, при этом матрицы (6), (11) имеют вид

$$\alpha_{ij} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & 0 & \alpha_{13} \\ 0 & 1 & 0 \\ \alpha_{31} & 0 & \alpha_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & 0 & -s \\ 0 & 1 & 0 \\ s & 0 & c \end{bmatrix}, \qquad c^2 + s^2 = 1;$$

$$\tilde{\alpha}_{ip} = \begin{bmatrix} c^2 & 0 & s^2 & 0 & -\sqrt{2}cs & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ s^2 & 0 & c^2 & 0 & \sqrt{2}cs & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & 0 & s \\ \sqrt{2}cs & 0 & -\sqrt{2}cs & 0 & c^2-s^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -s & 0 & c \end{bmatrix}. \tag{21}$$

С учетом (21) при выполнении соотношений (15) для матриц (17) получаем матрицу

$$A_{ij} = C_{ij} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & C_{21} & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{11} & C_{21} & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{21} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{11}-C_{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{11}-C_{21} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{11}-C_{21} \end{bmatrix}$$

группы симметрии $12.\{\infty,\infty,\infty\}$ изотропного материала с двумя независимыми постоянными, причем кососимметричная часть отсутствует.

Пусть имеет место моноклинная сингония [10] с группой симметрии $2.\{1,1,2\}$, т. е. ось вращения $x_3 = \hat{x}_3$ второго порядка, угол поворота $\varphi = \pi$, при этом в матрице (16) $c = -1$, $s = 0$. Тогда при выполнении соотношений (15) получаем матрицу (20) вида

$$A_{ij} = C_{ij} + B_{ij} =$$
$$= \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21}-B_{21} & C_{31}-B_{31} & 0 & 0 & C_{61}-B_{61} \\ C_{21}+B_{21} & C_{22} & C_{32}-B_{32} & 0 & 0 & C_{62}-B_{62} \\ C_{31}+B_{31} & C_{32}+B_{32} & C_{33} & 0 & 0 & C_{63}-B_{63} \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & C_{54}-B_{54} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{54}+B_{54} & C_{55} & 0 \\ C_{61}+B_{61} & C_{62}+B_{62} & C_{63}+B_{63} & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix}, \qquad (22)$$

содержащую 20 независимых постоянных: 13 постоянных симметричной части и 7 постоянных кососимметричной части.

В случае ортотропии или ромбической сингонии [10] имеет место группа симметрии $6.\{1,2,2\}$, т. е. возможен также поворот на угол $\psi = \pi$ вокруг оси $x_2 = \hat{x}_2$, при этом в матрице (21) $c = -1$, $s = 0$. Тогда при выполнении соотношений (15) для матриц (22) получаем матрицу модулей упругости ортотропного материала

$$A_{ij} = C_{ij} + B_{ij} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21}-B_{21} & C_{31}-B_{31} & 0 & 0 & 0 \\ C_{21}+B_{21} & C_{22} & C_{32}-B_{32} & 0 & 0 & 0 \\ C_{31}+B_{31} & C_{32}+B_{32} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix}, \qquad (22a)$$

содержащую 12 независимых постоянных: девять постоянных симметричной части и три постоянные кососимметричной части.

Для тетрагональной сингонии [10] имеет место группа симметрии $4.\{1,1,4\}$, т. е. возможен поворот на угол $\varphi = \pi/2$ вокруг оси $x_3 = \hat{x}_3$, при этом в матрице (16) $c = 0$, $s = 1$. Тогда при выполнении соотношений (15) для матриц (20) получаем матрицу

$$A_{ij} = C_{ij} + B_{ij} =$$
$$= \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & C_{31}-B_{31} & 0 & 0 & C_{61}-B_{61} \\ C_{21} & C_{11} & C_{31}-B_{31} & 0 & 0 & -C_{61}+B_{61} \\ C_{31}+B_{31} & C_{31}+B_{31} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & -B_{54} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B_{54} & C_{44} & 0 \\ C_{61}+B_{61} & -C_{61}-B_{61} & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix}, \qquad (23)$$

содержащую 10 независимых постоянных: семь постоянных симметричной части и три постоянные кососимметричной части.

Для тетрагональной сингонии с группой симметрии $8.\{1,2,4\}$ возможен также поворот на угол $\psi = \pi$ вокруг оси $x_2 = \hat{x}_2$, при этом в матрице (21) $c = -1$, $s = 0$. При выполнении соотношений (15) для матриц (23) получаем матрицу

$$A_{ij} = C_{ij} + B_{ij} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & C_{31} - B_{31} & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{11} & C_{31} - B_{31} & 0 & 0 & 0 \\ C_{31} + B_{31} & C_{31} + B_{31} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix},$$

содержащую семь независимых постоянных: шесть постоянных симметричной части и одну постоянную кососимметричной части.

Для тригональной сингонии [10] с группой симметрии $3.\{1,1,3\}$ возможен поворот на угол $\varphi = 2\pi/3$ вокруг оси $x_3 = \hat{x}_3$, при этом в матрице (16) $c = -1/2$, $s = \sqrt{3}/2$ и

$$\tilde{\alpha}_{ip} = \begin{bmatrix} 1/4 & 3/4 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{6}/4 \\ 3/4 & 1/4 & 0 & 0 & 0 & -\sqrt{6}/4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 \\ -\sqrt{6}/4 & \sqrt{6}/4 & 0 & 0 & 0 & -1/2 \end{bmatrix}. \qquad (24)$$

С учетом (24) при выполнении соотношений (15) для матриц (20) получаем матрицу

$$A_{ij} = C_{ij} + B_{ij} =$$

$$= \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & C_{31} - B_{31} & C_{41} - B_{41} & C_{51} - B_{51} & -B_{61} \\ C_{21} & C_{11} & C_{31} - B_{31} & -C_{41} + B_{41} & -C_{51} + B_{51} & B_{61} \\ C_{31} + B_{31} & C_{31} + B_{31} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ C_{41} + B_{41} & -C_{41} - B_{41} & 0 & C_{44} & -B_{54} & -\sqrt{2}(C_{51} + B_{51}) \\ C_{51} + B_{51} & -C_{51} - B_{51} & 0 & B_{54} & C_{44} & \sqrt{2}(C_{41} + B_{41}) \\ B_{61} & -B_{61} & 0 & -\sqrt{2}(C_{51} - B_{51}) & \sqrt{2}(C_{41} - B_{41}) & C_{11} - C_{21} \end{bmatrix}, \qquad (25)$$

содержащую 12 независимых постоянных: семь постоянных симметричной части и пять постоянных кососимметричной части.

Для тригональной сингонии с группой симметрии $7.\{1,2,3\}$ возможен также поворот на угол $\psi = \pi$ вокруг оси $x_2 = \hat{x}_2$, при этом в матрице (21) $c = -1$, $s = 0$. При выполнении условий (15) для матриц (25) получаем матрицу

$$A_{ij} = C_{ij} + B_{ij} =$$

$$= \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & C_{31} - B_{31} & 0 & C_{51} - B_{51} & 0 \\ C_{21} & C_{11} & C_{31} - B_{31} & 0 & -C_{51} + B_{51} & 0 \\ C_{31} + B_{31} & C_{31} + B_{31} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & -\sqrt{2}(C_{51} + B_{51}) \\ C_{51} + B_{51} & -C_{51} - B_{51} & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sqrt{2}(C_{51} - B_{51}) & 0 & C_{11} - C_{21} \end{bmatrix}, \qquad (26)$$

содержащую восемь независимых постоянных: шесть постоянных симметричной части и две постоянные кососимметричной части.

Если имеет место группа симметрии 7а.$\{2, 1, 3\}$, т. е. осью симметрии второго порядка является ось $x_1 = \hat{x}_1$, то вместо (26) получаем матрицу

$$A_{ij} = C_{ij} + B_{ij} =$$

$$= \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & C_{31} - B_{31} & C_{41} - B_{41} & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{11} & C_{31} - B_{31} & -(C_{41} - B_{51}) & 0 & 0 \\ C_{31} + B_{31} & C_{31} + B_{31} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ C_{41} + B_{41} & -(C_{41} + B_{41}) & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & \sqrt{2}(C_{41} + B_{41}) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2}(C_{41} - B_{41}) & C_{11} - C_{21} \end{bmatrix}, \qquad (27)$$

содержащую восемь независимых постоянных.

Если для моноклинной сингонии с группой симметрии 2а.$\{2, 1, 1\}$ осью симметрии второго порядка является ось $x_1 = \hat{x}_1$, то вместо (22) получаем матрицу

$$A_{ij} = C_{ij} + B_{ij} =$$

$$= \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} - B_{21} & C_{31} - B_{31} & C_{41} - B_{41} & 0 & 0 \\ C_{21} + B_{21} & C_{22} & C_{32} - B_{32} & C_{42} - B_{42} & 0 & 0 \\ C_{31} + B_{31} & C_{32} + B_{32} & C_{33} & C_{43} - B_{43} & 0 & 0 \\ C_{41} + B_{41} & C_{42} + B_{42} & C_{43} + B_{43} & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & C_{65} - B_{65} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{65} + B_{65} & C_{66} \end{bmatrix},$$

содержащую 20 независимых постоянных.

Для трансверсальной изотропии с группой симметрии 9.$\{1, 2, \infty\}$ возможен также поворот на угол $\psi = \pi$ вокруг оси $x_2 = \hat{x}_2$, при этом в матрице (21) $c = -1$, $s = 0$. При выполнении условий (15) для матриц (17) получаем матрицу

$$A_{ij} = C_{ij} + B_{ij} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & C_{31} - B_{31} & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{11} & C_{31} - B_{31} & 0 & 0 & 0 \\ C_{31} + B_{31} & C_{31} + B_{31} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{11} - C_{21} \end{bmatrix},$$

содержащую шесть независимых постоянных: пять постоянных симметричной части и одну постоянную кососимметричной части.

Для кубической сингонии [10] с группой симметрии 10.$\{1, 4, 4\}$ помимо поворота на угол $\varphi = \pi/2$ вокруг оси $x_3 = \hat{x}_3$ возможен поворот на угол $\psi = \pi/2$ вокруг оси $x_2 = \hat{x}_2$, при этом в матрице (21) $c = 0$, $s = 1$. При выполнении условий (15) для матриц (23) получаем матрицу

$$A_{ij} = C_{ij} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & C_{21} & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{11} & C_{21} & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{21} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} \end{bmatrix},$$

содержащую три независимые постоянные симметричной части. Кососимметричная часть для этой группы симметрии нулевая.

Для кубической сингонии [10] с группой симметрии $11.\{1,1,2/3\}$ ось $x_3 = \hat{x}_3$ является осью симметрии второго порядка, запись “/3” означает наличие оси симметрии третьего порядка, равнонаклоненной к x_1, x_2, x_3, при этом матрицы (6), (11) имеют вид

$$\alpha_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \tilde{\alpha}_{ip} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

При выполнении условий (15) для матриц (22) получаем матрицу

$$A_{ij} = C_{ij} + B_{ij} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21}-B_{21} & C_{21}+B_{21} & 0 & 0 & 0 \\ C_{21}+B_{21} & C_{11} & C_{21}-B_{21} & 0 & 0 & 0 \\ C_{21}-B_{21} & C_{21}+B_{21} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} \end{bmatrix},$$

содержащую четыре независимые постоянные: три постоянные симметричной части и одну постоянную кососимметричной части.

Таким образом, на основе соотношений (6), (11), (15) получено явное выражение для приведенных выше матриц (тензоров) анизотропии упругих по Коши материалов для всех 12 классов кристаллографических симметрий: $1.\{1,1,1\}$, $2.\{1,1,2\}$, $3.\{1,1,3\}$, $4.\{1,1,4\}$, $5.\{1,1,\infty\}$, $6.\{1,2,2\}$, $7.\{1,2,3\}$, $8.\{1,2,4\}$, $9.\{1,2,\infty\}$, $10.\{1,4,4\}$, $11.\{1,1,2/3\}$, $12.\{\infty,\infty,\infty\}$ [11, 12]. Аналогичные матрицы пьезооптических коэффициентов, но без выделения кососимметричных частей приведены в [7].

Рассмотрим обобщенный закон Гука (9) с несимметричной матрицей $A_{ij} \neq A_{ji}$. Невырожденная матрица A_{ij} всегда представляется в виде [18]

$$A = T\Lambda F', \qquad AF = T\Lambda, \tag{28}$$

где F, T — ортогональные матрицы, т. е. $F'F = E$, $T'T = E$ (E — единичная матрица),

$$\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1,\, \lambda_2,\, \lambda_3,\, \lambda_4,\, \lambda_5,\, \lambda_6) \qquad (\lambda_i > 0) \text{ —}$$

диагональная матрица. При этом закон Гука (9) принимает вид

$$\sigma = T\Lambda F'\varepsilon, \qquad T'\sigma = \Lambda F'\varepsilon, \qquad \tilde{\sigma} = \Lambda\tilde{\varepsilon}, \tag{29}$$

где $\tilde{\sigma} = T'\sigma$; $\tilde{\varepsilon} = F'\varepsilon$; $\sigma = T\tilde{\sigma}$; $\varepsilon = F\tilde{\varepsilon}$, или

$$\sigma_i = t_{ip}\tilde{\sigma}_p, \qquad \tilde{\sigma}_p = t_{ip}\sigma_i, \qquad \varepsilon_i = f_{iq}\tilde{\varepsilon}_q, \qquad \tilde{\varepsilon}_q = f_{iq}\varepsilon_i,$$

t_{ip}, f_{iq} — элементы ортогональных матриц T, F. Столбцы этих матриц образуют ортогональные базисы в шестимерных пространствах напряжений σ_i и деформаций ε_i, $i = \overline{1,6}$. Второе (или третье) матричное равенство (29) состоит из шести независимых инвариантных равенств

$$\begin{aligned} &t_{i1}\sigma_i = \lambda_1 f_{j1}\varepsilon_j, \qquad t_{i2}\sigma_i = \lambda_2 f_{j2}\varepsilon_j, \qquad t_{i3}\sigma_i = \lambda_3 f_{j3}\varepsilon_j, \\ &t_{i4}\sigma_i = \lambda_4 f_{j4}\varepsilon_j, \qquad t_{i5}\sigma_i = \lambda_5 f_{j5}\varepsilon_j, \qquad t_{i6}\sigma_i = \lambda_6 f_{j6}\varepsilon_j. \end{aligned} \tag{30}$$

Соотношения (29) (как и (30)) несложно обратить:

$$\tilde{\varepsilon} = \Lambda^{-1}\tilde{\sigma}, \qquad F'\varepsilon = \Lambda^{-1}T'\sigma, \qquad \varepsilon = F\Lambda^{-1}T'\sigma. \tag{31}$$

Таким образом, обратная матрица равна $a = A^{-1} = F\Lambda^{-1}T'$. Формулы (28)–(31) являются обобщением подхода Кельвина — Рыхлевского [19] для линейно-гиперупругих анизотропных материалов на случай упругих по Коши (квазиупругих) материалов [4]. Величины $\lambda_i > 0$, $i = \overline{1,6}$ можно назвать собственными модулями Кельвина. Некоторые собственные модули λ_i в (30) могут иметь одинаковые значения, т. е. быть кратными. Анизотропные материалы можно классифицировать не только по свойствам (группам) симметрии, но и по числу собственных модулей λ_i и их кратностям (см. работу [19] и библиографию к ней). В некоторых случаях равенства (30) обобщаются на нелинейные определяющие соотношения

$$\tilde{\sigma}_1 = f_1(\tilde{\varepsilon}_1), \quad \tilde{\sigma}_2 = f_2(\tilde{\varepsilon}_2), \quad \ldots, \quad \tilde{\sigma}_6 = f_6(\tilde{\varepsilon}_6),$$

где каждая функция f_p зависит от одной переменной (см., например, [20]).

Для гиперупругих материалов с симметричной матрицей $A = A'$ в предположении положительной определенности A матрицы T и F совпадают [19], т. е. ортогональные базисы в пространствах напряжений и деформаций оказываются одинаковыми: $t_{ip} = f_{ip}$, $i = \overline{1,6}$, $p = \overline{1,6}$. Однако положительная определенность матрицы A есть дополнительное предположение, которое в общем случае является недостаточно обоснованным [21]. Для обратимых определяющих соотношений (9) единственным условием для матрицы A является неравенство нулю определителя: $|A| \ne 0$. При этом представление (28) имеет место для симметричных и несимметричных матриц A. В частных случаях ортогональные матрицы T и F могут оказаться одинаковыми.

Из (28) последовательно находим

$$AF = T\Lambda, \quad F'A' = \Lambda T', \quad F'A'AF = \Lambda T'T\Lambda = \Lambda\Lambda = \Lambda^2, \quad A'AF = F\Lambda^2. \tag{32}$$

Последнее равенство (32) означает, что Λ^2 — диагональная матрица собственных значений, а F — ортогональная матрица собственных векторов симметричной и, очевидно, положительно определенной матрицы $(A'A)' = A'A$. При заданной матрице A из уравнений (32) определяем Λ^2 и F, а также $\Lambda = +\sqrt{\Lambda^2}$. За счет выбора положительного значения квадратного корня обеспечивается положительность всех собственных модулей $\lambda_i > 0$, $i = \overline{1,6}$ и тем самым положительность удельной энергии деформации. Получив Λ и F, находим ортогональную матрицу

$$T = AF\Lambda^{-1}, \quad T' = \Lambda^{-1}F'A', \quad T'T = \Lambda^{-1}F'A'AF\Lambda^{-1} = \Lambda^{-1}\Lambda\Lambda\Lambda^{-1} = E. \tag{33}$$

Таким образом, формулы (32), (33) являются решением задачи о представлении несимметричной (и симметричной, но не обязательно положительно определенной) матрицы A в виде (28).

Рассмотрим в качестве примеров матрицы (18), (19). Трансверсально-изотропная симметричная часть в (19) не является положительно определенной. С использованием формул [22] для собственных модулей трансверсально-изотропного материала в случае (19) получаем

$$\mu_1 = 2\alpha_3, \quad \mu_2 = -\alpha_3, \quad \mu_3 = \mu_6 = 2\alpha_1, \quad \mu_4 = \mu_5 = 2\alpha_3.$$

Очевидно, что модули $\mu_1 = \mu_4 = \mu_5 = 2\alpha_3$ и $\mu_2 = -\alpha_3$ не могут быть одновременно положительными, т. е. симметричная часть в (19) не является положительно определенной. Определитель матрицы (19) равен $|A_{ij}| = -32(\alpha_1^2 + \alpha_2^2)\alpha_3^4 < 0$ и не обращается в нуль, если $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 \ne 0$, $\alpha_3 \ne 0$.

Далее находим

$$A'A = A_{ij}A_{ik} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2(\alpha_1^2+\alpha_2^2)+\alpha_3^2 & -2(\alpha_1^2+\alpha_2^2)+\alpha_3^2 & -\alpha_3^2 & 0 & 0 & 0 \\ -2(\alpha_1^2+\alpha_2^2)+\alpha_3^2 & 2(\alpha_1^2+\alpha_2^2)+\alpha_3^2 & -\alpha_3^2 & 0 & 0 & 0 \\ -\alpha_3^2 & -\alpha_3^2 & 3\alpha_3^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4\alpha_3^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4\alpha_3^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4(\alpha_1^2+\alpha_2^2) \end{bmatrix}. \quad (34)$$

Матрица (34) имеет вид матрицы модулей симметричного (гиперупругого) трансверсально-изотропного материала. Собственные модули и векторы находим по формулам [22]

$$\lambda_1^2 = \alpha_3^2, \quad \lambda_2^2 = 4\alpha_3^2, \quad \lambda_3^2 = \lambda_6^2 = 4(\alpha_1^2+\alpha_2^2), \quad \lambda_4^2 = \lambda_5^2 = 4\alpha_3^2; \quad (35)$$

$$f_{ip} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (36)$$

где собственные векторы f_{ip} записаны не в общем виде. Из формул (35) получаем собственные модули Кельвина (30)

$$\lambda_1 = \alpha_3, \quad \lambda_2 = 2\alpha_3, \quad \lambda_3 = \lambda_6 = 2\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2}, \quad \lambda_4 = \lambda_5 = 2\alpha_3 \quad (37)$$

(с целью упрощения формул считаем $\alpha_3 > 0$, хотя можно было использовать $|\alpha_3|$) и далее по формуле (33) находим

$$T = AF\Lambda^{-1} = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & \alpha_1/\sqrt{2(\alpha_1^2+\alpha_2^2)} & 0 & 0 & \alpha_2/\sqrt{2(\alpha_1^2+\alpha_2^2)} \\ -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & -\alpha_1/\sqrt{2(\alpha_1^2+\alpha_2^2)} & 0 & 0 & -\alpha_2/\sqrt{2(\alpha_1^2+\alpha_2^2)} \\ -1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha_2/\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2} & 0 & 0 & \alpha_1/\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2} \end{bmatrix}. \quad (38)$$

С учетом (36)–(38) обобщенный закон Гука (9) в случае матрицы (19) записывается в виде (30)

$$-\frac{1}{\sqrt{3}}(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3) = \alpha_3\frac{1}{\sqrt{3}}(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3), \quad \frac{1}{\sqrt{6}}(\sigma_1+\sigma_2-2\sigma_3) = 2\alpha_3\frac{1}{\sqrt{6}}(\varepsilon_1+\varepsilon_2-2\varepsilon_3),$$

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2}}\Big(\frac{\alpha_1}{\sqrt{2}}(\sigma_1-\sigma_2)-\alpha_2\sigma_6\Big) = 2\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2}\,\frac{1}{\sqrt{2}}(\varepsilon_1-\varepsilon_2), \quad (39)$$

$$\sigma_4 = 2\alpha_3\varepsilon_4, \quad \sigma_5 = 2\alpha_3\varepsilon_5, \quad \frac{1}{\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2}}\Big(\frac{\alpha_2}{\sqrt{2}}(\sigma_1-\sigma_2)+\alpha_1\sigma_6\Big) = 2\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2}\,\varepsilon_6.$$

Определитель матрицы (18), равный $|A_{ij}| = 8(\lambda + \mu)(\mu^2 + \beta^2)$, не обращается в нуль, если $\lambda + \mu \neq 0$, $\mu^2 + \beta^2 \neq 0$. Далее находим

$$A'A = A_{ij}A_{ik} = \begin{bmatrix} (\lambda+2\mu)^2 + \lambda^2 + 2\beta^2 & 2\lambda(\lambda+2\mu) - 2\beta^2 & 0 \\ 2\lambda(\lambda+2\mu) - 2\beta^2 & (\lambda+2\mu)^2 + \lambda^2 + 2\beta^2 & 0 \\ 0 & 0 & 4(\mu^2+\beta^2) \end{bmatrix}.$$

Собственные значения и векторы этой матрицы следующие:

$$\lambda_1^2 = 4(\lambda+\mu)^2, \qquad \lambda_2^2 = \lambda_3^2 = 4(\mu^2+\beta^2), \qquad f_{ip} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad (40)$$

при этом собственные модули равны

$$\lambda_1 = 2(\lambda+\mu), \qquad \lambda_2 = \lambda_3 = 2\sqrt{\mu^2+\beta^2} \qquad (41)$$

(для упрощения формул считаем $\lambda + \mu > 0$, хотя можно было использовать $|\lambda + \mu|$). По формуле (33) находим

$$T = AF\Lambda^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}} & -\dfrac{\mu}{\sqrt{2(\mu^2+\beta^2)}} & \dfrac{\beta}{\sqrt{2(\mu^2+\beta^2)}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{\mu}{\sqrt{2(\mu^2+\beta^2)}} & -\dfrac{\beta}{\sqrt{2(\mu^2+\beta^2)}} \\ 0 & \dfrac{\beta}{\sqrt{\mu^2+\beta^2}} & \dfrac{\mu}{\sqrt{\mu^2+\beta^2}} \end{bmatrix}. \qquad (42)$$

С учетом (40)–(42) обобщенный закон Гука (9) в случае матрицы (18) записывается в виде (30)

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\,(\sigma_1+\sigma_2) = 2(\lambda+\mu)\,\frac{1}{\sqrt{2}}\,(\varepsilon_1+\varepsilon_2),$$

$$\frac{1}{\sqrt{\mu^2+\beta^2}}\Big(\frac{\mu}{\sqrt{2}}\,(\sigma_2-\sigma_1) + \beta\sigma_6\Big) = 2\sqrt{\mu^2+\beta^2}\,\frac{1}{\sqrt{2}}\,(\varepsilon_2-\varepsilon_1),$$

$$\frac{1}{\sqrt{\mu^2+\beta^2}}\Big(\frac{\beta}{\sqrt{2}}\,(\sigma_1-\sigma_2) + \mu\sigma_6\Big) = 2\sqrt{\mu^2+\beta^2}\,\varepsilon_6.$$

С учетом (13) запишем выражения для напряжений σ_i (9) в виде

$$\sigma_i = (C_{ij} + B_{ij})\varepsilon_j = C_{ij}\varepsilon_j + B_{ij}\varepsilon_j = \sigma_i^s + \sigma_i^{as}.$$

Далее находим удельную энергию деформации

$$2\Phi = \sigma_i\varepsilon_i = (\sigma_i^s + \sigma_i^{as})\varepsilon_i = \sigma_i^s\varepsilon_i + \sigma_i^{as}\varepsilon_i = \sigma_i^s\varepsilon_i = C_{ij}\varepsilon_i\varepsilon_j.$$

Здесь $\sigma_i^{as}\varepsilon_i = B_{ij}\varepsilon_i\varepsilon_j = 0$; σ_i^s — производная от Φ по ε_i: $\sigma_i^s = \partial\Phi/\partial\varepsilon_i = C_{ij}\varepsilon_j$, т. е. σ_i^s — потенциальная часть напряжений; $\sigma_i^{as} = B_{ij}\varepsilon_j$ — непотенциальная часть напряжений. Интеграл

$$\Phi^{as} = \int \sigma_i^{as}\,d\varepsilon_i = \int B_{ij}\varepsilon_j\,d\varepsilon_i$$

может зависеть от пути интегрирования [4]. Зависимость Φ^{as} от пути интегрирования на примере матрицы (18) показана в [23].

Обобщенный закон Гука (9) с несимметричной матрицей $A' \neq A$ можно записать с симметричной матрицей, если в шестимерном пространстве деформаций перейти от исходного базиса δ_{iq} к другому ортогональному базису. Пусть A представляется в виде (28)

$$A = T\Lambda F' = T\Lambda T'TF' = T\Lambda T'(FT')' = T\Lambda T'H',$$

где $H = FT'$ — ортогональная матрица, представляющая собой произведение двух ортогональных матриц. Тогда закон Гука записывается в виде

$$\sigma = T\Lambda T'H'\varepsilon = T\Lambda T'\varepsilon^*,$$

где $\varepsilon^* = H'\varepsilon$; $\varepsilon^*_q = h_{iq}\varepsilon_i$; $\varepsilon_i = h_{iq}\varepsilon^*_q$; h_{iq} — компоненты матрицы H. Матрица $S = T\Lambda T'$ является симметричной, т. е. зависимость $\sigma_i = S_{ij}\varepsilon^*_j$ есть закон Гука, если ε^*_j считать модифицированными деформациями, причем $\varepsilon_i\varepsilon_i = h_{ip}\varepsilon^*_p h_{iq}\varepsilon^*_q = \delta_{pq}\varepsilon^*_p\varepsilon^*_q = \varepsilon^*_p\varepsilon^*_p$. Таким образом, в шестимерном пространстве деформаций выполнен переход от ортогонального базиса f_{iq} (или от исходного базиса δ_{iq}) к ортогональному базису h_{iq}, $i = \overline{1,6}$, $q = \overline{1,6}$. Примем в качестве удельной энергии деформации $2\Phi = \sigma_i\varepsilon^*_i = S_{ij}\varepsilon^*_i\varepsilon^*_j$, тогда $\sigma_i = \partial\Phi/\partial\varepsilon^*_i = S_{ij}\varepsilon^*_j$ и интеграл

$$\Phi = \int \sigma_i \, d\varepsilon^*_i = \int S_{ij}\varepsilon^*_j \, d\varepsilon^*_i = \frac{1}{2}\int d(S_{ij}\varepsilon^*_i\varepsilon^*_j)$$

не зависит от пути интегрирования.

В случае матрицы (18) с учетом (40), (42) находим матрицу

$$H = FT' = \begin{bmatrix} \dfrac{\mu + \sqrt{\mu^2+\beta^2}}{2\sqrt{\mu^2+\beta^2}} & \dfrac{\sqrt{\mu^2+\beta^2} - \mu}{2\sqrt{\mu^2+\beta^2}} & \dfrac{-\beta}{\sqrt{2(\mu^2+\beta^2)}} \\ \dfrac{\sqrt{\mu^2+\beta^2} - \mu}{2\sqrt{\mu^2+\beta^2}} & \dfrac{\mu + \sqrt{\mu^2+\beta^2}}{2\sqrt{\mu^2+\beta^2}} & \dfrac{\beta}{\sqrt{2(\mu^2+\beta^2)}} \\ \dfrac{\beta}{\sqrt{2(\mu^2+\beta^2)}} & \dfrac{-\beta}{\sqrt{2(\mu^2+\beta^2)}} & \dfrac{\mu}{\sqrt{\mu^2+\beta^2}} \end{bmatrix},$$

при этом величины

$$\varepsilon^*_1 = \frac{\mu + \sqrt{\mu^2+\beta^2}}{2\sqrt{\mu^2+\beta^2}}\,\varepsilon_1 + \frac{\sqrt{\mu^2+\beta^2} - \mu}{2\sqrt{\mu^2+\beta^2}}\,\varepsilon_2 + \frac{\beta}{\sqrt{2(\mu^2+\beta^2)}}\,\varepsilon_6,$$

$$\varepsilon^*_2 = \frac{\sqrt{\mu^2+\beta^2} - \mu}{2\sqrt{\mu^2+\beta^2}}\,\varepsilon_1 + \frac{\mu + \sqrt{\mu^2+\beta^2}}{2\sqrt{\mu^2+\beta^2}}\,\varepsilon_2 - \frac{\beta}{\sqrt{2(\mu^2+\beta^2)}}\,\varepsilon_6,$$

$$\varepsilon^*_6 = \frac{-\beta}{\sqrt{2(\mu^2+\beta^2)}}\,\varepsilon_1 + \frac{\beta}{\sqrt{2(\mu^2+\beta^2)}}\,\varepsilon_2 + \frac{\mu}{\sqrt{\mu^2+\beta^2}}\,\varepsilon_6$$

являются модифицированными деформациями. Найдем также для (18) матрицу

$$S = T\Lambda T' = AH = \begin{bmatrix} \lambda + \mu + \sqrt{\mu^2+\beta^2} & \lambda + \mu - \sqrt{\mu^2+\beta^2} & 0 \\ \lambda + \mu - \sqrt{\mu^2+\beta^2} & \lambda + \mu + \sqrt{\mu^2+\beta^2} & 0 \\ 0 & 0 & 2\sqrt{\mu^2+\beta^2} \end{bmatrix},$$

для которой собственные модули и состояния (векторы) определяются формулами (41), (42). Отметим, что в [24, 25] также используется матрица вида (18).

Для матрицы (19) с учетом (36), (38) находим матрицу

$$H = FT' = \begin{bmatrix} \dfrac{3\alpha_1 - \sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2}}{6\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2}} & \dfrac{-(3\alpha_1 + \sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2})}{6\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2}} & -\dfrac{2}{3} & 0 & 0 & \dfrac{-\alpha_2}{\sqrt{2(\alpha_1^2+\alpha_2^2)}} \\ \dfrac{-(3\alpha_1 + \sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2})}{6\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2}} & \dfrac{3\alpha_1 - \sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2}}{6\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2}} & -\dfrac{2}{3} & 0 & 0 & \dfrac{\alpha_2}{\sqrt{2(\alpha_1^2+\alpha_2^2)}} \\ -\dfrac{2}{3} & -\dfrac{2}{3} & \dfrac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \dfrac{\alpha_2}{\sqrt{2(\alpha_1^2+\alpha_2^2)}} & \dfrac{-\alpha_2}{\sqrt{2(\alpha_1^2+\alpha_2^2)}} & 0 & 0 & 0 & \dfrac{\alpha_1}{\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2}} \end{bmatrix},$$

при этом выражения для деформаций $\varepsilon_q^* = h_{iq}\varepsilon_i$ имеют вид

$$\begin{gathered} \varepsilon_1^* = \frac{3\alpha_1 - \sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2}}{6\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2}}\,\varepsilon_1 - \frac{3\alpha_1 + \sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2}}{6\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2}}\,\varepsilon_2 - \frac{2}{3}\,\varepsilon_3 + \frac{\alpha_2}{\sqrt{2(\alpha_1^2+\alpha_2^2)}}\,\varepsilon_6, \\ \varepsilon_2^* = -\frac{3\alpha_1 + \sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2}}{6\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2}}\,\varepsilon_1 + \frac{3\alpha_1 - \sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2}}{6\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2}}\,\varepsilon_2 - \frac{2}{3}\,\varepsilon_3 - \frac{\alpha_2}{\sqrt{2(\alpha_1^2+\alpha_2^2)}}\,\varepsilon_6, \\ \varepsilon_3^* = -\frac{2}{3}\,\varepsilon_1 - \frac{2}{3}\,\varepsilon_2 + \frac{1}{3}\,\varepsilon_3, \qquad \varepsilon_4^* = \varepsilon_4, \qquad \varepsilon_5^* = \varepsilon_5, \\ \varepsilon_6^* = \frac{-\alpha_2}{\sqrt{2(\alpha_1^2+\alpha_2^2)}}\,\varepsilon_1 + \frac{\alpha_2}{\sqrt{2(\alpha_1^2+\alpha_2^2)}}\,\varepsilon_2 + \frac{\alpha_1}{\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2}}\,\varepsilon_6. \end{gathered} \tag{43}$$

Найдем также для (19) матрицу

$$S = T\Lambda T' = AH =$$

$$= \begin{bmatrix} \sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2} + 2\alpha_3/3 & -\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2} + 2\alpha_3/3 & -\alpha_3/3 & 0 & 0 & 0 \\ -\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2} + 2\alpha_3/3 & \sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2} + 2\alpha_3/3 & -\alpha_3/3 & 0 & 0 & 0 \\ -\alpha_3/3 & -\alpha_3/3 & 5\alpha_3/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\alpha_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\alpha_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2} \end{bmatrix},$$

которая соответствует матрице модулей трансверсально-изотропного гиперупругого материала, имеет все положительные собственные модули (37) и собственные состояния (векторы) (38). Закон Гука принимает вид

$$\sigma_i = S_{ij}\varepsilon_j^*, \tag{44}$$

где ε_j^* задаются формулами (43). Соотношения (44) записываются в виде, аналогичном (39):

$$
\begin{aligned}
&t_{i1}\sigma_i = \alpha_3 t_{j1}\varepsilon_j^*, \qquad t_{i2}\sigma_i = 2\alpha_3 t_{j2}\varepsilon_j^*, \qquad t_{i3}\sigma_i = 2\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2}\, t_{j3}\varepsilon_j^*,\\
&t_{i4}\sigma_i = 2\alpha_3 t_{j4}\varepsilon_j^*, \qquad t_{i5}\sigma_i = 2\alpha_3 t_{j5}\varepsilon_j^*, \qquad t_{i6}\sigma_i = 2\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2}\, t_{j6}\varepsilon_j^*.
\end{aligned}
\tag{45}
$$

Подставляя в (45) выражения (43), получаем формулы (39).

Найдем определитель матрицы (17) модулей упругости для случая трансверсальной изотропии:

$$|A_{ij}| = [(C_{11}+C_{21})C_{33} - 2(C_{31}^2 - B_{31}^2)][(C_{11}-C_{21})^2 + 2B_{61}^2](C_{44}^2 + B_{54}^2),$$

который не равен нулю, если каждое выражение в скобках не равно нулю:

$$(C_{11}+C_{21})C_{33} - 2(C_{31}^2 - B_{31}^2) \neq 0, \quad (C_{11}-C_{21})^2 + 2B_{61}^2 \neq 0, \quad C_{44}^2 + B_{54}^2 \neq 0.$$

Последние неравенства есть единственные ограничения на компоненты матрицы (17), при этом обеспечивается обратимость определяющих соотношений (9).

Можно допустить, что в (17) симметричная часть $C_{ij} = C_{ji} = 0$, тогда $|A_{ij}| = |B_{ij}| = 4B_{31}^2 B_{61}^2 B_{54}^2 \neq 0$, если $B_{31} \neq 0$, $B_{61} \neq 0$, $B_{54} \neq 0$. В этом случае закон Гука (9) принимает вид

$$
\begin{gathered}
\sigma_1 = -B_{31}\varepsilon_3 - B_{61}\varepsilon_6, \quad \sigma_2 = -B_{31}\varepsilon_3 + B_{61}\varepsilon_6, \quad \sigma_3 = B_{31}(\varepsilon_1+\varepsilon_2),\\
\sigma_4 = -B_{54}\varepsilon_5, \quad \sigma_5 = B_{54}\varepsilon_4, \quad \sigma_6 = B_{61}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2).
\end{gathered}
$$

Далее для (17) находим

$$
\begin{aligned}
&A'A = A_{ij}A_{ik} =\\
&= \begin{bmatrix}
A_{i1}A_{i1} & A_{i2}A_{i1} & A_{i3}A_{i1} & 0 & 0 & 0\\
A_{i2}A_{i1} & A_{i1}A_{i1} & A_{i3}A_{i1} & 0 & 0 & 0\\
A_{i3}A_{i1} & A_{i3}A_{i1} & 2(C_{31}-B_{31})^2 + C_{33}^2 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & C_{44}^2 + B_{54}^2 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & C_{44}^2 + B_{54}^2 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (C_{11}-C_{21})^2 + 2B_{61}^2
\end{bmatrix},
\end{aligned}
\tag{46}
$$

$$A_{i1}A_{i1} = C_{11}^2 + C_{21}^2 + (C_{31}+B_{31})^2 + B_{61}^2,$$

$$A_{i2}A_{i1} = 2C_{11}C_{21} + (C_{31}+B_{31})^2 - B_{61}^2, \quad A_{i3}A_{i1} = (C_{11}+C_{21}+C_{33})C_{31} - (C_{11}+C_{21}-C_{33})B_{31}.$$

Если $C_{ij} = 0$, то (46) принимает вид

$$A_{ij}A_{ik} = \begin{bmatrix}
B_{31}^2 + B_{61}^2 & B_{31}^2 - B_{61}^2 & 0 & 0 & 0 & 0\\
B_{31}^2 - B_{61}^2 & B_{31}^2 + B_{61}^2 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 2B_{31}^2 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & B_{54}^2 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & B_{54}^2 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2B_{61}^2
\end{bmatrix}.$$

Матрица (46) соответствует матрице модулей симметричного трансверсально-изотропного материала, для которого собственные модули и векторы (состояния) находятся по формулам [22]

$$
\begin{aligned}
\lambda_1^2 = \frac{1}{2}\Big(&(C_{11}+C_{21})^2 + 4(C_{31}^2 + B_{31}^2) + C_{33}^2 +\\
&+ \sqrt{[(C_{11}+C_{21}-C_{33})^2 + 8C_{31}^2][(C_{11}+C_{21}+C_{33})^2 + 8B_{31}^2]}\Big),
\end{aligned}
$$

$$\lambda_2^2 = \frac{1}{2}\Big((C_{11}+C_{21})^2 + 4(C_{31}^2 + B_{31}^2) + C_{33}^2 - \\ - \sqrt{[(C_{11}+C_{21}-C_{33})^2 + 8C_{31}^2][(C_{11}+C_{21}+C_{33})^2 + 8B_{31}^2]}\Big),$$

$$\lambda_3^2 = \lambda_6^2 = (C_{11}-C_{21})^2 + 2B_{61}^2, \qquad \lambda_4^2 = \lambda_5^2 = C_{44}^2 + B_{54}^2;$$

$$f_{ip} = \begin{bmatrix} c/\sqrt{2} & -s/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ c/\sqrt{2} & -s/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ s & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad c = \cos\alpha, \qquad s = \sin\alpha, \tag{47}$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\sqrt{2}\,[(C_{11}+C_{21}+C_{33})C_{31} - (C_{11}+C_{21}-C_{33})B_{31}]}{(C_{11}+C_{21}+C_{33})(C_{11}+C_{21}-C_{33}) + 8C_{31}B_{31}}.$$

Если $C_{ij} = 0$, то угол α в (47) остается произвольным. Далее с учетом (47) по формуле (33) находим

$$T = AF\Lambda^{-1} = \\ = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & (C_{11}-C_{21})/(\sqrt{2}\lambda_3) & 0 & 0 & -B_{61}/\lambda_3 \\ t_{11} & t_{12} & -(C_{11}-C_{21})/(\sqrt{2}\lambda_3) & 0 & 0 & B_{61}/\lambda_3 \\ t_{31} & t_{32} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44}/\lambda_4 & -B_{54}/\lambda_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B_{54}/\lambda_4 & C_{44}/\lambda_4 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2}B_{61}/\lambda_3 & 0 & 0 & (C_{11}-C_{21})/(\sqrt{2}\lambda_3) \end{bmatrix}, \tag{48}$$

$$t_{11} = \frac{1}{\lambda_1}\Big(\frac{1}{\sqrt{2}}\,(C_{11}+C_{21})c + (C_{31}-B_{31})s\Big), \qquad t_{12} = \frac{1}{\lambda_2}\Big(-\frac{1}{\sqrt{2}}\,(C_{11}+C_{21})s + (C_{31}-B_{31})c\Big),$$

$$t_{31} = \frac{1}{\lambda_1}\,\big[\sqrt{2}\,(C_{31}+B_{31})c + C_{33}s\big], \qquad t_{32} = \frac{1}{\lambda_2}\,\big[-\sqrt{2}\,(C_{31}+B_{31})s + C_{33}c\big].$$

Если $C_{ij} = 0$, то

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \sqrt{2}\,B_{31} > 0, \qquad \lambda_3 = \lambda_6 = \sqrt{2}B_{61} > 0, \qquad \lambda_4 = \lambda_5 = B_{54} > 0$$

и (48) принимает вид

$$T = \begin{bmatrix} -s/\sqrt{2} & -c/\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & -1/\sqrt{2} \\ -s/\sqrt{2} & -c/\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 1/\sqrt{2} \\ c & -s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{49}$$

Матрица H находится по формуле $H = FT'$, где F и T определяются формулами (47), (48). Запишем матрицу H для случая, когда матрица T имеет вид (49):

$$H = FT' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/\sqrt{2} & 0 & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{2} & 0 & 0 & -1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{50}$$

Найдем также матрицу

$$S = T\Lambda T' = AH =$$
$$= \begin{bmatrix} (B_{31}+B_{61})/\sqrt{2} & (B_{31}-B_{61})/\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (B_{31}-B_{61})/\sqrt{2} & (B_{31}+B_{61})/\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2}B_{31} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B_{54} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & B_{54} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2}B_{61} \end{bmatrix}. \quad (51)$$

С учетом (50) находим деформации $\varepsilon_q^* = h_{iq}\varepsilon_i$:

$$\begin{gathered} \varepsilon_1^* = -(\varepsilon_3+\varepsilon_6)/\sqrt{2}, \quad \varepsilon_2^* = -(\varepsilon_3-\varepsilon_6)/\sqrt{2}, \quad \varepsilon_3^* = (\varepsilon_1+\varepsilon_2)/\sqrt{2}, \\ \varepsilon_4^* = -\varepsilon_5, \qquad \varepsilon_5^* = \varepsilon_4, \qquad \varepsilon_6^* = (\varepsilon_1-\varepsilon_2)/\sqrt{2}. \end{gathered} \quad (52)$$

С учетом (51), (52) закон Гука принимает вид

$$\sigma_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(B_{31}+B_{61})\varepsilon_1^* + \frac{1}{\sqrt{2}}(B_{31}-B_{61})\varepsilon_2^*, \quad \sigma_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(B_{31}-B_{61})\varepsilon_1^* + \frac{1}{\sqrt{2}}(B_{31}+B_{61})\varepsilon_2^*,$$
$$\sigma_3 = \sqrt{2}B_{31}\varepsilon_3^*, \quad \sigma_4 = B_{54}\varepsilon_4^*, \quad \sigma_5 = B_{54}\varepsilon_5^*, \quad \sigma_6 = \sqrt{2}B_{61}\varepsilon_6^*,$$

или (аналогично формулам (45))

$$\begin{gathered} -\frac{1}{\sqrt{2}}s(\sigma_1+\sigma_2) + c\sigma_3 = \sqrt{2}\,B_{31}\Big(-\frac{1}{\sqrt{2}}s(\varepsilon_1^*+\varepsilon_2^*) + c\varepsilon_3^*\Big), \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}c(\sigma_1+\sigma_2) - s\sigma_3 = \sqrt{2}\,B_{31}\Big(-\frac{1}{\sqrt{2}}c(\varepsilon_1^*+\varepsilon_2^*) - s\varepsilon_3^*\Big), \\ \sigma_6 = \sqrt{2}\,B_{61}\varepsilon_6^*, \quad \sigma_5 = B_{54}\varepsilon_5^*, \quad -\sigma_4 = B_{54}(-\varepsilon_4^*), \quad \frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma_2-\sigma_1) = \sqrt{2}\,B_{61}\frac{1}{\sqrt{2}}(\varepsilon_2^*-\varepsilon_1^*), \end{gathered} \quad (53)$$

или (с учетом (47), (52)) вид формул (30):

$$\begin{gathered} -\frac{1}{\sqrt{2}}s(\sigma_1+\sigma_2) + c\sigma_3 = \sqrt{2}\,B_{31}\Big(\frac{1}{\sqrt{2}}c(\varepsilon_1+\varepsilon_2) + s\varepsilon_3\Big), \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}c(\sigma_1+\sigma_2) - s\sigma_3 = \sqrt{2}\,B_{31}\Big(-\frac{1}{\sqrt{2}}s(\varepsilon_1+\varepsilon_2) + c\varepsilon_3\Big), \\ \sigma_6 = \sqrt{2}\,B_{61}\frac{1}{\sqrt{2}}(\varepsilon_1-\varepsilon_2), \quad \sigma_5 = B_{54}\varepsilon_4, \quad -\sigma_4 = B_{54}\varepsilon_5, \quad \frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma_2-\sigma_1) = \sqrt{2}\,B_{61}\varepsilon_6. \end{gathered} \quad (54)$$

Выражение для удельной энергии деформации записывается в виде

$$\begin{gathered} 2\Phi = \sigma_i\varepsilon_i^* = S_{ij}\varepsilon_i^*\varepsilon_j^* = t_{ip}\lambda_{pq}t_{jq}\varepsilon_i^*\varepsilon_j^* = \lambda_{pq}(t_{ip}\varepsilon_i^*)(t_{jq}\varepsilon_j^*) = \\ = \lambda_1(t_{i1}\varepsilon_i^*)^2 + \lambda_2(t_{i2}\varepsilon_i^*)^2 + \lambda_3(t_{i3}\varepsilon_i^*)^2 + \lambda_4(t_{i4}\varepsilon_i^*)^2 + \lambda_5(t_{i5}\varepsilon_i^*)^2 + \lambda_6(t_{i6}\varepsilon_i^*)^2 = \\ = \frac{1}{\lambda_1}(t_{i1}\sigma_i)^2 + \frac{1}{\lambda_2}(t_{i2}\sigma_i)^2 + \frac{1}{\lambda_3}(t_{i3}\sigma_i)^2 + \frac{1}{\lambda_4}(t_{i4}\sigma_i)^2 + \frac{1}{\lambda_5}(t_{i5}\sigma_i)^2 + \frac{1}{\lambda_6}(t_{i6}\sigma_i)^2 = \\ = \lambda_{pq}(t_{ip}h_{ki}\varepsilon_k)(t_{jq}h_{lj}\varepsilon_l) = \lambda_{pq}(f_{kp}\varepsilon_k)(f_{lq}\varepsilon_l) = \\ = \lambda_1(f_{k1}\varepsilon_k)^2 + \lambda_2(f_{k2}\varepsilon_k)^2 + \lambda_3(f_{k3}\varepsilon_k)^2 + \lambda_4(f_{k4}\varepsilon_k)^2 + \lambda_5(f_{k5}\varepsilon_k)^2 + \lambda_6(f_{k6}\varepsilon_k)^2. \end{gathered} \quad (55)$$

Очевидно, что удельная энергия деформации всегда положительна: $2\Phi > 0$, если $\lambda_i > 0$, $i = \overline{1,6}$.

С учетом (53), (54) формула (55) принимает вид

$$2\Phi = \sqrt{2}\,B_{31}\Big(-\frac{1}{\sqrt{2}}\,s(\varepsilon_1^* + \varepsilon_2^*) + c\varepsilon_3^*\Big)^2 + \sqrt{2}\,B_{31}\Big(-\frac{1}{\sqrt{2}}\,c(\varepsilon_1^* + \varepsilon_2^*) - s\varepsilon_3^*\Big)^2 +$$

$$+ \sqrt{2}\,B_{61}(\varepsilon_6^*)^2 + B_{54}(\varepsilon_5^*)^2 + B_{54}(-\varepsilon_4^*)^2 + \sqrt{2}\,B_{61}\Big(\frac{1}{\sqrt{2}}\,(\varepsilon_2^* - \varepsilon_1^*)\Big)^2 =$$

$$= \sqrt{2}\,B_{31}\Big(\frac{1}{\sqrt{2}}\,c(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + s\varepsilon_3\Big)^2 + \sqrt{2}\,B_{31}\Big(-\frac{1}{\sqrt{2}}\,s(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + c\varepsilon_3\Big)^2 +$$

$$+ \sqrt{2}\,B_{61}\Big(\frac{1}{\sqrt{2}}\,(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)\Big)^2 + B_{54}\varepsilon_4^2 + B_{54}\varepsilon_5^2 + \sqrt{2}\,B_{61}\varepsilon_6^2 =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}\,B_{31}}\Big(-\frac{1}{\sqrt{2}}\,s(\sigma_1 + \sigma_2) + c\sigma_3\Big)^2 + \frac{1}{\sqrt{2}\,B_{31}}\Big(-\frac{1}{\sqrt{2}}\,c(\sigma_1 + \sigma_2) - s\sigma_3\Big)^2 +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{2}\,B_{61}}\,\sigma_6^2 + \frac{1}{B_{54}}\,\sigma_5^2 + \frac{1}{B_{54}}\,(-\sigma_4)^2 + \frac{1}{\sqrt{2}\,B_{61}}\Big(\frac{1}{\sqrt{2}}\,(\sigma_2 - \sigma_1)\Big)^2. \qquad (56)$$

Из (56) находим

$$\begin{gathered}
\varepsilon_1^* = \frac{\partial\Phi}{\partial\sigma_1} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\Big(\frac{1}{B_{31}} + \frac{1}{B_{61}}\Big)\sigma_1 + \frac{1}{2\sqrt{2}}\Big(\frac{1}{B_{31}} - \frac{1}{B_{61}}\Big)\sigma_2,\\
\varepsilon_2^* = \frac{\partial\Phi}{\partial\sigma_2} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\Big(\frac{1}{B_{31}} - \frac{1}{B_{61}}\Big)\sigma_1 + \frac{1}{2\sqrt{2}}\Big(\frac{1}{B_{31}} + \frac{1}{B_{61}}\Big)\sigma_2,\\
\varepsilon_3^* = \frac{\partial\Phi}{\partial\sigma_3} = \frac{1}{\sqrt{2}B_{31}}\,\sigma_3, \qquad \varepsilon_4^* = \frac{\partial\Phi}{\partial\sigma_4} = \frac{1}{B_{54}}\,\sigma_4,\\
\varepsilon_5^* = \frac{\partial\Phi}{\partial\sigma_5} = \frac{1}{B_{54}}\,\sigma_5, \qquad \varepsilon_6^* = \frac{\partial\Phi}{\partial\sigma_6} = \frac{1}{\sqrt{2}\,B_{61}}\,\sigma_6,
\end{gathered} \qquad (57)$$

т. е. матрица, обратная матрице (51), имеет вид

$$S^{-1} = \begin{bmatrix}
\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\Big(\dfrac{1}{B_{31}} + \dfrac{1}{B_{61}}\Big) & \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\Big(\dfrac{1}{B_{31}} - \dfrac{1}{B_{61}}\Big) & 0 & 0 & 0 & 0\\
\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\Big(\dfrac{1}{B_{31}} - \dfrac{1}{B_{61}}\Big) & \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\Big(\dfrac{1}{B_{31}} + \dfrac{1}{B_{61}}\Big) & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 1/(\sqrt{2}\,B_{31}) & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 1/B_{54} & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1/B_{54} & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/(\sqrt{2}\,B_{61})
\end{bmatrix}.$$

С учетом (50), (57) находим деформации $\varepsilon_i = h_{iq}\varepsilon_q^*$:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(\varepsilon_3^* + \varepsilon_6^*) = \frac{1}{2B_{31}}\,\sigma_3 + \frac{1}{2B_{61}}\,\sigma_6, \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(\varepsilon_3^* - \varepsilon_6^*) = \frac{1}{2B_{31}}\,\sigma_3 - \frac{1}{2B_{61}}\,\sigma_6,$$

$$\varepsilon_3 = -\frac{1}{\sqrt{2}}\,(\varepsilon_1^* + \varepsilon_2^*) = -\frac{1}{2B_{31}}\,\sigma_1 - \frac{1}{2B_{31}}\,\sigma_2, \quad \varepsilon_4 = \varepsilon_5^* = \frac{1}{B_{54}}\,\sigma_5,$$

$$\varepsilon_5 = -\varepsilon_4^* = -\frac{1}{B_{54}}\,\sigma_4, \quad \varepsilon_6 = -\frac{1}{\sqrt{2}}\,(\varepsilon_1^* - \varepsilon_2^*) = -\frac{1}{2B_{61}}\,\sigma_1 + \frac{1}{2B_{61}}\,\sigma_2.$$

Таким образом, матрица, обратная матрице (17) (при $C_{ij} = 0$), имеет вид

$$B_{ij}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/(2B_{31}) & 0 & 0 & 1/(2B_{61}) \\ 0 & 0 & 1/(2B_{31}) & 0 & 0 & -1/(2B_{61}) \\ -1/(2B_{31}) & -1/(2B_{31}) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/B_{54} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/B_{54} & 0 & 0 \\ -1/(2B_{61}) & 1/(2B_{61}) & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Симметричная часть может быть нулевой ($C_{ij} = 0$) и для матриц других сингоний, например в случае тригональной сингонии с матрицей модулей упругости (27). При этом $|A_{ij}| = |B_{ij}| = 8B_{31}^2 B_{41}^2 \neq 0$, если $B_{31} \neq 0$, $B_{41} \neq 0$, т. е. кососимметричная матрица B_{ij} (27) может быть матрицей модулей упругости в законе Гука (9).

Выше приведены формулы для тензора модулей упругости $A_{ijkl} = C_{ijkl} + B_{ijkl}$ или матрицы $A_{ij} = C_{ij} + B_{ij}$. Однако такие же формулы имеют место для несимметричного тензора коэффициентов податливости

$$a_{ijkl} = c_{ijkl} + b_{ijkl} \tag{58}$$

или матрицы $a_{ij} = c_{ij} + b_{ij}$. Матрицы A_{ij}, a_{ij} взаимно обратные, т. е. их определители не равны нулю, а $c_{ij} = c_{ji}$, $b_{ji} = -b_{ij}$. С использованием (58) запишем выражения для технических постоянных упругости [19].

Выражение для объемного модуля K представим в виде

$$1/K = \delta_{ij} a_{ijkl} \delta_{kl} = \delta_i c_{ik} \delta_k + \delta_i b_{ik} \delta_k = \delta_i c_{ik} \delta_k = c_{11} + c_{22} + c_{33} + 2(c_{32} + c_{31} + c_{21}).$$

Из этой формулы следует, что кососимметричная часть b_{ik} не оказывает непосредственное влияние на объемный модуль K, но матрица c_{ij} не должна быть положительно определенной, поэтому $1/K$ может принимать любые значения, не обязательно положительные.

Пусть n_i, m_i, $i = 1, 2, 3$ — два ортогональных единичных направления. Модуль Юнга E_n в направлении n_i определяется в виде

$$1/E_n = n_i n_j a_{ijkl} n_k n_l = n_i n_j c_{ijkl} n_k n_l + n_i n_j b_{ijkl} n_k n_l = n_i n_j c_{ijkl} n_k n_l. \tag{59}$$

Отсюда следует, что и на модуль Юнга E_n кососимметричная часть b_{ik} не оказывает непосредственное влияние, но матрица c_{ij} не должна быть положительно определенной, поэтому $1/E_n$ может принимать любые значения.

Модуль сдвига $G_{nm} = G_{mn}$ между площадками с нормалями n_i и m_i равен

$$1/(4G_{nm}) = n_i m_j a_{ijkl} n_k m_l = n_i m_j c_{ijkl} n_k m_l + n_i m_j b_{ijkl} n_k m_l = n_i m_j c_{ijkl} n_k m_l, \tag{60}$$

т. е. он также не зависит непосредственно от b_{ik}, но, поскольку c_{ik} необязательно является положительно определенной матрицей, $1/(4G_{nm})$ может принимать любые значения, не обязательно положительные.

Коэффициент Пуассона ν_{mn} в направлении m_i при растяжении образца в направлении n_i равен

$$\nu_{mn}/E_n = m_i m_j a_{ijkl} n_k n_l = m_i m_j c_{ijkl} n_k n_l + m_i m_j b_{ijkl} n_k n_l. \tag{61}$$

Таким образом, кососимметричная часть b_{ik} (b_{ijkl}) влияет только на коэффициенты Пуассона ν_{mn}, коэффициенты Ченцова и коэффициенты взаимного влияния [26, 27], так как (59)–(61) являются иной записью формул для компонент $\hat{a}_{pqrs}$. При проецировании на ортогональный базис $n_{ip} n_{iq} = \delta_{pq}$ и $n_{ijpq} = (n_{ip} n_{jq} + n_{iq} n_{jp})/2$ (см. (6), (7)) имеем

$$\begin{gathered} a_{ijkl} = n_{ip} n_{jq} \hat{a}_{pqrs} n_{kr} n_{ls}, \\ \hat{a}_{pqrs} = n_{ip} n_{jq} a_{ijkl} n_{kr} n_{ls} = n_{ip} n_{jq} c_{ijkl} n_{kr} n_{ls} + n_{ip} n_{jq} b_{ijkl} n_{kr} n_{ls} = \hat{c}_{pqrs} + \hat{b}_{pqrs}. \end{gathered} \tag{62}$$

Из (62) находим

$$\hat a_{1111} = n_{i1}n_{j1}c_{ijkl}n_{k1}n_{l1} = \hat c_{1111} = 1/E_1,$$

$$\hat a_{2211} = n_{i2}n_{j2}c_{ijkl}n_{k1}n_{l1} + n_{i2}n_{j2}b_{ijkl}n_{k1}n_{l1} = \hat c_{2211} + \hat b_{2211} = \nu_{21}/E_1,$$

$$\hat a_{1122} = n_{i1}n_{j1}c_{ijkl}n_{k2}n_{l2} + n_{i1}n_{j1}b_{ijkl}n_{k2}n_{l2} = \hat c_{1122} + \hat b_{1122} = \hat c_{2211} - \hat b_{2211} = \nu_{12}/E_2, \quad \ldots,$$

$$\hat a_{2323} = n_{i2}n_{j3}c_{ijkl}n_{k2}n_{l3} = \hat c_{2323} = 1/(4G_{23}), \quad \ldots,$$

остальные компоненты записываются аналогично.

Итак, с использованием обозначений, принятых в [26], получаем

$$a_{ik} = c_{ik} + b_{ik} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{21}-b_{21} & c_{31}-b_{31} & c_{41}-b_{41} & c_{51}-b_{51} & c_{61}-b_{61} \\ c_{21}+b_{21} & c_{22} & c_{32}-b_{32} & c_{42}-b_{42} & c_{52}-b_{52} & c_{62}-b_{62} \\ c_{31}+b_{31} & c_{32}+b_{32} & c_{33} & c_{43}-b_{43} & c_{53}-b_{53} & c_{63}-b_{63} \\ c_{41}+b_{41} & c_{42}+b_{42} & c_{43}+b_{43} & c_{44} & c_{54}-b_{54} & c_{64}-b_{64} \\ c_{51}+b_{51} & c_{52}+b_{52} & c_{53}+b_{53} & c_{54}+b_{54} & c_{55} & c_{65}-b_{65} \\ c_{61}+b_{61} & c_{62}+b_{62} & c_{63}+b_{63} & c_{64}+b_{64} & c_{65}+b_{65} & c_{66} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1/E_1 & \nu_{12}/E_2 & \nu_{13}/E_3 & \nu_{14}/(2G_{23}) & \nu_{15}/(2G_{13}) & \nu_{16}/(2G_{12}) \\ \nu_{21}/E_1 & 1/E_2 & \nu_{23}/E_3 & \nu_{24}/(2G_{23}) & \nu_{25}/(2G_{13}) & \nu_{26}/(2G_{12}) \\ \nu_{31}/E_1 & \nu_{32}/E_2 & 1/E_3 & \nu_{34}/(2G_{23}) & \nu_{35}/(2G_{13}) & \nu_{36}/(2G_{12}) \\ \nu_{41}/E_1 & \nu_{42}/E_2 & \nu_{43}/E_3 & 1/(2G_{23}) & \nu_{45}/(2G_{13}) & \nu_{46}/(2G_{12}) \\ \nu_{51}/E_1 & \nu_{52}/E_2 & \nu_{53}/E_3 & \nu_{54}/(2G_{23}) & 1/(2G_{13}) & \nu_{56}/(2G_{12}) \\ \nu_{61}/E_1 & \nu_{62}/E_2 & \nu_{63}/E_3 & \nu_{64}/(2G_{23}) & \nu_{65}/(2G_{13}) & 1/(2G_{12}) \end{bmatrix} \qquad (63)$$

(знак “ˆ” опущен). Из результатов сравнения матриц в (63) следует

$$\begin{aligned}
&c_{11} = \frac{1}{E_1},\\
&2c_{21} = \frac{\nu_{21}}{E_1} + \frac{\nu_{12}}{E_2}, \quad 2b_{21} = \frac{\nu_{21}}{E_1} - \frac{\nu_{12}}{E_2}, \quad c_{22} = \frac{1}{E_2},\\
&2c_{31} = \frac{\nu_{31}}{E_1} + \frac{\nu_{13}}{E_3}, \quad 2b_{31} = \frac{\nu_{31}}{E_1} - \frac{\nu_{13}}{E_3}, \quad 2c_{32} = \frac{\nu_{32}}{E_2} + \frac{\nu_{23}}{E_3}, \quad 2b_{32} = \frac{\nu_{32}}{E_2} - \frac{\nu_{23}}{E_3},\\
&2c_{41} = \frac{\nu_{41}}{E_1} + \frac{\nu_{14}}{2G_{23}}, \quad 2b_{41} = \frac{\nu_{41}}{E_1} - \frac{\nu_{14}}{2G_{23}}, \quad 2c_{42} = \frac{\nu_{42}}{E_2} + \frac{\nu_{24}}{2G_{23}}, \quad 2b_{42} = \frac{\nu_{42}}{E_2} - \frac{\nu_{24}}{2G_{23}},\\
&2c_{51} = \frac{\nu_{51}}{E_1} + \frac{\nu_{15}}{2G_{13}}, \quad 2b_{51} = \frac{\nu_{51}}{E_1} - \frac{\nu_{15}}{2G_{13}}, \quad 2c_{52} = \frac{\nu_{52}}{E_2} + \frac{\nu_{25}}{2G_{13}}, \quad 2b_{52} = \frac{\nu_{52}}{E_2} - \frac{\nu_{25}}{2G_{13}},\\
&2c_{61} = \frac{\nu_{61}}{E_1} + \frac{\nu_{16}}{2G_{12}}, \quad 2b_{61} = \frac{\nu_{61}}{E_1} - \frac{\nu_{16}}{2G_{12}}, \quad 2c_{62} = \frac{\nu_{62}}{E_2} + \frac{\nu_{26}}{2G_{12}}, \quad 2b_{62} = \frac{\nu_{62}}{E_2} - \frac{\nu_{26}}{2G_{12}},\\
&c_{33} = \frac{1}{E_3},\\
&2c_{43} = \frac{\nu_{43}}{E_3} + \frac{\nu_{34}}{2G_{23}}, \quad 2b_{43} = \frac{\nu_{43}}{E_3} - \frac{\nu_{34}}{2G_{23}}, \quad c_{44} = \frac{1}{2G_{23}}, \qquad (64)\\
&2c_{53} = \frac{\nu_{53}}{E_3} + \frac{\nu_{35}}{2G_{13}}, \quad 2b_{53} = \frac{\nu_{53}}{E_3} - \frac{\nu_{35}}{2G_{13}}, \quad 2c_{54} = \frac{\nu_{54}}{2G_{23}} + \frac{\nu_{45}}{2G_{13}}, \quad 2b_{54} = \frac{\nu_{54}}{2G_{23}} - \frac{\nu_{45}}{2G_{13}},\\
&2c_{63} = \frac{\nu_{63}}{E_3} + \frac{\nu_{36}}{2G_{12}}, \quad 2b_{63} = \frac{\nu_{63}}{E_3} - \frac{\nu_{36}}{2G_{12}}, \quad 2c_{64} = \frac{\nu_{64}}{2G_{23}} + \frac{\nu_{46}}{2G_{12}}, \quad 2b_{64} = \frac{\nu_{64}}{2G_{23}} - \frac{\nu_{46}}{2G_{12}},
\end{aligned}$$

$$c_{55} = \frac{1}{2G_{13}},$$

$$2c_{65} = \frac{\nu_{65}}{2G_{13}} + \frac{\nu_{56}}{2G_{12}}, \quad 2b_{65} = \frac{\nu_{65}}{2G_{23}} - \frac{\nu_{56}}{2G_{12}}, \quad c_{66} = \frac{1}{2G_{12}}.$$

Соотношения (64) могут быть использованы для нахождения постоянных $c_{ij} = c_{ji}$, $b_{ij} = -b_{ji}$ упругих по Коши материалов, если экспериментально можно определить технические постоянные в правых частях (63), (64). Часть соотношений (64), в которые входят коэффициенты Пуассона, приведены в [28], там же представлены некоторые формулы для технических постоянных.

Для случая трансверсальной изотропии с матрицей коэффициентов податливости вида (17) из (64) получаем

$$\begin{array}{lll}
c_{11} = \dfrac{1}{E_1} = \dfrac{1}{E_2}, & & \\[2ex]
c_{21} = \dfrac{\nu_{21}}{E_1}, & 0 = \dfrac{\nu_{21}}{E_1} - \dfrac{\nu_{12}}{E_2}, & c_{22} = c_{11}, \\[2ex]
2c_{31} = \dfrac{\nu_{31}}{E_1} + \dfrac{\nu_{13}}{E_3}, & 2b_{31} = \dfrac{\nu_{31}}{E_1} - \dfrac{\nu_{13}}{E_3}, & c_{32} = c_{31}, \quad b_{32} = b_{31}, \\[2ex]
0 = \dfrac{\nu_{61}}{E_1} + \dfrac{\nu_{16}}{2G_{12}}, & b_{61} = \dfrac{\nu_{61}}{E_1}, & b_{62} = -b_{61}, \\[2ex]
c_{33} = \dfrac{1}{E_3}, & c_{44} = \dfrac{1}{2G_{23}} = \dfrac{1}{2G_{13}}, & c_{55} = c_{44}, \\[2ex]
0 = \dfrac{\nu_{54}}{2G_{23}} + \dfrac{\nu_{45}}{2G_{13}}, & b_{54} = \dfrac{\nu_{54}}{2G_{23}}, & c_{66} = c_{11} - c_{21} = \dfrac{1}{2G_{12}}.
\end{array}$$

Аналогичные соотношения можно записать для матриц коэффициентов податливости других сингоний, рассмотренных выше.

Рассмотрим ортотропный материал или материал ромбической сингонии с матрицей коэффициентов податливости вида (22а), (63). Если в направлениях осей 1, 2, 3 приложены напряжения σ_1, σ_2, σ_3, то с учетом (63) получаем деформации

$$\begin{aligned}
&\varepsilon_{1(1)} = \frac{1}{E_1}\sigma_1, \quad \varepsilon_{1(2)} = \frac{\nu_{12}}{E_2}\sigma_2, \quad \varepsilon_{1(3)} = \frac{\nu_{13}}{E_3}\sigma_3, \\
&\varepsilon_{2(1)} = \frac{\nu_{21}}{E_1}\sigma_1, \quad \varepsilon_{2(2)} = \frac{1}{E_2}\sigma_2, \quad \varepsilon_{2(3)} = \frac{\nu_{23}}{E_3}\sigma_3, \\
&\varepsilon_{3(1)} = \frac{\nu_{31}}{E_1}\sigma_1, \quad \varepsilon_{3(2)} = \frac{\nu_{32}}{E_2}\sigma_2, \quad \varepsilon_{3(3)} = \frac{1}{E_3}\sigma_3.
\end{aligned} \tag{65}$$

Из (65) находим

$$\begin{aligned}
&\nu_{21} = \frac{\varepsilon_{2(1)}}{\varepsilon_{1(1)}}, \quad \nu_{12} = \frac{\varepsilon_{1(2)}}{\varepsilon_{2(2)}}, \quad \nu_{13} = \frac{\varepsilon_{1(3)}}{\varepsilon_{3(3)}}, \\
&\nu_{31} = \frac{\varepsilon_{3(1)}}{\varepsilon_{1(1)}}, \quad \nu_{32} = \frac{\varepsilon_{3(2)}}{\varepsilon_{2(2)}}, \quad \nu_{23} = \frac{\varepsilon_{2(3)}}{\varepsilon_{3(3)}}.
\end{aligned} \tag{66}$$

Экспериментально нужно найти деформации $\varepsilon_{i(j)}$ (65), соответствующие напряжениям σ_j, $j = 1, 2, 3$. По измеренным деформациям $\varepsilon_{1(1)}$, $\varepsilon_{2(2)}$, $\varepsilon_{3(3)}$ и заданным σ_1, σ_2, σ_3 определяются модули Юнга E_1, E_2, E_3. Затем по формулам (66) находятся коэффициенты Пуассона и по соотношениям (64) вычисляются коэффициенты b_{21}, b_{31}, b_{32}. Подтверждением несимметричности матрицы вида (22а) в законе Гука в случае ортотропии является неравенство нулю (с учетом погрешности эксперимента) этих коэффициентов. Аналогичные действия следует выполнить в общем случае анизотропии, при этом в экспериментах необходимо создать напряжения $\sigma_4 = \sqrt{2}\,\sigma_{23}$, $\sigma_5 = \sqrt{2}\,\sigma_{13}$, $\sigma_6 = \sqrt{2}\,\sigma_{12}$ и измерить соответствующие деформации.

До сих пор эксперименты проводились в предположении симметрии матриц A_{ij} или a_{ij} в законе Гука (9), но, чтобы выявить (или создать) линейно-упругие материалы с несимметричными характеристиками упругости $A_{ij} \neq A_{ji}$ или $a_{ij} \neq a_{ji}$, требуется провести дополнительные эксперименты. Также при изучении отличий деформирования упругих по Коши материалов от деформирования гиперупругих материалов необходимо решать конкретные задачи. Однако, как следует из результатов данной работы, и те и другие материалы являются упругими, поэтому отсутствует необходимость различать гиперупругие и упругие по Коши материалы. Достаточно, чтобы матрица A_{ij} была невырожденной. Тогда с использованием ортогональных базисов t_{ip}, f_{ip} и h_{ip}, зависящих от характеристик конкретного материала, а не от внешней координатной системы (6), (7), (11), линейные уравнения (9) записываются в виде шести инвариантных равенств (30), где $\lambda_i > 0$, $i = \overline{1,6}$ и удельная энергия деформации (55) положительна. При этом технические постоянные, как показано выше, могут принимать любые значения, что позволяет создавать новые композитные материалы. Таким образом, в работе полностью охарактеризованы линейно-упругие материалы, свойства которых в общем случае определяются произвольной невырожденной шестимерной матрицей модулей упругости или коэффициентов податливости.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Прагер В.** Введение в механику сплошных сред. М.: Изд-во иностр. лит., 1963.
2. **Работнов Ю. Н.** Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1979.
3. **Лурье А. И.** Теория упругости. М.: Наука, 1970.
4. **Черных К. Ф.** Введение в анизотропную упругость. М.: Наука, 1988.
5. **Работнов Ю. Н.** Элементы наследственной механики твердых тел. М.: Наука, 1977.
6. **Rogers T. G., Pipkin A. C.** Asymmetric relaxation and compliance matrices in linear viscoelasticity // Z. angew. Math. Phys. 1963. Bd 14, H. 4. S. 334–343.
7. **Желудев И. С.** Симметрия и ее приложения. М.: Атомиздат, 1976.
8. **Бехтерев П.** Аналитическое исследование обобщенного закона Гука. Применение метода преобразования координат // Журн. Рус. физ.-хим. о-ва при Ленингр. ун-те. Ч. физ. 1926. Т. 58, вып. 3. С. 415–446.
9. **Остросаблин Н. И.** Об аффинных преобразованиях уравнений линейной теории упругости // ПМТФ. 2006. Т. 47, № 4. С. 124–134.
10. **Федоров Ф. И.** Теория упругих волн в кристаллах. М.: Наука, 1965.
11. **Rathkjen A.** Symmetry relations for anisotropic materials // Colloq. Intern. CNRC. 1982. N 295. P. 47–63.
12. **Huo Yong-Zhong, Del Piero G.** On the completeness of the crystallographic symmetries in the description of symmetries of the elastic tensor // J. Elasticity. 1991. V. 25, N 3. P. 203–246.
13. **Андреев В. К.** Симметрии неклассических моделей гидродинамики / В. К. Андреев, В. В. Бублик, В. О. Бытев. Новосибирск: Наука. Сиб. издат. фирма, 2003.
14. **Podio-Guidugli P., Virga E. G.** Transversely isotropic elasticity tensors // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1987. V. 411, N 1840. P. 85–93.

15. **Бытев В. О., Слезко И. В.** Решение задач асимметричной упругости // Вестн. Сам. гос. ун-та. Естественно-науч. сер. 2008. № 6. С. 238–243.
16. **Слезко И. В.** Моделирование некоторых процессов асимметричной упругости: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. Тюмень: Тюм. гос. ун-т, 2009.
17. **Geymonat G., Gilormini P.** On the existence of longitudinal plane waves in general elastic anisotropic media // J. Elasticity. 1999. V. 54, N 3. P. 253–266.
18. **Годунов С. К.** Элементы механики сплошной среды. М.: Наука, 1978.
19. **Аннин Б. Д., Остросаблин Н. И.** Анизотропия упругих свойств материалов // ПМТФ. 2008. Т. 49, № 6. С. 131–151.
20. **Остросаблин Н. И.** О функциональной связи двух симметричных тензоров второго ранга // ПМТФ. 2007. Т. 48, № 5. С. 134–137.
21. **Трусдел К.** Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. М.: Мир, 1975.
22. **Остросаблин Н. И.** Собственные модули упругости и состояния для материалов кристаллографических сингоний // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 1986. Вып. 75. С. 113–125.
23. **Дорофеев С. М.** О законе сохранения энергии в асимметричной теории упругости // Вестн. Тюм. гос. ун-та. 2009. № 6. С. 167–169.
24. **Бытев В. О., Шкутин Л. И.** Асимметричная упругость // Сб. ст. 15-й Зимней школы по механике сплошных сред, Пермь, 26 февр. — 3 марта 2007 г. Пермь: Ин-т механики сплошных сред УрО РАН, 2007. Ч. 1. С. 166–169.
25. **Бельмецев Н. Ф.** Групповое расслоение уравнений двумерной асимметричной упругости // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / РАН. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 2012. Вып. 127. С. 19–21.
26. **Остросаблин Н. И.** Об инвариантах тензора четвертого ранга модулей упругости // Сиб. журн. индустр. математики. 1998. Т. 1, № 1. С. 155–163.
27. **Лехницкий С. Г.** Теория упругости анизотропного тела. М.: Наука, 1977.
28. **Hayes M.** Connexions between the moduli for anisotropic elastic materials // J. Elasticity. 1972. V. 2, N 2. P. 135–141.

Поступила в редакцию 19/V 2016 г.