П М Т Ф, Т. 34, № 5, 1 9 9 3

УДК 533.951:534.222.2

В. А. Павлов, И. Р. Смирновский

О СТРУКТУРЕ ИОННО-ЗВУКОВОЙ ВОЛНЫ ПРИ ТОЧЕЧНОМ ВЗРЫВЕ

Имеются различные причины появления ионизированных областей перед ударной волной (УВ) [1—5]. Известно [6], что при распространении УВ в плазме перед ее фронтом из-за электронной теплопроводности возникает прогревный слой с характерным пространственным масштабом $\Delta_T \approx [m_i/m_e]^{1/2} l$, в котором $T_e > T_i$ (индексы i и e относятся к ионам и электронам (предполагается наличие ионов только одного сорта), m — масса, T — температура, l — длина свободного пробега ионов). Сразу за фронтом волны происходит резкое увеличение ионной температуры при почти неизменной электронной, затем в релаксационной области температуры T_e и T_i медленно выравниваются. В принципе аналогичным образом ведут себя температуры и при распространении УВ в первоначально неизотермической плазме [7]. Перед ударными фронтами возникает эффект предшествующих явлений. В [8] рассматривается механизм, объясняющий увеличение степени ионизации плазмы перед вязким скачком уплотнения в отсутствие ионизирующего излучения с фронта волны. Это обусловлено образованием ионно-звуковой УВ. Решена [8] стационарная задача о структуре ударного фронта в слабоионизированной неизотермической плазме при условии, что в нейтральном компоненте задана плоская УВ. Предложенный подход может быть обобщен на нестационарный случай, когда нейтральная составляющая движется в результате воздействия по определенному закону источника конечной энергии E_0. В частности, в качестве идеализированной ситуации можно рассмотреть автомодельное движение нейтрального компонента под воздействием точечного источника энергии [9].

Найдем возмущение плотности плазменного компонента в прогревном слое, предполагая прежде всего, что пространственный масштаб ξ изменения плотности мал по сравнению с шириной прогревного слоя. Поскольку $\xi \approx (V_s/c)^2 l$, $V_s = [zk_Б (T_e + T_i)/m_i]^{1/2}$ — скорость ионного звука, $z = |e_i/e| = 1$ — зарядовое число, $k_Б$ — постоянная Больцмана, c — скорость вязкого скачка уплотнения, имеем ограничение, налагаемое на интенсивность УВ:

$$(V_s/c)^2 \ll (m_i/m_e)^{1/2}.$$

В прогревном слое уравнения динамики плазмы представим в виде

$$\partial (r^{j-1}\rho)/\partial t + \partial (r^{j-1}\rho v)/\partial r = 0; \tag{1}$$

$$\partial v/\partial t + v\partial v/\partial r = -(V_s^2/\rho)\, \partial\rho/\partial r - \nu_{in} (v - v_n). \tag{2}$$

Здесь $j = 1, 2, 3$ для плоских, цилиндрических и сферических волн; ρ и v — массовая плотность и скорость плазменного компонента; r и t — координата и время. Скорость нейтрального компонента $v_n (r, t)$ считаем известной (из задачи о точечном взрыве [9]). Обратное воздействие заряженного компонента на нейтральный не учитываем, так как $\rho_0/\rho_{n0} \ll 1$ (слабоионизированная плазма), ρ_n — массовая плотность нейтралов, индексом 0 помечено невозмущенное состояние полей. По существу, (1), (2) описывают в длинноволновом приближении динамику ионно-звуковой волны, возбуждаемой сторонним источником $v_n\,(r,\,t)$.

Автомодельное движение нейтрального компонента определяется безразмерной переменной $\lambda = r/r_2\,(t)$, где $r_2\,(t) = [E_0 \varkappa^{-1}\,(\gamma)\,\rho_{n0}^{-1}]^{1/(2+j)} t^{j/(2+j)}$ — закон движения фронта; индексом 2 отмечены поля на фронте; $\varkappa(\gamma)$— безразмерный коэффициент порядка единицы [9]. Скорость фронта

$$c = \frac{2}{2+j}\left(\frac{E_0}{\varkappa\rho_{n0}}\right)^{1/(2+j)} t^{-j/(2+j)} = \frac{2}{2+j}\,\frac{r_2\,(t)}{t}\,.$$

Для сильной УВ на фронте имеем условия

$$v_{n2} = 2c\,(\gamma+1)^{-1}, \quad \rho_{n2} = \rho_{n0}\,(\gamma+1)\,(\gamma-1)^{-1}$$

(γ — показатель адиабаты для нейтрального газа).

Квазистационарное приближение. Введем систему координат, связанную с фронтом:

$$t' = t, \qquad r' = r - \int_0^t c\,(\tau)\,d\tau.$$

В окрестности фронта скорость частиц v определяется скоростью c, а явная зависимость от t' медленная. Поэтому локальная алгебраическая связь (поляризационное соотношение) между полями ρ и v приближенно может быть найдена из условия квазистатичности полей в штрихованной системе координат. Пренебрегая слагаемым, содержащим $\partial/\partial t'$ в (1), имеем эту связь:

(3) $$\rho\,(r',\,t') \simeq K\,(t')\,\{r'^{j-1}\,[c\,(t') - v\,(r',\,t')\,]\}^{-1}.$$

Здесь $K\,(t')$ — постоянная интегрирования, которую можно выразить через значения полей на фронте:

(4) $$K\,(t') = \rho_2 c r_2^{j-1} \rho_{n0}/\rho_{n2}.$$

В задаче об ионно-звуковой волне [8] выполнено неравенство $V_s^2 \gg cv$, тогда систему (2), (3) можно решить приближенно, если пренебречь слагаемыми dv/dt в (2). В результате получим обыкновенное дифференциальное уравнение для $u = [(c-v)\,r^{j-1}]^{-1}$ (переменная t выступает в роли параметра):

(5) $$du/dr - u\,(v_n - c)\,\nu_{in}/V_s^2 - \nu_{in}/(V_s^2 r^{j-1}) = 0.$$

В (5) $\nu_{in}\,(r)$ и $v_n\,(r)$ — разрывные функции при $r = r_2\,(t)$. В области перед фронтом при $v_n = 0$, $\nu_{in} = \nu_{in}^0$ уравнение (5) имеет общее решение

(6) $$u = u\,(r_2)\exp\,[\,-(r-r_2)/\xi\,] + \Phi\,(r),$$

где $\xi = V_s^2/[\,c\,(t)\,\nu_{in}^0\,]$; $\Phi\,(r) = \dfrac{\exp(-r/\xi)}{c\xi}\displaystyle\int_{r_2}^{r} dx\,x^{1-j}\exp\,(x/\xi)$.

При $j \neq 1$ Φ можно представить в асимптотическом по параметру $\alpha = \xi\,(t)/r_2\,(t) < 1$ виде и для v приближенно запишем

(7) $$v\,(r,\,t) \cong c\,(1-R_j)\,\{1 - R_j + \exp\,[\,(r-r_2)/\xi - \mu\,]\}^{-1}, \quad r > r_2\,(t).$$

Здесь

$$\mu = \ln\,[(r/r_2)^{j-1} v_2\,(c - v_2)^{-1}], \qquad R_j \approx \frac{c - v_2}{v_2}\left\{\sum_k\,(k+j-2)\,!\alpha^k - \right.$$

$$\left. - \left(\frac{r_2}{r}\right)^{j-1} e^{(r-r_2)/\xi} \sum_k\,(k+j-2)\,!\alpha^k \left(\frac{r_2}{r}\right)^{j-1}\right\}, \quad j > 1.$$

При $j = 1$ выражение (7) является точным представлением (6), поэтому $R_1 \equiv 0$. Для плотности ρ плазменного компонента перед фронтом имеем

(8) $$\rho\,(r,\,t) \cong \rho_2\,\frac{\rho_{n0}}{\rho_{n2}}\left((1-R_j)\,\frac{v_2}{(c-v_2)}\,e^{-(r-r_2)/\xi} + \left(\frac{r_2}{r}\right)^{j-1}\right), \quad r > r_2\,(t).$$

Отметим неудачность термина «ионно-звуковая ударная волна», предложенного в [8]. Как известно, увеличение диссипативного коэффициента должно приводить к возрастанию толщины фронта волны. В нашем случае наблюдается обратная зависимость: с ростом ν_{in}^0 толщина ξ уменьшается.

Позади фронта (при $r < r_2(t)$) можно получить приближенное представление для полей, полагая $v \doteq v_n(r, t)$:

$$\rho(r, t) \simeq \rho_2\rho_{n0}\rho_{n2}^{-1}c(c - v_n)^{-1}(r_2/r)^{j-1}, \quad r < r_2(t). \tag{9}$$

Тогда $v \doteq v_{n2}$ и из соотношений на фронте следует $(c - v_2)/v_2 = \rho_{n0}/(\rho_{n2} - \rho_{n0}) \doteq (\gamma - 1)/2 = \mathrm{const}$.

Если положить, что, как и в плоской стационарной задаче [8], для ρ_2 выполняется условие

$$\rho_2 = \rho_0\rho_{n2}/\rho_{n0} = \rho_0(\gamma + 1)/(\gamma - 1), \tag{10}$$

то выражения (7)—(9) при $j = 1$ формально совпадают с найденными в [8]. При $j \neq 1$ появляется множитель, описывающий расходимость $(r_2/r)^{j-1}$. Причем возмущение плазменного компонента обгоняет фронт волны нейтралов тем дальше, чем больше j. В рассматриваемом нестационарном случае связь типа (10) необходимо найти из условия сохранения выделившейся конечной энергии E_0. С учетом этого замечания решение (7)—(9) можно рассматривать как обобщение решения [8] на нестационарную задачу одномерного движения плазменного компонента вблизи фронта в результате точечного выделения энергии.

Нестационарность волны (7), (8) следует из того, что ее форма определяется автомодельной переменной $\lambda = r/r_2$, ширина фронта $\xi(t)$ растет со временем, а амплитуда скорости уменьшается как $c(t)$. Полная энергия H плазменного компонента, заключенного в «сфере» радиуса r, в момент времени t имеет вид

$$H(r, t) = 2^{j-1}\pi_j \int_0^r dx x^{j-1}\rho\,(V_s^2/(\gamma_p - 1) + v^2/2), \tag{11}$$

где γ_p — показатель адиабаты для плазменного компонента; $\pi_j \doteq 3{,}141$ для $j = 2, 3$ и 1 для $j = 1$. Вклад в H энергии электрического поля с плотностью, равной $D^2(\nabla\rho/\rho)^2\rho_0V_s^2/2$ (D — дебаевский радиус экранирования), в длинноволновом описании (1), (2) не учитываем. Тогда граничное условие с учетом потерь механической энергии ионов в результате соударений с нейтральным компонентом (потерями на трение электронов пренебрегаем) запишем как

$$[H(r, t) - H_0(r) - \Omega(r, t)]_{r\to\infty} = E_p, \tag{12}$$

$$\Omega(r, t) = 2^{j-1}\pi_j\nu_{in}^0\rho_0\left\{\int_0^{r_1} dx x^{j-1}\int_x^{r_2(\theta)} ds\,v(s) + \int_{r_1}^{r} dx x^{j-1}\int_x^{s(t,x)} ds\,v(s)\right\},$$

$$\Omega(r, t) = \Omega_1(r) + \Omega_2(r, t).$$

Здесь $H_0(r, t) = H(r, t)$ при $t < 0$; E_p — часть выделившейся энергии E_0, переданная плазменному компоненту при взрыве в момент времени $t = 0$. Если E_0 равномерно распределяется по компонентам, то $E_p \doteq E_0\rho_0/\rho_{n0}$. Внутренние интегралы в (12) представляют собой работу сил трения вдоль траектории движения $s(t, x)$ «материальной точки», которая в начальный момент времени ($t = 0$) находилась в точке x. Слагаемое Ω_1 учитывает вклад материальных точек, оказавшихся к моменту времени t за фронтом УВ. При этом сила трения совершает работу только вдоль участков траекторий, расположенных перед ударным фронтом, поскольку в нашей модели за фронтом имеется полное увлечение плазмы $v = v_n$. Из сказанного вытекает, что $r_1(t)$ есть решение уравнения $s(t, r_1) = r_2(t)$, а время $\theta(x)$, при котором УВ нагонит «материальную точку», находившуюся на расстоянии x от центра при $t = 0$, определяется из уравнения

$$s(\theta, x) = r_2(\theta). \tag{13}$$

Слагаемое Ω_2 отражает вклады точек с $x > r_1(t)$, и работа вычисляется вдоль участка, заключенного между x и $s(t, x)$.

Траектория движения «материальной точки» $s(t, x)$ описывается уравнением

(14) $$ds/dt = v(s(t), t)$$

при начальном условии $s(0) = x$ и известна, если решение задачи $v(r, t)$ найдено в области $r > r_2$ и $t > 0$. Воспользовавшись (14), во внутренних интегралах (12) можно перейти к интегрированию по времени, и выражение для $\Omega(r, t)$ примет вид

(15) $$\Omega(r, t) = 2^{j-1}\pi_j v_{in}^0 \rho_0 \left\{\int\limits_{r_*}^{r_1} dx x^{j-1} \int\limits_{x/V_{s1}^*}^{\theta(x)} dt' v^2(t') + \int\limits_{r_1}^{r} dx x^{j-1} \int\limits_{x/V_{s1}^*}^{s(t,x)} dt' v^2(t')\right\},$$

где $V_{s1}^* \doteq V_{s1}(0)$; $V_{s1}^2(t) \doteq k_Б(T_{i0} + T_{e2})/m_i$ — скорость ионного звука перед фронтом УВ при $t > 0$; r_* — минимальный масштаб, с помощью которого исключается начальный этап развития возмущения, когда «материальные точки», расположенные перед фронтом УВ, не успевают прийти в движение. Значение r_* находится из уравнения (13) при $\theta \doteq r_2(\theta)/V_{s1}^*$.

Для нахождения ρ_2, как следует из (11), (12), должны быть известны распределения ρ, v, T_e, T_i в области $0 < r < r_2(t)$. Однако вблизи центра симметрии становится невозможным пренебречь температурными градиентами, и модель (1), (2) не имеет места. Воспользуемся приближенными представлениями для полей при $0 < r < r_2$: $v \doteq v_n$, $T_i \doteq T_n$, $T_i < T_e$ в релаксационной зоне и $T_e \doteq T_i$ за ней. Далее, для того чтобы внутренняя энергия плазменного компонента, заключенного внутри «сферы» радиуса $r_2(t)$, оставалась конечной, необходимо потребовать $\rho/\rho_2 \approx \rho_n/\rho_{n2}$ при $r \to 0$ и любом t. Следовательно, значения ρ/ρ_2 и ρ_n/ρ_{n2} различаются меньше чем на порядок всюду в области $0 < r < r_2$. Тогда в случае сферической симметрии

$$4\pi(\gamma_p - 1)^{-1}\int\limits_0^{r_2} drr^2\rho V_s^2 = \frac{4\pi}{\gamma_p - 1}\frac{k_Б}{m_i}\left\{2\int\limits_0^{r_2} drr^2\rho T_n + \int\limits_{r_2-\Delta_T}^{r_2} drr^2\rho(T_e - T_n)\right\} \cong$$

$$\doteq 4\pi(\gamma_p - 1)^{-1} r_2^3\rho_2 [2QBk_Б T_{n2}/m_i + (\Delta_T/r_2)\varphi_1 V_{s0}^2].$$

Здесь $\varphi_1 = \varphi_1(\Delta_T/r_2)$ и Q — множители порядка единицы; $B = \int\limits_0^1 d\lambda\lambda^2 h(\lambda)$; $h(\lambda) = p_n/p_{n2}$ — известная функция задачи о точечном взрыве [9]; p — давление. Используя соотношение для скачка температуры на фронте сильной УВ $T_{n2} = T_{n0}(2\gamma/q)(\gamma - 1)(\gamma + 1)^{-2}$, $q = (a_0/c)^2$ (a_0 — невозмущенная скорость звука в нейтральном газе, $a_0^2 = \gamma V_{s0}^2 T_{i0}/T_{e0}$), а также учитывая $a_0^2 = \gamma k_Б T_{n0}/m_i = \gamma p_{n0}/\rho_{n0}$, $E_p \doteq E_0\rho_0/\rho_{n0}$ и пренебрегая потерями ($\Omega \ll E_p$, влияние диссипации будет оценено ниже), из (11), (12) при $j = 3$ имеем

(16) $$\frac{\rho_2}{\rho_0}(\gamma - 1)\left[A(\gamma)\frac{\gamma_p - 1}{\gamma + 1} + 2QB + \left(\frac{V_{s0}}{c}\right)^2\frac{\Delta_T}{r_2}\varphi_1\frac{(\gamma + 1)^2}{2}\right] =$$

$$= \frac{(\gamma + 1)^2}{2}\left[\left(\frac{V_{s0}}{c}\right)^2\frac{1}{3} + \frac{25\varkappa}{8\pi}(\gamma_p - 1) - \frac{\Omega + \Psi' + \Psi}{4\pi r_2^3\rho_0 c^2}(\gamma_p - 1)\right],$$

где

$$A(\gamma) = \int\limits_0^1 d\lambda f^2(\lambda)[1 - 2f(\lambda)/(\gamma + 1)]^{-1}; \quad A(1{,}4) \doteq 0{,}7433; \quad B \doteq 0{,}1588;$$

$$\Psi = 4\pi\int\limits_{r_2}^{\infty} drr^2[(\rho - \rho_0)V_s^2/(\gamma_p - 1) + \rho v^2/2];$$

$$\Psi' = 4\pi(\gamma_p - 1)^{-1}\rho_0\int\limits_{r_2}^{\infty} drr^2(V_s^2 - V_{s0}^2); \quad f(\lambda) = (v_n/c)(\gamma + 1)/2.$$

В рамках рассмотренного приближения получить Ψ как функцию ρ_2 нельзя, поскольку нет представления для ρ и v при $r \gg r_2$. Но функция Ψ в (16) дает малый вклад (ниже дана оценка), и при получении приближенного представления для ρ_2 можно воспользоваться значением $\Psi = 0$. Тогда, учитывая слагаемое с Ψ', связанное с электронной теплопроводностью, получим значение амплитуды, зависящее от параметров V_{s0}/c и Δ_T/r_2:

$$(17)\quad \rho_2 \cong \rho_0 \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \frac{\frac{25\varkappa}{32\pi}(\gamma+1)^2(\gamma_p-1) - \frac{\Delta_T}{r_2}\varphi_2(\gamma-1) + \left(\frac{V_{s0}}{c}\right)^2 \frac{(\gamma+1)^2}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{\Delta_T}{r_2}\varphi_2\right)}{(\gamma_p-1)A(\gamma) + (\gamma+1)[2QB + (\Delta_T/r_2)\varphi_1(V_{s0}/c)^2(\gamma+1)^2/2]}.$$

Здесь $\varphi_2 \equiv \varphi_2(\Delta_T/r_2) = 0{,}8956[1 + 0{,}9305\Delta_T/r_2 + (\Delta_T/r_2)^2 5/17]$ в случае типичного для тепловой волны распределения T_e [6].

Решение, близкое к автомодельному. Можно построить другое приближенное представление решения системы (1), (2), имеющее более широкую область применимости. Сделаем это в безразмерных переменных $\lambda = r/r_2$, $q = (a_0/c)^2$. Пренебрежем слагаемыми, содержащими $q\frac{\partial}{\partial q}$, в (1), (2) в силу $q \ll 1$. Тогда, считая, что поля зависят от q как от параметра, имеем

$$(18)\quad -c\lambda^j d\rho/d\lambda + d(\lambda^{j-1}\rho v)/d\lambda \doteq 0;$$

$$(19)\quad -c\lambda dv/d\lambda + v dv/d\lambda + (V_s^2/\rho)\, d\rho/d\lambda \doteq \nu_{in}(v_n - v).$$

Из (18) находим

$$(20)\quad \rho^{-1} d\rho/d\lambda = [\lambda^{1-j}/(\lambda c - v)]\, d(\lambda^{j-1}v)/d\lambda.$$

Перед фронтом волны $v_n = 0$, тогда после подстановки (20) в (19) получим уравнение для $v(\lambda)$ при $\lambda > 1$, учитывая, что $V_s^2 \gg vc$:

$$(v - \lambda c)^{-1} d(\lambda^{j-1}v)/d\lambda \doteq \alpha^{-1}\lambda^{j-1}v/c.$$

Решение этого уравнения при начальном условии $v = v_2 \doteq v_{n2}$ можно представить в виде

$$(21)\quad v = c\lambda^{j-1}\left[e^{(\lambda^2-1)/(2\alpha)}(\gamma+1)/2 - e^{\lambda^2/(2\alpha)}\int_1^\lambda dx\, x^{1-j}e^{-x^2/(2\alpha)}\right]^{-1},$$

или, сохраняя первый член асимптотического по параметру $\alpha \ll 1$ представления интеграла в (21), приближенно получим

$$(22)\quad v \doteq c\lambda\{1 + [(\gamma-1)/2]\lambda^j \exp[(\lambda^2-1)/(2\alpha)]\}^{-1}, \quad \lambda > 1.$$

Для $\rho(\lambda)$ из (20), (22) находим

$$(23)\quad \rho(\lambda) \simeq \rho_2 + (\rho_2 - \rho_0)\{\lambda^{-j}\exp[(1-\lambda^2)/(2\alpha)] - 1\}, \quad \lambda > 1.$$

Сравнивая результат (22), (23) со структурой фронта волны (7), (8), отметим, что более строгий учет нестационарности показывает увеличение крутизны фронта, которая растет с увеличением j. В самом деле, квазистационарное приближение (8) с условием на фронте УВ (10) дает

$$(24)\quad \rho \doteq \rho_0(\gamma-1)^{-1}\{\gamma - 1 + 2\exp[(1-\lambda)/\alpha]\}, \quad \lambda > 1,$$

а решение, близкое к автомодельному (23), с учетом (10) приводит к уравнению

$$(25)\quad \rho \doteq \rho_0(\gamma-1)^{-1}\{\gamma - 1 + 2\lambda^{-j}\exp[(1-\lambda^2)/(2\alpha)]\}, \quad \lambda > 1.$$

При $\alpha = \xi/r_2 \ll j^{-1}$ (24) приближенно совпадает с (25) в области $r_2 < r < r_2 + \xi$. В квазистационарном приближении (7), (8) представляют решение в окрестности фронта волны нейтралов, аппроксимация (22), (23) годится в области $r_2 < r < r_2 + \Delta_T$, $\Delta_T \simeq l(m_i/m_e)^{1/2}$. Приближенный переход (23) в (8) вблизи фронта волны служит оправданием допущений, сделанных при получении (7) и (8). Точность решения (7), (8) падает с ростом порядка симметрии. В этом смысле квазистационарное приближение является также и квазиплоским.

Для вывода (17) использованы простые соотношения (3), (4), (9) квазистационарного приближения вместо (20) и $v \doteq v_n$, $\lambda < 1$. Это возможно благодаря тому, что основной вклад в интегралы (11) дает возмущение плазменного компонента вблизи фронта УВ.

Из (16), (22), (23) с учетом того, что Ψ мало изменится при замене верхнего предела интегрирования в (16) с ∞ на Δ_T, следует представление

$$\Psi = 4\pi\alpha r_2^3 c^2 \{\rho_2 [(V_{s1}/c)^2 + \Gamma] - \rho_0 [(V_{s1}/c)^2 + \Gamma - \Gamma_1]\}, \tag{26}$$

где

$$\Gamma \doteq (\gamma_p - 1) \{\gamma/(\gamma + 1) - (\gamma - 1) \ln [(\gamma + 1)/(\gamma - 1)]/2\};$$

$$\Gamma_1 \doteq (\gamma_p - 1) \{(1/2) \ln [(\gamma + 1)/(\gamma - 1)] - (\gamma + 1)^{-1}\} > 0.$$

Наличие в (26) множителя $\alpha \ll 1$ указывает на то, что для достаточно узких фронтов ($\xi < r_2(t)\,(c/V_{s1})^2$) влиянием расплывания плазменного возмущения на его амплитуду ρ_2 можно пренебречь. Из (16) и (26) также вытекает, что уширение фронта ведет к уменьшению ρ_2.

Оценим влияние диссипации механической энергии движения плазменного компонента из-за передачи импульса нейтральному компоненту путем «трения». Используя (22), из (14) для функции $\sigma(t) = s(t)/r_2(t)$ получаем уравнение

$$d\sigma/dt = [j/(2 + j)]\,[\hat{v}(\sigma) - \sigma]/t, \qquad \hat{v} \equiv v/c.$$

Интегрируя в пределах от t до $\theta(x)$, $t > r/V_{s1}^*$, с точностью до слагаемого порядка α находим $s(t) \doteq x \doteq r_2(\theta) \doteq \mathrm{const}$, $r_1(t) \doteq r_2(t)$. В том же приближении для спрямленных траекторий (15) преобразуется:

$$\Omega(r, t) \cong \frac{8\pi r_2^5}{5t}\rho_0 v_{in}^0 \left\{\int_{\Pi_1}^{1} dy\, y^{-5/2} \int_1^{\Pi_2(y,t)} d\lambda\, \lambda^{-1/2} v^2(\lambda) + \int_1^{r/r_2} dy\, y^{-5/2} \int_y^{\Pi_2(y,t)} d\lambda\, \lambda^{-1/2} v^2(\lambda)\right\}.$$

Здесь $y = x/r_2(t)$; $\Pi_1 = (5c/2V_{s1}^*)^{2/3}$; $\Pi_2(y, t) = x r_2^{-1}(x/V_{s1}^*)$. Оценка сверху дает

$$\Omega \equiv \Omega(r, t)|_{r\to\infty} \leqslant (8\pi/5)\,(E_0\rho_0/\rho_{n0})\, v_{in}^0 t\, O(\alpha)\,(V_{s1}^*/c)^{5/3}.$$

В результате подстановки этого выражения в (16) получаем

$$\rho_2 \doteq \rho_0 \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \frac{\dfrac{(\gamma + 1)^2}{6}\left[\dfrac{75\varkappa}{16\pi}(\gamma_p - 1) + \left(\dfrac{V_{s0}}{c}\right)^2 - \dfrac{15}{2}(\gamma_p - 1)\, v_{in}^0 t\, O(\alpha)\left(\dfrac{V_{s1}^*}{c}\right)^{5/3}\right]}{(\gamma_p - 1)\, A(\gamma) + (\gamma + 1)\,[2QB + (\Delta_T/r_2)\,\varphi_1 (V_{s0}/c)^2 (\gamma + 1)^2/2]}. \tag{27}$$

Как видно из (27), амплитуда волны плотности в значительной мере определяется электронным компонентом плазмы: его теплопроводностью и температурами электронов в отсутствие возмущения T_{e0} и за фронтом T_{e2}. Амплитуда ρ_2 зависит от времени. В начале из-за накачки энергии в ионно-звуковую волну амплитуда ее нарастает. При

$$\frac{\Delta_T}{r_2}\left(\frac{V_{s0}}{c}\right)^2 > \frac{4}{(\gamma + 1)^2} B, \qquad \left(\frac{V_{s0}}{c}\right)^2 > \frac{75\varkappa}{16\pi}(\gamma_p - 1)$$

амплитуда достигает «насыщения»:

$$\rho_{2\max} \approx \rho_0 (r_2/\Delta_T)\,[(\gamma - 1)\,\varphi_1]^{-1}.$$

Однако увеличению амплитуды препятствует потеря энергии в результате столкновений с нейтральными частицами перед фронтом УВ, так как часть энергии, возвращаемая плазменным компонентом нейтралам, растет со временем как $t^{11/5}$, а слагаемое с $(V_{s0}/c)^2$ как $t^{6/5}$. Если $(V_{s0}/c)^2 < 1$, то ρ_2 слабо зависит от времени и ее значение близко к (10); отличие от (10) состоит в том, что появился немного меньший единицы «коэффициент ослабления», который при грубых оценках можно не учитывать. Формула

(27) получена для сильной УВ ($q = (V_{s0}/c)^2 (1 + T_{e0}/T_{i0})^{-1} \ll 1$) с использованием оценки «сверху» для Ω. Это ограничивает ее применимость в принципе.

В заключение заметим, что простой вид выражений (7), (8), (18)—(22) получен в предположении, что параметр

$$\alpha = \xi/r_2 = q^{1/6} (l/r_0) (V_s/a_0)^2 (5/2)^{2/3} \sqrt{\gamma} \sqrt[3]{\gamma\varkappa}$$

много меньше единицы (r_0 — характерная динамическая длина задачи о точечном взрыве). Это означает малость отношения пространственного масштаба переднего фронта плазменного возмущения ξ к радиусу ударной волны r_2.

Приложение. Рассмотрим вспышку сверхновой как точечный взрыв в межзвездной плазме. Как известно [1], вспышки сверхновых представляют собой один из важнейших факторов, поддерживающих движения межзвездной среды, которая в среднем является слабоионизированной плазмой. Адиабатическую стадию движения оболочки сверхновой опишем на основе теории точечного взрыва. Она начинается приблизительно через 10^3 лет после вспышки и заканчивается спустя 30—50 тыс. лет [10]. Затем на следующей стадии эволюции оболочка сверхновой за 10—15 тыс. лет охлаждается с 10^6 до 10^3 K в основном из-за сильного высвечивания газа за фронтом УВ. Не исключено, что в течение этих двух стадий складываются условия для образования опережающего оболочку ионно-звукового возмущения со следующими параметрами: скорость плазменного компонента ≈ 100 км/с, амплитуда в несколько раз превосходит фоновое значение в невозмущенном газе, пространственный масштаб возмущения плазменного компонента перед фронтом $\xi = V_s^2/(c\nu_{in}^0) \approx 10^{18}$ см ($\nu_{in}^0 = 10^{-16}$ (см^2) $\sqrt{4k_Б T_i/(\pi m_i)}\, N_n$, $T_i = 10^2$ K, $N_n = 0{,}6$ см$^{-3}$). Для сравнения радиус фронта волны в конце стадии высвечивания составляет 10^{19} см, а $r_0 > 10^{21}$ см. Оценки носят ориентировочный характер, так как в исходном уравнении (2) не была учтена ионная вязкость. С другой стороны, появление сверхзвуковых протонов перед фронтом волны может привести к возникновению неустойчивости и появлению турбулентной вязкости как преобладающего механизма диссипации энергии.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Горбацкий В. Г.** Космическая газодинамика.— М.: Наука, 1977.
2. **Пуикевич Б. С., Степанов Б. М.** Ионизация не возмущенного ударной волной аргона при взрыве заряда ВВ // Физические процессы при горении и взрыве: Сб. статей.— М.: Атомиздат, 1980.
3. **Горшков В. А., Климов А. И., Коблов А. Н.** и др. Распространение ударных волн в плазме тлеющего разряда при наличии магнитного поля // ЖТФ.— 1984.— Т. 54, вып. 5.
4. **Климишин И. А.** Ударные волны в оболочках звезд.— М.: Наука, 1984.
5. Неравновесные физико-химические процессы в аэродинамике/Под ред. Г. И. Майкапара.— М.: Машиностроение, 1972.
6. **Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П.** Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений.— М., Физматгиз, 1963.
7. **Єеликович А. Л., Либерман М. А.** Физика ударных волн в газах и плазме.— М.: Наука, 1987.
8. **Авраменко Р. Ф., Рухадзе А. А., Теселкин С. Ф.** О структуре ударной волны в слабоионизированной неизотермической плазме // Письма в ЖЭТФ.— 1981.— Т. 34, вып. 9.
9. **Седов Л. И.** Методы подобия и размерности в механике.— М.: Наука, 1987.
10. **Шкловский И. С.** Вспышки сверхновых и межзвездная среда // Астрон. журн.— 1962.— Т. 39.— С. 209.

г. Санкт-Петербург

Поступила 8/I 1992 г.,
в окончательном варианте — 17/IX 1992 г.